YÖN VE TERS UZAKLIK AĞIRLIKLI ORTALAMA İLE ENTERPOLASYON

(INTERPOLATION WITH DIRECTION AND INVERSE DISTANCE WEIGHTED AVERAGE)

Mustafa YANALAK

ÖZET

Bilgisayar ortamında, 3 boyutlu arazi verilerinden eşyükselti eğrilerin çizimi veya sayısallaştırılmış eşyükselti eğrili çizimlerden arazi yüzeyinin modellenmesi enterpolasyonun sık kullanıldığı uygulamalardır. Enterpolasyon için kullanılabilecek en basit yaklaşım ağırlıklı ortalamadır. Enterpolasyon noktasındaki aranan değer, çevrede bulunan dayanak noktalarındaki bilinen değerler kullanarak ağırlıklı ortalama ile belirlenmektedir. Dayanak noktalarındaki bilinen değerlere verilen ağırlık dayanak noktası ile enterpolasyon noktası arasındaki yatay uzaklık ile ters orantılı bir fonksiyondur. Bu çalışmada, dayanak noktasının enterpolasyon noktasına olan uzaklığının yanı sıra enterpolasyon noktası ile dayanak noktasının belirlediği doğrultunun istenilen bir doğrultudan sapma açısına bağlı olan yeni bir ağırlık modeli önerilmektedir. Yeni ağırlık modelinin klasik uzaklıkla ters orantılı ağırlıklı ortalama sonuçlarını iyileştirdiği basit bir örnek üzerinde gösterilmektedir.

ABSTRACT

Drawing contour lines from 3D field data and modelling of the terrain from digitized contour data in computer media are applications, in which interpolation is often used. The simplest approach, which can be used for interpolation is weighted average. Required value for an interpolation point, is calculated by weighted average using known values on reference points around it. The weight for a known value on a reference point is an inverse distance function of horizontal distance between interpolation and reference points. In this study, a new weight model, which depends on horizontal distance and deviation angle of interpolation point-reference point direction from a selected direction is also proposed. It is shown by a simple example that the new weight model improves the results of classical inverse distance weight model.

1. GİRİŞ

Konuma bağlı bilginin üretiminin ve kullanımının artması, bu bilgilerin modellenmesini ve gerektiğinde ara değerlerin hesaplanmasını gerekli kılmaktadır. Bilgisayar ortamında, 3 boyutlu arazi verilerinden arazi yüzeyinin modellenmesi, eşyükselti eğrilerinin çizimi ve sayısallaştırılmış eşyükselti eğrili çizimlerden arazi yüzeyinin modellenmesi, enterpolasyonun sık kullanıldığı uygulamalardır. Sayısal arazi modelleri veya sayısal yükseklik modelleri olarak isimlendirilen bu çalışmalar bilgisayar olanaklarının artmasıyla hızla yaygınlaşmıştır. Literatürde önerilmiş olan bir çok enterpolasyon algoritması uygulama olanağı bulurken yeni algoritmalar da türetilmektedir /1,2,3,4,5/. Sayısal yükseklik modellemesi için kullanılabilecek enterpolasyon yöntemleri için farklı yaklaşımlar ve sınıflandırmalar yapmak mümkündür. /6/'da enterpolasyon yaklaşımları 3 temel gruba ayrılmıştır:

1. Yüzeyi bütün olarak tek bir fonksiyonla enterpole etmek,
2. Alt kümeler tanımlayıp yüzeyi parça parça enterpole etmek,
3. Nokta nokta enterpole etmek.

/7/'de enterpolasyon yöntemleri şu başlıklar altında toplamıştır:

1. Kayan yüzeyler yöntemi
2. Yüzeylerin toplamı
3. Sürekli parça parça polinomlar
4. Dikdörtgen gridde enterpolasyon
5. Üçgenler ağında enterpolasyon
6. Çizgisel bir SAM'da enterpolasyon

/8/'de düzenli grid köşelerinde yer alan dayanak noktaları için uygulanan yöntemler;

1. Ağırlıklı ortalama
2. Kayan yüzeyler
3. Lineer prediksiyon
4. Minimum büyüklükteki polinomlar
5. Bilineer polinom
6. Lineer enterpolasyonun iki versiyonu

olarak özetlemiştir.

/5/'de bilgisayarla yapılacak yüzey modelleme çalışmalarında kullanılabilecek enterpolasyon yöntemleri 5 ana başlık altında toplanmıştır.

1. Uzunluğa bağımlı yöntemler
2. Uygun fonksiyon (fonksiyon uydurma) yöntemleri
3. Üçgenlere dayanan yöntemler
4. Dikdörtgenlere dayanan yöntemler
5. Komşuluğa dayanan yöntemler

Enterpolasyon için kullanılabilecek en basit yaklaşım ağırlıklı ortalamadır. Enterpolasyon noktasındaki aranan değer, çevrede bulunan dayanak noktalarındaki bilinen değerler kullanarak ağırlıklı ortalama ile belirlenmektedir. Dayanak noktalarındaki bilinen değerlere verilen ağırlık, dayanak noktası ile enterpolasyon noktası arasındaki yatay uzaklık ile ters orantılı bir fonksiyondur. Ağırlık fonksiyonunun uzaklıkla ters orantılı alınması uzakta olan noktaların enterpolasyon sonucuna etkilerinin azaltılması amacını taşımaktadır. İyi bir temele oturan bu düşünce ağırlıklı ortalama ile enterpolasyon için vazgeçilmez bir altlık olmuştur. Bazı durumlarda enterpolasyon işleminin belirli bir doğrultuda yapılması arzulanır. Verilerin yapısı veya enterpolasyonun doğruluğu bizleri buna zorlayabilir. Örneğin, eşyükselti eğrili bir altlıkta bir ara noktanın yüksekliğini hesaplarken eşyükselti eğrilerine dik yönde enterpolasyon yapılması arzulanır. Çünkü bu sonucun daha doğru olacağı bilinmektedir. Klasik ağırlıklı ortalama bu ihtiyaca yanıt vermemektedir. Bu çalışmada, dayanak noktasının enterpolasyon noktasına olan uzaklığının yanı sıra enterpolasyon noktası ile dayanak noktasının belirlediği doğrultunun istenilen bir doğrultudan sapma açısına bağlı olan yeni bir ağırlık modeli önerilmektedir. Yeni ağırlık modelinin klasik uzaklıkla ters orantılı ağırlıklı ortalama sonuçlarını iyileştirdiği basit bir örnek üzerinde gösterilmektedir.

2. KLASİK AĞIRLIKLI ORTALAMA İLE ENTERPOLASYON

Bu yöntemde enterpolasyon noktasının yüksekliği, çevresinde bulunan dayanak noktalarının yüksekliklerinden ağırlıklı olarak hesaplanır. Her bir dayanak noktasının yüksekliğine verilecek olan ağırlık değeri o noktanın enterpolasyon noktasına olan uzaklığın bir fonksiyonudur. Bir enterpolasyon noktasının yüksekliği,

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} p_i * z_i \,/\, \sum_{i=1}^{m} p_i \tag{1}$$

eşitliği ile bulunur. Açık yazılırsa,

$$z_0 = (p_1 * z_1 + p_2 * z_2 + \dots\dots\dots + p_m * z_m) / (p_1 + p_2 + \dots\dots. + p_m) \tag{2}$$

olur. Matris gösterimiyle,

$$z_0 = \underline{p}^T \underline{z} \,/\, \underline{p}^T \underline{I} \tag{3}$$

yazılabilir.Burada,

$$\underline{p}^T = (p_1, p_2, \dots., p_m) \tag{4}$$

ağırlık vektörünü, $\underline{I}$ birim vektörü, $\underline{z}$ ise dayanak noktalarının yükseklik vektörünü gösterir.

Ağırlık fonksiyonu olarak,

$$p_i = \left[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \right]^{-k} = (s_i^2)^{-k}, \qquad \text{i =1,2,.....,m} \quad \text{2k =1,2,3} \tag{5}$$

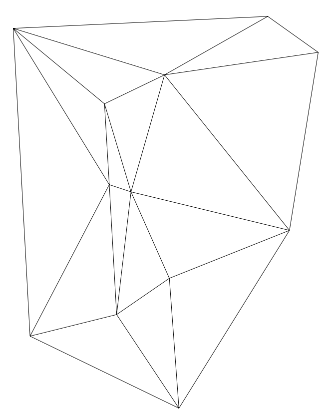
eşitliği kullanılabileceği gibi,

$$p_i = e^{(-s_i^2 / k^2)}, \qquad \text{i =1,2,...,m} \qquad \text{k=3,4,5} \tag{6}$$

şeklindeki Gauss fonksiyonu da kullanılabilir /6/. Bu eşitliklerde geçen (x_i, y_i) herhangi bir dayanak noktasının, (x_0, y_0) ise yüksekliği belirlenecek enterpolasyon noktasının konum koordinatlarını göstermektedir.

Büyük arazi parçaları üzerinde çalışıldığında enterpolasyon noktasından uzakta bulunan noktaları enterpolasyon işleminde kullanmak, sonuçları olumsuz etkileyecektir. Bu olumsuz etkinin giderilmesi için tüm dayanak noktalarının kullanılması yerine sadece enterpolasyon noktası civarında bulunan dayanak noktalarının kullanılması önerilmektedir. Kullanılacak dayanak noktalarının seçimi için genellikle enterpolasyon noktasında çizilen bir daire veya dikdörtgen kullanılmaktadır. Her bir enterpolasyon noktasının yüksekliği, o noktanın çevresinde çizilen kritik daire veya dikdörtgen içinde kalan dayanak nokta yüksekliklerinden hesaplanır /9/. Çözüm için kullanılabilecek diğer bir düşünce sadece enterpolasyon noktasının doğal komşularını kullanmaktır. Doğal komşuluk hesapsal geometride önemli bir yer tutmaktadır. Düzlemde yer alan bir nokta kümesi Delaunay kriterine göre (oluşan üçgenlerin çevrel çemberleri içerisinde başka dayanak noktası olmasın) üçgenlenirse Delaunay üçgenlemesi elde edilir /10,11,12/. Şekil 1'de bir nokta kümesi için Delaunay üçgenlemesi görülmektedir. Delaunay üçgenlemesine ait bazı önemli özellikler şunlardır:

1-Tek anlamlıdır. Başlangıç noktasından bağımsızdır.
2-Oluşan üçgenler en olası eşkenar üçgenlerdir. Çok dar açılı üçgenlerin oluşumu, dolayısıyla, birbirlerine uzak olan ve direkt ilişkisi bulunmayan noktalar arasında doğrusal bir ilişki kurulması engellenmektedir.
3- Üçgenlerin çevrel çemberi içerisinde bir başka nokta yer almamaktadır.
4-Veri kümesinin dışbükey çerçevesi üçgenlemede yer almaktadır. Bir nokta kümesinin dışbükey çerçevesi o kümeyi içine alan en küçük çokgendir.
5-Dayanak noktaları kümesinde birbirine en yakın konumda bulunan nokta çiftinin oluşturduğu doğru parçası üçgenlemede yer almaktadır.
6-Her bir noktayı kendisine en yakın nokta ile birleştiren doğru parçası bir üçgen kenarını oluşturmaktadır /13,14,15/.



Şekil-1: Delaunay Üçgenlemesi

Delaunay üçgenlemesi doğal komşuların birleştirilmesiyle oluşan bir üçgenlemedir. Diğer bir değişle bir nokta ile birleşerek üçgen kenarı oluşturan bütün noktalar o noktanın doğal komşusu olarak tanımlanır. Bir enterpolasyon noktası dayanak noktaları ile birlikte Delaunay kriterine göre üçgenlenirse enterpolasyon noktası ile birleşerek üçgen kenarı oluşturan bütün dayanak noktaları enterpolasyon noktasının doğal komşusu olurlar /16/. Dolayısıyla ağırlıklı ortalama ile enterpolasyon işlemi sadece bu dayanak noktaları kullanılarak yapılabilir. Doğal komşuların kullanılması kritik daire veya dikdörtgen boyutunun belirlenmesi gereğini de ortadan kaldıracaktır.

3. YÖN VE TERS UZAKLIK AĞIRLIKLI ORTALAMA

Ağırlık fonksiyonunun uzaklıkla ters orantılı alınması uzakta olan noktaların enterpolasyon sonucuna etkilerinin azaltılması amacını taşımaktadır. İyi bir temele oturan bu düşünce ağırlıklı ortalama ile enterpolasyon için vazgeçilmez bir altlık olmuştur. Bazı durumlarda verilerin yapısı veya enterpolasyonun doğruluğu, enterpolasyon işleminin belirli bir doğrultuda yapılmasını gerektirir. Örneğin, eşyükselti eğrili bir altlıkta bir ara noktanın kotunu hesaplarken eşyükselti eğrilerine dik yönde enterpolasyon yapılması arzulanır. Çünkü bu sonucun daha doğru olacağı bilinmektedir. Klasik ağırlıklı ortalama bu ihtiyaca yanıt vermemektedir. Şekil-2'de bir enterpolasyon noktası ve çevresinde bulunan 4 dayanak noktası görülmektedir. Enterpolasyon noktasındaki seçilmiş yön ve enterpolasyon noktası ile dayanak noktası arasındaki doğrultuların bu seçilmiş yönden olan sapmaları (α_i) görülmektedir. Bu çalışmada önerilen ağırlık modeli, seçilmiş yön ile dayanak noktasına giden doğrultu arasında kalan daire parçasının alanı ile ters orantılıdır.

$$P = \log(\frac{1}{F_i}) \tag{7}$$

olarak düşünülmüştür. Eşitlikte geçen F_i açık yazılırsa,

$$P = \log(\frac{1}{0{,}5 \cdot \alpha_i \cdot s_i^2}) \tag{8}$$

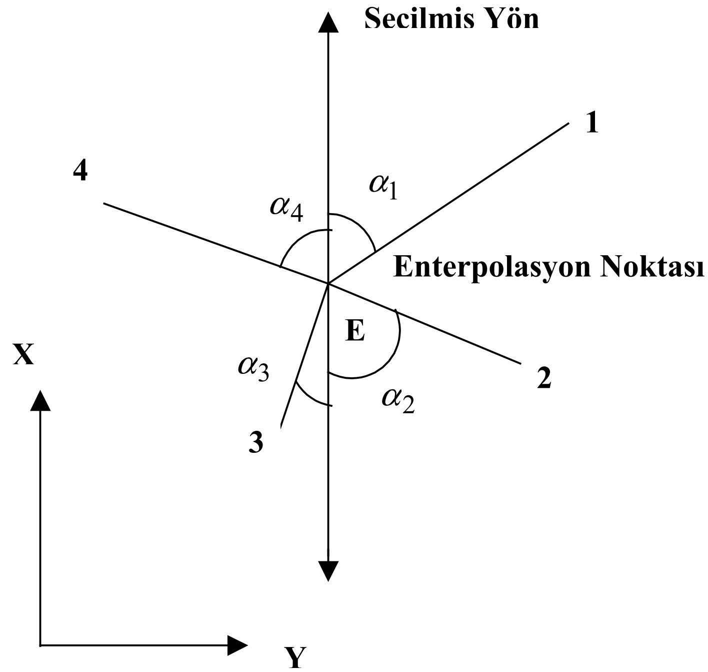
olur. Burada, s_i enterpolasyon noktası ile dayanak noktası arasındaki yatay uzaklıktır. Eşitliğe bakıldığında sapma açısı veya dayanak noktasının enterpolasyon noktasına olan uzaklığı arttığında parantez içi küçülecek, dolayısıyla ağırlık azalacaktır. 1'den küçük olan sayıların logaritmasının eksi işaretli olacağı düşünülerek bundan kurtulmak için (8) eşitliğinde geçen 1 sayısı yerine sabit bir F katsayısının kullanılması gerekmektedir.

$$P = \log(\frac{F}{0{,}5 \cdot \alpha_i \cdot s_i^2}) = \log(\frac{F}{F_i}) \tag{9}$$

Sapma açısının maksimum 100 grad, enterpolasyon noktasıyla dayanak noktası arasındaki uzaklığın da maksimum kritik daire yarıçapı kadar olacağı düşünülürse (9) eşitliğinde paydanın alabileceği maksimum değer, kritik daire yarıçapına sahip bir daire alanının dörtte birine eşit olacağı görülür. Sabit *F* değeri için

$$F = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 \tag{10}$$

kullanılabilir.



Şekil-2: Enterpolasyon Noktası, Seçilmiş Yön ve Sapma Açıları

4. UYGULAMA

Konunun daha iyi vurgulanabilmesi için eş yükselti eğrili bir altlıktan yaklaşık doğu-batı yönünde uzanan 3 eşyükselti eğrisinden bir bölümü sayısallaştırılmıştır. Her bir eşyükselti eğrisinden 8 nokta olmak üzere toplam 24 nokta sayısallaştırılmıştır. Bu dayanak noktalarının koordinatları Tablo-1'de, dağılımları ise Şekil-2'de görülmektedir. Eşyükselti eğrileri doğu-batı yönünde uzandığı için arazinin en büyük eğim doğrultusu yaklaşık olarak kuzey-güney doğrultusudur. Bu nedenle bu çalışmada seçilmiş yön olarak kuzey-güney doğrultusu kullanılmıştır. Seçilmiş 5 enterpolasyon noktasındaki (A, B, C, D ve E) yükseklik değerleri 3 farklı şekilde hesaplanmıştır.

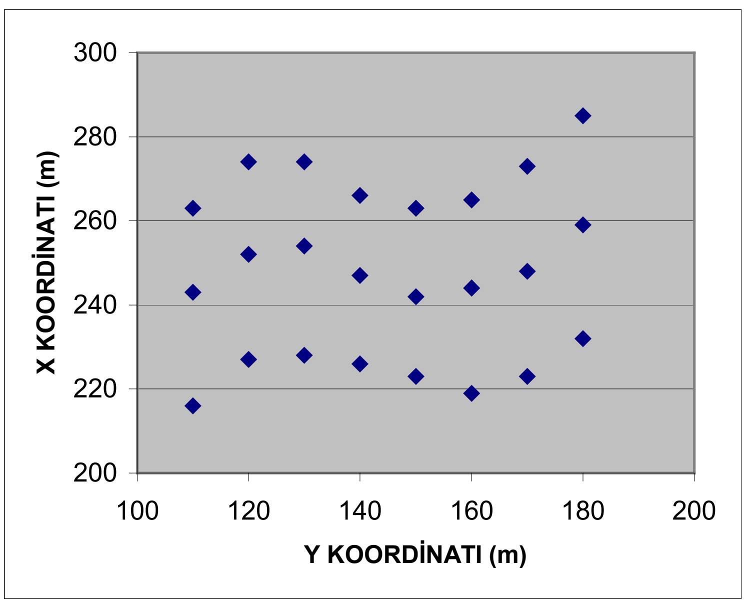
a. Eşyükselti eğrili altlık üzerinde eşyükselti eğrileri arasında yapılan lineer enterpolasyon
b. Klasik ağırlıklı ortalama (kritik daire yarıçapı, r=20m, P=1/s)

c. Yön ve ters uzaklık ağırlıklı ortalama (kritik daire yarıçapı, r=20m, $P=F/F_i$)

Tablo-1: Kullanılan Dayanak Noktalarının Koordinatları

Nokta No	**Y(m)**	**X(m)**	**Z(m)**	**Nokta No**	**Y(m)**	**X(m)**	**Z(m)**
1	110	216	10	13	150	242	11
2	120	227	10	14	160	244	11
3	130	228	10	15	170	248	11
4	140	226	10	16	180	259	11
5	150	223	10	17	110	263	12
6	160	219	10	18	120	274	12
7	170	223	10	19	130	274	12
8	180	232	10	20	140	266	12
9	110	243	11	21	150	263	12
10	120	252	11	22	160	265	12
11	130	254	11	23	170	273	12
12	140	247	11	24	180	285	12

Hesaplanan yükseklik değerleri Tablo-2'de verilmiştir.



Şekil-2: Dayanak Noktalarının Dağılımı

Tablo-2: Enterpolasyon Noktalarının Koordinatları ve Enterpolasyonla

Bulunan Yükseklikler

Nokta No	Y(m)	X(m)	Yükseklik (m)		
			Elle klasik lineer enterpolasyon	Yön ve ters uzaklık ağırlıklı ortalama	Klasik ters uzaklık ağırlıklı ortalama
A	127	246	10,67	10,73	10,86
B	157	251	11,44	11,40	11,28
C	167	234	10,51	10,48	10,48
D	128	264	11,45	11,56	11,65
E	172	268	11,75	11,79	11,79

5. SONUÇ

Tablo 2'de verilen sonuçlara bakıldığında klasik ağırlıklı ortalama ile enterpolasyon yerine yön ve ters uzaklık ağırlıklı ortalama kullanılması elde edilen yükseklikleri, eşyükselti eğrilerinden elle (klasik lineer enterpolasyonla) enterpolasyon yapılarak bulunan yüksekliklere yaklaştırdığı gözlenmektedir. Günümüzde, elle yapılan uygulamaların geliştirilen algoritmalar sayesinde bilgisayar ortamına aktarılmasının ve otomasyona yönelmenin önemi düşünülürse, enterpolasyon için enterpolasyon yönünün önemli olduğu durumlarda önerilen ağırlık modelinin kullanılması klasik ağırlıklı ortalama sonuçlarını iyileştirecektir. Yapılan uygulamada seçilmiş yön bütün enterpolasyon noktaları için kuzey-güney doğrultusu alınmıştır. Gerçek uygulamalarda, her bir enterpolasyon noktası için arazinin durumuna göre farklı bir yön tanımı yapılmalıdır. Enterpolasyon noktasındaki en büyük eğim doğrultularının hesaplanıp o doğrultunun seçilmiş yön olarak alınması eşyükselti eğrilerinin felsefesine de uygun düşecektir. Daha kapsamlı bir uygulama üzerinde modelin ayrıntılı değerlendirilmesi yapılmalıdır.Bu düşünce daha ayrıntılı bir çalışmanın konusu olabilir.

K A Y N A K L A R

/1/ Auerbach, S., Schaeben, H. : Surface Representations Reproducing Given Digitized Contour Lines, Mathematical Geology, Vol.22, No.6, 1990

/2/ Watson, D.F : Acord : Automatic Contouring of Raw Data, Computers and Geosciences, Vol 8, No 1, 97-101, 1982

/3/ Sukumar, N., Moran, B., Semenov,A., Belikov, V.V. : Natural Neighbour Galerkin Methods, International journal for numerical methods in Engineering, 50, 1-27, 2001

/4/ Watson, D.F., Philip, G.M. : Triangle Based Enterpolation, Mathematical Geology, Vol 16, No 8, 779-795, 1984

/5/ Watson, D.F : Contouring: A Guide to The Analysis and Display of Spatial Data, Pergamon press, 1992

/6/ Güler, A. : Sayısal Arazi Modellerinde Enterpolasyon Yöntemleri, Harita Dergisi, sayı 85, 53-71,Ocak, 1978

/7/ Schut, G.H. : Review of Interpolation Methods for Digital Terrain Models, The Canadian Surveyor, Vol 30, No 5, December, 1976

/8/ Leberl, F. : Interpolation in a Square Grid DTM, ITC Journal, 1973-75

/9/ Yanalak, M. : Sayısal Arazi Modellerinden Hacim Hesaplarında En Uygun Enterpolasyon Yönteminin Araştırılması, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 1997

/10/ Lee, D.T.; Preparata, F.P. : Computational Geometry - A Survey, IEEE Transactions On Computers, Vol c-33, No 12, December,1984

/11/ Watson,D.F.; Philip,G.M. : Systematic Triangulations, Computer Vision, Graphics and Image Processing, 26, 217-223, 1984

/12/ Sibson, R : Localy Equingular Triangulations, Computer. Journal, 21, 243-245, 1977

/13/ Worboys, M.F. : GIS: A Computing Perspective, Taylor & Francis Ltd., 2000

/14/ Fang, T.F., Piegl, L. A. : Algorithm for Delaunay Triangulation and Convex-hull Computation Using a Sparse Matrix, Computer Aided Design, Vol 24, No 8, 425-426, 1992

/15/ Mc. Cullagh, M.J., Ross, C.G. : Delaunay Triangulation of a Random Data Set for Isarithmic Mapping, Vol. 17, No.2, pp.93-100, December, 1980

/16/ Macedonio, G, Pareschi, M.T : An Algorithm for The Triangulation of Arbitrarily Distributed Points: Applications to Volume Estimates and Terrain Fitting, Computers and Geosciences, Vol 17, No 7, 859-879, 1991