YERYUVARI GRAVİTE ALANININ GRACE UYDU VERİLERİNDEN BULANIK ÇIKARIM SİSTEMLERİ İLE MODELLENMESİ (MODELLING THE EARTH'S GRAVITY FIELD FROM GRACE SATELLITE DATA USING FUZZY INFERENCE SYSTEMS)

Tevfik AYAN, Orhan AKYILMAZ

İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi Jeodezi Ana Bilim Dalı, İstanbul email:ayan@itu.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada Bulanık Çıkarım Sistemleri jeodezinin en önemli problemlerinden olan yeryuvarı gravite alanı modeli belirlemede kullanılmıştır. Gravite alanı belirlemenin klasik yolu yeryuvarı için belirli bir derece ve mertebeye kadar küresel harmonik fonksiyon katsayılarının en küçük kareler (EKK) kestirimi ile belirlenmesine dayanır. Bu nedenle yersel, deniz ve uzay bazlı gravite anomali değerleri, lineerleştirilmiş denklem sisteminin gözlem büyüklükleri olarak alınır. Bu çalışmada gravite alanı modellemesi için sadece GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) uydu gravimetre verileri kullanılmıştır. GRACE bazlı ilk gravite alanı modeli olan GGM01S küresel harmonik katsayılarından türetilmiş gravite anomali değerleri bulanık sistemin veri kümesini oluşturmuştur. Uygulama sonucunda GRACE için öngörülen doğruluğa erişildiği görülmüş ve bulanık çıkarım sistemlerinin, özellikle girdi-çıktı sistemleri şeklinde tanımlanan jeodezik problemlerin çözümü için uygun yöntemler olduğu sonucuna varılmıştır.

ABSTRACT

In this study, fuzzy inference systems have been applied to the modeling of the Earth's gravity field, which is one of the most important tasks of geodetic science. The classical way for modeling the Earth's gravity field is based on the least squares (LS) estimation of the coefficients of the spherical harmonic function up to a certain degree and order. To this end, terrestrial, marine and space based gravity anomalies has been employed as observations of the linearised system of equation. In this study, GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) satellite gravimetry data has been used for gravity field modeling. The gravity field model GGM01S have formed the data set of the fuzzy system. The results have shown that the predefined accuracy for GRACE has been reached, and has approved that the fuzzy inference systems are convenient tools especially for geodetic problems which can be defined as input-output systems.

1. GİRİŞ

Jeodezinin en önemli çalışma konularından biri Yeryuvarı gravite alanının belirlenmesidir. Yeryuvarına ait gravite alanına ilişkin modellere sadece jeodezik çalışmalar için değil aynı zamanda jeofizik, oşinografi, uzay ve havacılık araştırmaları gibi diğer bilim dalları tarafından da gereksinim duyulmaktadır. Son on yılın ortalarına kadar gravite alanı modellemeleri için yersel gravimetre ile elde edilen veriler kullanılmakta idi. Bu nedenle yeryuvarının dörtte üçü olan okyanus kitlesi üzerinde herhangi bir gravite bilgisi bulunmadığından yeryuvarı için ortaya konan gravite modelleri de güvenilirliği düşük modeller olarak ortaya çıkmakta idi. Bunun yanısıra, homojen nitelikte olmayan ölçülerden global bir modelin parametrelerinin kestiriminde de normal denklem matrisinin kondüsyon düşüklüğü büyük bir problem olarak ortaya çıkmakta idi. Gelişen teknoloji ile birlikte, yeryuvarının gravite alanının belirlenmesi için çok değişik yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan en güncel olanı uydu gravimetresidir. Yeryuvarı gravite alanının belirlenmesi için günümüzdeki en gelişmiş uydu sistemi, Alman-Amerikan ortaklığı ile 17 Mart 2002'de fırlatılan ve 5 yıllık bir görev süresi olan GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) sistemidir. GRACE sisteminin ürünlerinden biri aylık olarak yeryuvarının 120 derece ve 120 mertebeye kadar olan küresel harmonik fonksiyon katsayıları cinsinden çekim potansiyelidir. Bu sistem ile belirlenen statik ve zamana bağlı yeryuvarı gravite alanı modeli, bugüne kadar görülmemiş yüksek ve homojen bir doğruluğa ulaşabilmektedir /4/.

Bulanık küme teorisi Zadeh /27/ tarafından klasik küme teorisinin bir genelleştirmesi olarak ortaya konulmuştur. Bu teori, ilk zamanlar bilimsel çevreler tarafından pek kabul görmese de özellikle 1970'li yıllardan itibaren birçok disiplin tarafından önemli bir araştırma konusu olmuş ve değişik uygulamalarda kullanılmıştır. Günümüzde bulanık mantık ve bulanık küme teorisi üzerine yazılmış çok sayıda kitap, basılmış çok sayıda teorik ve farklı disiplinlerin uvgulamalarına iliskin makaleler bulunmaktadır. Bulanık küme teorisinin temel farklılığı, klasik küme teorisinin aksine bir elemanın bir kümeye olan üyeliğinin ölçütü olarak 0 ile 1 aralığında değişen ondalık sayılar kullanılmasıdır. Buna üyelik derecesi adı verilir. Klasik küme teorisinde bir eleman bir kümenin ya elemanıdır ya da değildir. Yani üyelik derecesi, elemanı olma durumu için 1, elemanı olmama durumu için 0'dır. Bir diğer ifade ile, klasik mantıktaki "evet-hayır" ya da "doğru-yanlış" gibi kesin ifadelerin aksine bulanık mantıkta sınırları keskin olmayan esnek ifadeler kullanılır. Bulanık mantık kavramı çok yakın bir zaman önce ortaya atılmış olsa da tam olarak insan beyninin düşünme tarzını ortaya koymaktadır. Buna bir örnek olarak bir insanın otomobil kullanırken göstermiş olduğu davranışlar verilebilir. İnsanın otomobil kullanırken verdiği kararlar ve bu kararlar sonucunda yapmış olduğu eylemler bulanık mantık çerçevesinde gerçekleşmektedir. Bulanık küme teorisi ile veriler ve modellerdeki belirsizlikler gözönüne alınabilmekte, sadece savısal veriler ile değil, sözel veriler ile de modelleme vapmak mümkün olmaktadır. Süreclerin va da sistemlerin tanımlanmasında konuya ilişkin uzmanların bilgilerinin de modelin belirlenmesine katkıda bulunması sağlanmaktadır. Bulanık küme teorisinin en önemli getirilerinden biri de bulanık çıkarım sistemleri (BÇS)'dir. Bulanık çıkarım sistemleri, girdi ve çıktı değişkenleri arasındaki ilişkiyi, bulanık küme işlemleri yardımıyla tanımlamakta ve girdi-çıktı veri çiftlerinin mevcut olması durumunda matematiksel optimizasyon yöntemleri ile model parametrelerini en ivileyebilmektedir.

Bundan sonraki bölümlerde, yeryuvarı gravite alanına ilişkin temel bağıntılar ve GRACE sisteminin özellikleri, ölçme prensibi ve global küresel harmonik katsayıların belirlenmesi için temel gözlem büyüklükleri, ayrıca BÇS özetlenerek Türkiye ve çevresini kapsayan alandaki GRACE verilerinden türetilmiş gravite alanı için bulanık modeller türetilecektir.

2. YERYUVARININ ÇEKİM POTANSİYELİ VE GRAVİTE ALANI

Yeryuvarının çekim potansiyeli, standart olarak aşağıdaki şekilde küresel harmonik fonksiyonlar ile ifade edilmektedir /20,2/:

$$V(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \overline{P}_{nm}(\cos\theta) \left[\cos m\lambda \overline{C}_{nm}^{V} + \sin m\lambda \overline{S}_{nm}^{V}\right]$$
(1)

Burada G, yeryuvarı çekim sabiti, M, yeryuvarı kütlesi, R yeryuvarı ortalama yarıçapı, (r,θ,λ) ise Yer'in merkezine göre uzayda herhangi bir noktanın koordinatlarını göstermektedir. \overline{P}_{nm} , n-inci derece ve m-inci mertebeye kadar normalize edilmiş Legendre polinomu katsayıları \overline{C}_{nm}^{ν} ve \overline{S}_{nm}^{ν} ise n-inci derece ve m-inci mertebeden bilinmeyen küresel harmonik katsayılardır. Pratik olarak, bu küresel harmonik çekim potansiyeli, sonlu bir derece ve mertebeye kadar hesaplanmaktadır, (n = N_{maks}). Böylece, Eşitlik (1), küçük bir değişiklikle aşağıdaki şekli alır:

$$V(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{N_{maks}} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \overline{P}_{nm} \left(\cos\theta\right) \left[\cos m\lambda \overline{C}_{nm}^{V} + \sin m\lambda \overline{S}_{nm}^{V}\right]$$
(2)

Koordinat sisteminin başlangıcı yerin ağırlık merkezi alındığında birinci derece harmonikler, $\overline{C}_{1,0}^{\nu}$, $\overline{C}_{1,1}^{\nu}$ ve $\overline{S}_{1,1}^{\nu}$ ortadan kalkar /12/. GRS80 /18/ gibi (bilinen) bir referans alanının tanımlanmasıyla (toplam) potansiyel gözlemlerin yerine artık (bozucu) potansiyel gözlemleri ile işlem yapılması yaygınca kullanılan bir yöntemdir. GRS80, tanımlanan 4 temel sabit ile oluşturulmuştur; 1) Yer'in ekvatoral yarıçapı, 2) Yer'in jeosentrik çekim sabiti, GM^{GRS80}, 3) Yer'in basıklığı, 4) Yer'in açısal hızı. Bu parametrelere bağlı olarak, normal potansiyel U, aşağıdaki eşitlikle hesaplanır/10/:

$$U(r,\theta,\lambda) = \frac{GM^{GRS80}}{r} + \frac{GM^{GRS80}}{R} \sum_{\substack{n=2\\(\text{sadece } n \in \text{cift sayl})}}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \overline{P}_{n0}(\cos\theta) \cos m\lambda \overline{C}_{n0}^{GRS80}$$
(3)

Burada $\overline{C}_{nm}^{GRS80}$ (yalnız çift değerli n'ler için) yukarıda tanımlanan büyüklükler kullanılarak hesaplanmıştır. Çoğu durumda sadece ilk beş (n=2,4,6,8, ve 10) katsayı normal potansiyel U'nun yüksek doğrulukta hesaplanması için yeterlidir. Yer'in çekim potansiyeline büyük bir katkı bu normal potansiyelden gelmektedir. Böylece, bozucu potansiyel **T**, Eşitlik (4) ve (5) ile aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$T(r,\theta,\lambda) = V(r,\theta,\lambda) - U(r,\theta,\lambda)$$
(4)

$$T(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{N_{maks}} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \overline{P}_{nm}(\cos\theta) \left[\cos m\lambda \overline{C}_{nm} + \sin m\lambda \overline{S}_{nm}\right]$$
(5)

Burada, GM=GM^{GRS80}, \overline{C}_{nm} ve \overline{S}_{nm} katsayıları çift bölgesel katsayılar \overline{C}_{n0} (n = çift) haricinde \overline{C}_{nm}^{V} ve \overline{S}_{nm}^{V} katsayıları ile aynı katsayılardır. Çift bölgesel katsayılar için ise $\overline{C}_{nm} = \overline{C}_{nm}^{V} - \overline{C}_{nm}^{GRS80}$ dir. Katsayılar \overline{C}_{nm} ve \overline{S}_{nm} , lineer en küçük kareler yöntemi ile Eşitlik (5)'de verilen gözlem eşitliklerinden kestirilecek bilinmeyen parametrelerdir. Küresel harmonik yaklaşımda bir gravite anomalisi aşağıdaki eşitlikle belirlenir /12/:

$$\Delta g(r,\theta,\lambda) = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T(r,\theta,\lambda)$$

a. GRACE Uydu Sistemi

GRACE uyduları 5 yıllık bir görev süresi için 17 Mart 2002'de uzaya firlatılmıştır. Sistem, aynı dairesel yörünge üzerinde hareket eden, aralarındaki mesafe 220 ± 50 km olarak değişen, ortalama yörünge yüksekliği 485 km olan ve 89° eğim açısı ile global olarak yeryuvarını kaplayan iki adet birbirine eş özellikte uydudan oluşmaktadır /23,3,6/. GRACE'in bilimsel hedefleri arasında katı yeryüzü-atmosfer-okyanus-kriyosphere-hidrosfer sistemleri içerisinde kütle değişimleri ile ilişkili olarak iklim değişimi sinyallerinin yüksek doğruluklu ve çözünürlüklü olarak gravite alanı değişimleri cinsinden anlaşılması ve ortaya konmasıdır /25/. Yeryuvarı için yeni statik gravite alanına ek olarak zamana bağlı değişim gösteren gravite alanı da her 30 günde bir olmak üzere 5 yıl olan operasyon süresi boyunca elde edilebilecektir.

Uydular arası 10 µm presizyonlu, dual tek-yönlü K (24.5 GHz) ve Ka (32.7 GHz) bandı mikro dalga uzaklık ölçme sistemi /17/, 70 ps doğruluklu bir Ultra-Stabil Osilatör (USO), 4×10^{-12} m/s² presizyona sahip 3-eksenli super-STAR ivme ölçer /5,19/ ve çift-frekanslı 24 kanallı Blackjack tipi GPS alıcısı herbir ikiz uydunun donanımını oluşturmaktadır.

Alçak-alçak uydudan uyduya ölçmeler ve ivme ölçer verilerinin analizi için geleneksel bir metod uydu hareket ve hareket değişimi denklemlerinin sayısal olarak entegrasyonu ile jeopotansiyel katsayıların kestirilmesidir. Yörünge üzerindeki iki uydu arasındaki potansiyel farkı, enerjinin korunumu kanunu ilkesiyle uydular-arası uzaklık değişimi, konum, hız ve ivme verilerinden hesaplanabilinmektedir /15/. Hesaplanan potansiyel farkları sabit bir sınır üzerindeki, yani yörüngedeki sınır değerler olarak ele alınır. Enerjinin korunumu kanunun uygulaması yakın bir zaman önce CHAMP verisi analizi ile başarılı bir şekilde yapılmıştır /7, 9,22/.

GRACE uydu sisteminde gravite alanı modellemesi için yörünge üzerinde (in situ) üç türlü gözlem eşitliği kullanılır. Bunlar, uydular arası baz ölçüleri, yörünge üzeri potansiyel gözlemleri ve de yörünge üzeri potansiyel farkı gözlemleridir. Bunları ayrı ayrı ele almakta yarar vardır.

(1) Uydular Arası Baz Ölçüleri

GRACE sistemi yaklaşık aynı yörünge üzerinde birbirini izleyecek şekilde hareket eden iki eş uydu arasındaki uzaklıkların çok yüksek presizyonlu olarak ölçülmesini sağlayan bir donanıma sahiptir. İki uydunun konum vektörleri, x_1 ve x_2 , ile uydular arası uzaklık (ya da dinamik baz) ρ_{12} , aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\rho_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1)} = x_{12} \cdot \mathbf{e}_{12}$$
(7)

Burada $\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, \mathbf{e}_{12} ise birinci uydudan ikinci uyduyu gösteren uzaysal doğru üzerindeki birim vektördür. Çok yüksek presizyonlu uzaklık belirleme amacıyla her iki GRACE uydusu da K ve Ka bandında çift frekanslı mikrodalgalar gönderir ve alırlar. Çift frekans kullanılması

ile birinci derece frekansa-bağlı iyonosferik gecikmeler büyük ölçüde ortadan kaldırılır. Uzaklık ölçülerinin diferansiyeli alınarak uzaklık değişimi aşağıdaki şekilde elde edilir /11/.

$$\dot{\rho}_{12} = \dot{x}_{12} \cdot \mathbf{e}_{12} \tag{8}$$

İşlenmiş GRACE uzaklık değişimi verilerinin 5 saniyelik aralıklarla ve 0.1 µm/s doğrulukla (K.O.H) elde edilmesi beklenmektedir /17/. Bu tip bir yörünge üzeri baz ölçmeleri, yörünge altındaki jeofiziksel su kitlesi dağılımı değişimlerine oldukça duyarlıdır ve Yer'in global (statik ve değişken) gravite alanının belirlenmesi için çözülmesi gereken temel bir büyüklüktür /10/.

(2) Yörünge Üzeri Potansiyel Gözlemleri

 \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ ve \mathbf{F} inersiyal sistemde sırasıyla konum vektörü, hız vektörü ve ivme ölçer tarafından ölçülen tüm korunumsuz kuvvetleri de içeren net kuvvet vektörü olmak üzere Jekeli /15/, Yer'in çekim potansiyeli V_E ile \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ ve \mathbf{F} 'nin arasında ilişki için aşağıdaki yüksek doğruluklu modeli ortaya koymuştur.

$$V_{E} \approx \frac{1}{2} \left| \dot{x}^{i} \right|^{2} - \omega_{e} \left(x_{1}^{i} \dot{x}_{2}^{i} - x_{2}^{i} \dot{x}_{1}^{i} \right) - \int F \cdot \dot{x}^{i} dt - V_{T} - V_{0}$$
(9)

Burada $x^i = \begin{bmatrix} x_1^i & x_2^i & x_3^i \end{bmatrix}^T$, $\dot{x}^i = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^i & \dot{x}_2^i & \dot{x}_3^i \end{bmatrix}$ ve üst indis *i* inersiyal ağı ifade etmektedir. Harmonik jeopotansiyel katsayılar global olarak dağılmış V_E gözlemlerinden belirlenebilir. (9)'da, eşitliğin sağındaki ilk terim uydunun birim kütlesinin kendi inersiyal hızından kaynaklanan kinetik enerjisini göstermektedir. İkinci terim inersiyal ağda Yer'in dönmesinden kaynaklanan dönme potansiyelidir. Üçüncü terim atmosferik sürtünme, solar radyasyon basıncı, termal kuvvetler ve diğer korunumsuz kuvvetlere bağlı olarak dağılan enerjiyi göstermektedir. V_T terimi çekim potansiyelinin, N-kitle etkisi, okyanus gelgitleri, atmosfer, yeraltı suları gibi etkileri içeren zamansal değişimini ifade etmektedir. Son terim ise çekim potansiyelinin sabit sıfırıncı-derece harmoniklerini içeren sistemin enerji sabitidir. Bu tür gözlemler CHAMP, GRACE gibi uydulardan elde edilebileceği gibi **F'**nin presizyonlu olarak belirlenebilmesi koşuluyla GPS ile izlenen herhangi diğer Yer uydu sistemlerinden de elde edilebilir.

(3) Yörünge Üzeri Potansiyel Farkı Gözlemleri

Burada yörünge üzerinde söz konusu gözlem iki alçak yörünge uyduları arasındaki potansiyel farkıdır ve sadece GRACE sistemi için böyle bir gözlem büyüklüğü türetilebilir. Bu potansiyel farkı inersiyal ağda uydular arası uzaklık değişimleri, hız vektörleri ve konum vektörlerinden hesaplanabilir. Aşağıdaki yaklaşık model /26,21,14/ tarafından geliştirilmiş ve kullanılmıştır:

$$V_{12} = V_2 - V_1 \approx \left| \dot{x}_1^i \right| \dot{\rho}_{12} \tag{10}$$

İki uydu arasındaki çekim potansiyeli V_{12} ile uydular arası uzaklık değişimleri arasındaki ilişkiyi gösteren bu model GRACE sistemindeki donanımın kapasitesinin avantajlarının tam anlamıyla kullanılması için uygun değildir. Spesifik olarak, bu model ± 1 m²/s² mertebesinde anlamlı etkiye sahip olan Yer'in dönmesinden kaynaklanan potansiyeli gözönüne

almamaktadır. Daha sağlam bir model, enerjinin korunumu kanunu göz önüne alınarak Jekeli /15/ tarafından ortaya konmuştur. /15/ modelindeki hatalar düzeltilerek, Han /10/ dağılan enerji teriminin ivme ölçer ile çekimsel olmayan ivmelerin ölçülmesi sonucu belirlendiği kabulu ile bozucu potansiyel T_{12} cinsinden aşağıdaki eşitliği ortaya koymuştur.

$$T_{12} = \left| \dot{x}_1^0 \right| \delta \dot{\rho}_{12} + \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \upsilon_4 + \delta V R_{12} - \int (F_2 \cdot \dot{x}_2 - F_1 \cdot \dot{x}_1) dt - \delta V_T - \delta V_0$$
(11)

Burada,

$$\upsilon_{1} = (\dot{x}_{2}^{0} - |\dot{x}_{1}^{0}|\mathbf{e}_{12}) \cdot \delta\ddot{x}_{12}, \qquad \upsilon_{2} = (\delta\ddot{x}_{1} - |\dot{x}_{1}^{0}|\delta\mathbf{e}_{12}) \cdot x_{12}^{0}, \qquad \upsilon_{3} = \delta\ddot{x}_{1} \cdot \delta\ddot{x}_{12}, \qquad \upsilon_{4} = (1/2)|\delta\ddot{x}_{12}|^{2} \\
\delta V R_{12} = \omega_{e} \left\{ (x_{1}\dot{x}_{2} - x_{2}\dot{x}_{1})|_{2} - (x_{1}\dot{x}_{2} - x_{2}\dot{x}_{1})|_{1} - (x_{1}^{0}\dot{x}_{2}^{0} - x_{2}^{0}\dot{x}_{1}^{0})|_{2} + (x_{1}^{0}\dot{x}_{2}^{0} - x_{2}^{0}\dot{x}_{1}^{0})|_{1} \right\}$$

dır. Gösterimi basitleştirmek için inersiyal ağı ifade eden üst indis *i* eşitliklerden çıkarılmıştır. Üst indis 0, bilinen bir referans alanına göre büyüklükleri gösterirken, δ gerçek alan ile referans alanı arasındaki artık büyüklükleri ifade etmektedir. (11) eşitliğinin sağ tarafındaki altıncı terim iki uydunun her iki alandaki hız ve konumlarının lineer kombinasyonlarından hesaplanabilen, iki uydu arasındaki potansiyel dönme farkıdır. Yedinci terim iki uydu arasındaki dağılan enerji farkını ifade etmektedir. Uydulara etki eden tüm korunumsuz kuvvetleri belirlemeye yarayan uydu üzerine yerleştirilmiş olan ivme ölçer ölçüleri bu terimin hesaplanması için kullanılabilir. Sekizinci ve son terimler ise sırasıyla çekim potansiyelinin artık zamansal değişimi ve de sistemin artık enerji sabitini göstermektedir. Bu model iki uydu arasındaki yüksek doğruluklu potansiyel farkının yüksek presizyonlu uzaklık ölçme ve GPS ölçmeleri ile belirlenen uydular arası uzaklık değişimi, konum ve hız vektörleri ile elde edilebileceğini göstermektedir /1/.

b. GRACE Verilerinden Küresel Harmonik katsayıların Hesaplanması

GRACE ikiz uydularının yaklaşık aynı yörünge üzerinde hareket etmesinden dolayı yörünge hataları birbirleri ile yüksek derecede korelasyonludur. Yörünge hatalarından kaynaklanan hatalar, iki uydu arasındaki potansiyel farkları ile elimine edilmiş olur. Yörünge üzerinde, iki uydu arasındaki potansiyel farkı gözlemi küresel harmonik fonksiyon serilerine açılabilir. Uydu yörüngeleri sabit tutularak, gözlemler ile bilinmeyen jeopotansiyel katsayılar arasındaki lineer ilişki aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$T_{12}(r_{1},\theta_{1},\lambda_{1},r_{2},\theta_{2},\lambda_{2}) = T_{1}(r_{1},\theta_{1},\lambda_{1}) - T_{2}(r_{2},\theta_{2},\lambda_{2})$$

$$= \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left\{ \left\{ \left(\frac{R}{r_{1}}\right)^{n+1} \overline{P}_{nm}(\cos\theta_{1})\cos m\lambda_{1} - \left(\frac{R}{r_{2}}\right)^{n+1} \overline{P}_{nm}(\cos\theta_{2})\cos m\lambda_{2} \right\} \overline{C}_{nm} + \left\{ \left\{ \left(\frac{R}{r_{1}}\right)^{n+1} \overline{P}_{nm}(\cos\theta_{1})\sin m\lambda_{1} - \left(\frac{R}{r_{2}}\right)^{n+1} \overline{P}_{nm}(\cos\theta_{2})\sin m\lambda_{2} \right\} \overline{S}_{nm} \right\}$$

$$(12)$$

Burada $(r_1, \theta_1, \lambda_1)$ ve $(r_2, \theta_2, \lambda_2)$ sırasıyla birinci ve ikinci GRACE uydusunun koordinatlarıdır. (12)'de toplam işlemlerinin sıraları değiştirilip $U_0 = GM/R$, $Y_{nm}^c(r_i, \theta_i, \lambda_i) = \overline{P}_{nm}(\cos \theta_i) \cos m\lambda_i$, $Y_{nm}^s(r_i, \theta_i, \lambda_i) = \overline{P}_{nm}(\cos \theta_i) \sin m\lambda_i$ (i = 1 veya 2) kısaltmaları yapılarak eşitlik sonlu bir derece ve mertebede kesilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$T_{12}(r_{1},\theta_{1},\lambda_{1},r_{2},\theta_{2},\lambda_{2}) = U_{0}\sum_{m=0}^{N_{maks}N_{maks}} \left\{ \begin{cases} \left(\frac{R}{r_{1}}\right)^{n+1}Y_{nm}^{c}(r_{1},\theta_{1},\lambda_{1}) - \left(\frac{R}{r_{2}}\right)^{n+1}Y_{nm}^{c}(r_{2},\theta_{2},\lambda_{2}) \\ \left\{ \left(\frac{R}{r_{1}}\right)^{n+1}Y_{nm}^{s}(r_{1},\theta_{1},\lambda_{1}) - \left(\frac{R}{r_{2}}\right)^{n+1}Y_{nm}^{s}(r_{2},\theta_{2},\lambda_{2}) \\ \left\{ \left(\frac{R}{r_{1}}\right)^{n+1}Y_{nm}^{s}(r_{1},\theta_{1},\lambda_{1}) - \left(\frac{R}{r_{2}}\right)^{n+1}Y_{nm}^{s}(r_{2},\theta_{2},\lambda_{2}) \\ \right\} \end{cases}$$
(13)

Gözlem büyüklüğü T₁₂, uyduların yörünge eğrisi üzerinde eşit zaman aralıklarına bölünmüş olarak elde edilir. Böylece eşitlik (13)'te bilinmeyen vektörü jeopotansiyel katsayılar Gauss Markof modeli dengeleme ile belirlenir. Bilinmeyen vektörü, $x = \begin{bmatrix} x^0 & x^1 & \cdots & x^{N_{maks}} \end{bmatrix}^T$, herbir mertebeye ait jeopotansiyel katsayılar vektörleri,

$$x^{m} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{m,m} & \overline{C}_{m+1,m} & \cdots & \overline{C}_{N_{maks},m} & \overline{S}_{m,m} & \overline{S}_{m+1,m} & \cdots & \overline{S}_{N_{maks},m} \end{bmatrix}^{T}$$

nin birleşimidir. Bilinmeyenler, normal denklemlerin doğrudan çözümü ile elde edilebildiği gibi eşleştirmeli gradyan yöntemi gibi iteratif ve daha kısa zamanda çözüme ulaşılan yöntemlerle de elde edilebilmektedir /11/.

3. BULANIK KÜMELER VE BULANIK ÇIKARIM SİSTEMLERİ

a. Bulanık Küme Teorisi

~

Bulanık mantıkta, elemanlar bulanık kümelerdeki üyelik dereceleri ile ifade edilir. x, X bulanık değişken uzayında tanımlı bir eleman ve bu x elemanının X değişken uzayında tanımlı bir A bulanık kümesindeki üyelik derecesi $\mu_A(x)$ olmak üzere, A bulanık kümesi,

$$A: \{(x, \mu_A(x)); x \in X)\}$$
(14)

şeklinde gösterilir /27/. A kümesine ait her bir eleman için $\mu_A(x)$, 0 ile 1 arasında pozitif değerler alır /28/. Bir bulanık küme A, x elemanlarının bu kümeye ait üyelik derecelerini veren μ_x üyelik fonksiyonları ile tanımlanır. Buna klasik bir örnek olarak "uzun boylu insanlar" kümesi verilebilir. Bir insanın boy ölçüsü o insanın kısa ya da uzun olduğunu gösterir, fakat kısa ve uzun boylu insanlar kümesi arasındaki sınır keskin çizgilerle herhangi bir değer ile çizilemez. Bulanık kümeler, modeli oluşturan kümelerin açık bir şekilde tanımlanamadığı durumlarda sistem modellerinin kurulmasına olanak sağlar. Bulanık kümelerin bir diğer önemli özelliği de sadece sayısal veriler ile değil aynı zamanda sözel değişkenler ile de işlem yapılabilmesine olanak sağlamasıdır. Bu, özellikle ileride de bahsedilecek olan bulanık çıkarım ve bulanık kural tabanının oluşturulmasında uzman görüşlerinin modelin belirlenmesine katkısını sağlamaktadır. Klasik ve bulanık kümeler arasındaki farkı anlatmak amacıyla Şekil-1'de sıcaklık değişkeni her iki küme teorisine uygun olarak gösterilmiştir. Şekil-1'de sadece üçgen ve trapez formu üyelik fonksiyonları gösterilmiş olsa da Gauss, Çan eğrisi vb. gibi değişik türde üyelik fonksiyonları da mevcuttur. Bulanık kümeler arasında da klasik kümelerde olduğu gibi küme işlemleri yapılır. Tablo-1'de söz konusu bulanık küme işlemleri, mantıksal anlamı ve matematiksel karşılıkları ile verilmiştir. Bulanık kesişim ve birleşim işlemleri için klasik kümelerden farklı olarak çok sayıda değişik işlem kullanılmaktadır. Burada tanımlana VE, VEYA, DEĞİL gibi bağlaçlar ile ilişkili olan küme işlemleri bulanık çıkarım sistemlerinin temelini oluşturmaktadır. Böylece, sözel ifadeler şeklinde tanımlanan kurallardan oluşan bir bütünleşik yapı ile modelleme yapılabilmektedir.



Şekil-1: Klasik (solda) ve bulanık (sağda) kümeler ile sıcaklık değişkeni

İşlem	Mantıksal Anlamı	Sembolik Gösterim	Matematiksel Karşılık
Kesişim	VE	$\mu_{A\cap B}(x)$	Sert: $\min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \forall x \in X$ Yumuşak: $\mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \forall x \in X$
Birleşim	VEYA	$\mu_{A\cup B}(x)$	Sert: maks $(\mu_A(x), \mu_B(x)) \forall x \in X$ Yumuşak: $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \forall x \in X$
Tümleyen	DEĞİL	$\mu^{c}_{A}(x)$	$1 - \mu_A(x) \ \forall x \in X$

Tablo-1: Bulanık kümeler ile küme işlemleri /28/.

b. Bulanık Çıkarım Sistemleri

Bulanık sistemler, genel anlamda, giriş değişkenlerinden çıkış değişkenlerine dönüşümü sağlamak amacıyla bulanık kümeleri kullanan sistemlerdir. Bu sistemler, özellikle insan deneyimlerinin ve sözel verilerin modele katılmasında büyük yarar sağlamaktadırlar. Bulanık çıkarım sistemleri, bulanık eğer-ise kuralları adı verilen bulanık kurallara dayanan sistemlerdir. Bu nedenle bulanık çıkarım sistemleri, bulanık kural tabanlı sistemler olarak da adlandırılır. Bazı kaynaklarda bulanık çıkarım sistemleri yerine bulanık model, bulanık çağrışımlı bellek, bulanık mantık kontrolör /13/ terimleri de kullanılmaktadır.

Bulanık çıkarım sistemlerinin temeli olan bulanık eğer-ise kuralları, anlaşılacağı üzere öncül ve soncul kısımlardan oluşmaktadır. Öncül kısımda sonuca sebep olan giriş değişkenleri ve bunlar arasındaki mantıksal ilişkiler, soncul kısımda ise bu giriş değişkenlerine bağlı olarak ortaya çıkan sonuç değişken(ler)i yer alır. Genel olarak bir bulanık kural aşağıdaki formdadır: Kural: eğer A ("koşul") ise B ("sonuç")

Burada A öncül kısımdaki girdi değişkenlerince tanımlanan koşulları B ise soncul kısımdaki çıktı değişkenlerince tanımlanan sonuçları ifade eder. Bulanık sistemler genellikle girdi bölümlerinde 1'den fazla sayıda değişkenler içerirler. Şekil 2'de X ve Y gibi iki girdi değişkeni ve Z gibi bir çıktı değişkeni olan ve iki bulanık eğer-ise kuralından oluşan bulanık çıkarım sistemleri görülmektedir. Şekilden de anlaşılacağı gibi, değişik tipteki çıkarım sistemlerindeki temel farklılık soncul kısımda çıktı değişkenini tanımlayan üyelik fonksiyonlarının yapılarındaki farklılıklardır. Bulanık çıkarım sistemlerinin parametreleri öncül ve soncul kısımdaki üyelik fonksiyonlarını tanımlayan parametrelerdir. Örneğin; Çan eğrisi tipi bir bulanık kümenin parametreleri, kümeyi tanımlayan,

$$\boldsymbol{\mu}_{A_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_i}{\boldsymbol{a}_i} \right)^2 \right]^{b_i}}$$
(15)

fonksiyonunun parametreleri olan a_i, b_i, c_i dir. Üçüncü tip bulanık çıkarım sisteminde soncul kısım girdi değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonudur ve değişken parametreleri p_i, q_i, r_i dir (bkz. Şekil 2). Bu tip çıkarım sistemine Sugeno tipi çıkarım sistemi de denir ve parametrelerin güncellenmesi gerektiği durumlarda kullanışlı olan sistemlerdir /1/. Parametreleri optimizasyon yöntemleri ile güncellenen Sugeno tipi bulanık çıkarım sistemlerine *Adaptif Ağ Tabanlı Çıkarım Sistemleri* (ANFIS) denir. Bulanık çıkarım sistemleri ve ANFIS ile ilgili detaylı bilgi için bkz. /13/.



z (sentroid)

Şekil-2: Bulanık çıkarım sistemleri türleri

4. BULANIK ÇIKARIM SİSTEMLERİ İLE GRAVİTE ALANI MODELİ

a. Çalışma Bölgesi ve Kullanılan Veri

Bu uygulamada 111 gün boyunca GRACE uydularından toplanan veriler ile 120 derece ve mertebeye kadar hesaplanmış jeopotansiyel katsayılardan jeoit yüzeyinde hesaplanmış gravite anomali değerleri kullanılmıştır. Çalışma alanı olarak 31.5°-45° enlemleri ve 22.5°-42° boylamları arasında kalan Turkiye'nin büyük bölümü ile komşu ülkeleri, Karadeniz, Ege ve Akdeniz'in batısını kapsayan bölge seçilmiştir. n=120 için en yüksek çözünürlük yarı dalga boyu yaklaşık 165 km, diğer bir deyiş ile 1.5° yay derecesidir. söz konusu bölge için 1.5°× 1.5° grid aralıklı homojen olarak dağılmış geoid yüzeyine indirgenmiş 140 adet gravite anomali değerleri kullanılmıştır (Şekil 3). Noktaların yarısı (Şekil 3'te kare şeklinde olan noktalar) modelin eğitiminde diğer yarısı (Şekil 3'te daire şeklindeki noktalar) da testinde kullanılmıştır.



Şekil-3: Çalışma alanı ve nokta dağılımı

b. Eğitim Öncesi Verilerin Düzenlenmesi ve Paternlerin Oluşturulması

Söz konusu bölgeye ait 140 adet gravite anomali değerleri yarısı eğitimde diğer yarısı ise modelin gerçeklenmesinde kullanılmak üzere ikiye ayrılmıştır. Bu ayrım yapılırken herbir noktanın komşu noktalardan farklı bir grup (eğitim ya da test) içerisinde yer alması göz önünde bulundurulmuştur (Şekil 3). Bu noktalara ait gravite anomalileri ve coğrafi koordinatları yanında yaklaşık jeoit yükseklikleri de mevcut veriler arasındadır. Modeller için girdi değişkenleri olarak enlem, boylam ve yaklaşık geoid yükseklikleri, çıktı değişkeni olarak ise söz konusu noktalardaki gravite anomalileri alınmıştır.

c. Oluşturulan Bulanık Gravite Alanı Modelleri

Söz konusu bölge için birbirine yakın sonuçlar veren iki farklı ANFIS yapısı elde edilmiştir. Her iki modelde de, daha önce bahsedildiği gibi girdi değişkenleri olarak noktalara ait enlem, boylam ve yaklaşık jeoit yükseklik değerleri kullanılmıştır. Birinci modelde enlem değişkeni için iki, boylam değişkeni için üç ve geoid yüksekliği değişkeni için bir adet Gauss üyelik fonksiyonu kullanılmıştır. İkinci modelde ise enlem ve boylam değişkenleri için üç, jeoit yüksekliği değişkeni için yine bir adet Gauss üyelik fonksiyonu kullanılmıştır. Her iki modelin eğitilmesinde de hibrid öğrenme algoritması /13/ kullanılmış, iterasyonlar her iki

eğitim ve test veri kümeleri için karesel ortalama hata minimum oluncaya kadar sürdürülmüştür. Her iki modele ilişkin bazı doğruluk ölçütleri Tablo-2'de verilmiştir. Şekil-4'te, mgal biriminde, 2-3-1 ANFIS modeliyle belirlenen gravite alanı ve Şekil-5'te bu modelden elde edilen hataların bölge içerisindeki dağılımı gösterilmektedir. Şekil-6'da, yine mgal biriminde, 3-3-1 ANFIS modeliyle belirlenen gravite alanı ve Şekil-7'de bu modelden elde edilen hataların bölge içerisindeki dağılımı gösterilmektedir.

Yöntem	Min. Hata [mgal]	Maks. Hata [mgal]	Ort. Hata [mgal]	Ort. Mutlak. Hata [mgal]	Standart Sapma [mgal]	Korelasyon Katsayısı
ANFIS Model 2-3-1 70 eğitim noktası 70 test noktası 140 (tüm) noktalar	-18.40 -22.61 -22.61	15.13 22.53 22.53	0.00 -0.19 -0.10	6.74 6.32 6.53	7.86 8.35 8.08	0.98656 0.98298 0.98484
ANFIS Model 3-3-1 70 eğitim noktası 70 test noktası 140 (tüm) noktalar	-6.41 -10.32 -10.32	9.43 27.20 27.20	0.00 0.59 0.29	2.92 4.79 3.85	3.54 6.72 5.36	0.99729 0.98918 0.99341

Tablo-2: ANFIS model sonuçlarına ilişkin doğruluk ölçütleri /1 /.



Şekil-4: 2-3-1 konfigürasyonlu ANFIS modeli ile gravite alanı. (Birim mgal).



Şekil-5: 2-3-1 ANFIS modeli gravite alanı model hataları. (Birim mgal).



Şekil-6: 3-3-1 konfigürasyonlu ANFIS modeli ile gravite alanı. (Birim mgal).

Her iki modelin parametre sayılarına bakılırsa, 2-3-1 ANFIS modelinde $6\times 2 = 12$ doğrusal olmayan ve $6\times 4 = 24$ doğrusal parametre olmak üzere toplam 36 parametreden oluşan bir modeldir. Diğer 3-3-1 ANFIS modeli, $7\times 2 = 14$ doğrusal olmayan ve $9\times 4 = 36$ adet doğrusal parametre olmak üzere toplam 50 parametreden oluşmaktadır. Ayrıca her iki modelin çıktı üyelik fonksiyonları olarak girdi değişkenlerinin doğrusal fonksiyonları kullanılmıştır.



Şekil-7: 3-3-1 ANFIS modeli gravite alanı model hataları. (Birim mgal)

5. SONUÇLAR

Her iki 2-3-1 ve 3-3-1 üyelik fonksiyonu yapısına sahip ANFIS modelleri birbirine yakın sonuçlar vermektedir. Bu sonuçlar, ayrıca Gruber /8/ tarafından verilen garvite alanı modeli doğruluğuyla da uyuşmaktadır. Verilen bu doğruluk ile ANFIS modellerinden elde edilen doğruluklar arasındaki küçük farkların oluşmasının nedeni söz konusu noktalar için verilen gravite anomali değerlerinin tam olarak o noktalarda gözlenmiş anomali değerleri olmaması, diğer bir deyişle küresel harmoniklerle hesaplanan global modeldeki yarı uzun dalga boyu değerleri olmasıdır. Böylelikle, bu noktalardaki gravite anomali doğruluklarına global modelden ek bir gürültü değeri gelmektedir. ANFIS modelleri ile daha vüksek bir doğruluk elde edilebilmesi için yersel gravite verilerinin de uydu gravite verileri birlikte modelin belirlenmesinde kullanılması gerekir. Diğer taraftan, global modelden belirlenmiş söz konusu yarı uzun dalga boyu gravite anomalileri (120. derece küresel harmonikler için tam dalga boyu 3° dir) yerine yörünge üzerinde hesaplanan gravite gradyanlarının asağıya devamı ya da projeksiyonunun (downward continuation) hesaplanarak bunların bileşkesi olan gravite anomali değerlerinin kullanılmasıdır /16,24/. Yakın gelecekte Avrupa Uzay Ajansı tarafından uzaya fırlatılacak olan GOCE gradiometre uydusundan elde edilen veriler ile bu mümkün olacaktır.

Bu çalışmada bulanık çıkarım sistemlerinin jeodezik problemlerden gravite alanı modelleme problemine uygulanabilirliği sayısal örneklerle ortaya konmuştur. Bu yöntemlerin, özellikle girdi-çıktı sistemleri şeklinde ifade edilebilen problemlerin çözümü için uygun yöntemler olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

/1/	Akyılmaz, O.,	:	Esnek Hesaplama Yöntemlerinin Jeodezide Uygulamaları, <i>Doktora Tezi,</i> İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Nisan, 2005.
/2/	Ayan, T., Deniz, R.,	:	Fiziksel Jeodezi, Ders Notu. İTÜ, Jeodezi Anabilim Dalı, İstanbul., 2002.
/3/	Bettadpur, S., Watkins, M.,	:	GRACE Gravity Science and its Impact on Mission Design, <i>Spring AGU Meeting</i> , Washington DC, USA, May 30-June 3, 2000.
/4/	CSR	•	GRACE Gravity Model 01 (GGM01), www.csr.utexas.edu/grace, 2003.
/5/	Davis, E., Dunn, C., Stanton, R., Thomas, J.,	:	The GRACE Mission: meeting the technical challenges, <i>The 50th International Astronautical Congress</i> , October 4-8, 1999.
/6/	GRACE Science Mission Requirement Document	:	GRACE 327-720, June, 2000.
/7/	Gerlach, C., Sneeuw, N., Visser, P., Svehla, D.,	:	CHAMP Gravity Field Recovery With The Energy Balance Approach: first results, <i>Proceedings of Firts</i> <i>CHAMP International Science Meeting</i> , <i>Potsdam</i> , <i>January</i> , 2002.
/8/	Gruber, T.,	:	Gravity Field Models beyond CHAMP, GRACE and GOCE: A synergetic view of global gravity field computation, <i>Proceedings of Heiskanen Symposium in Geodesy, Celebrating 50 years of Geodetic Science at the Ohio State University,</i> Columbus, Ohio, 2002.
/9/	Han, SC., Jekeli, C., Shum, C.K.,	:	Efficient Gravity Field Recovery Using <i>İn Situ</i> Disturbing Potential Observations from CHAMP, <i>Geophys. Res. Lett.</i> , 29(16), 10.1029/2002GL015180, 2002.
/10/	Han, SC.,	:	Efficient Global Gravity Determination from Satellite- to-satellite Tracking (SST), <i>PhD. Thesis</i> , The Ohio State University, Columbus, OH, 2003.
/11/	Han, SC.,	:	Efficient Determination of Global Gravity Field from Satellite-to-satellite Tracking Mission, <i>Celestial</i> <i>Mechanics and Dynamical Astronomy</i> , 88, 69-102, 2004.
/12/	Heiskanen, W., Moritz, M	:	Physical Geodesy. Freeman, San Francisco, 1967.

3/	Jang, JS.R., Sun, CT., Mizutani, E.,	:	Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence. 1 st Edition, Prentice Hall, 1997.
/14/	Jekeli, C., Rapp, R.,	:	Accuracy of the Determination of Mean Anomalies and Mean Geoid Undulations from a Satellite Gravity Mapping Mission, <i>Technical Report</i> , 307, Dept. Of Geod. Sci., Ohio State University, Columbus, OH, 1980.
/15/	Jekeli, C.,	:	The Determination of Gravitational Potential Differences from satellite-to-satellite Tracking, <i>Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy</i> , 75, 85-101, 1999.
/16/	Kaula, W.M.,	:	Theory of Satellite Geodesy. Blaisdell Publishing Co., 1966.
/17/	Kim, J., Roesset, P., Bettadpur, S., Tapley, B., Watkins, M.,	:	Error Analysis of the Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE), M. Sideris (ed.), <i>IAG Symposium Series</i> , 123: 103-108, Springer, Berlin, 2001.
/18/	Moritz, H.	:	Geodetic Reference System 1980, Bull. Géod. 66(2), 187-192, 1992.
/19/	Perret, A., Biancale, R., Camus, A., Lemoine, J., Fayard, T., Loyer, S., Perosanz, F., Sarrailh,M	:	CHAMP Mission: STAR Commissioning Phase Calibration/Validation Activities by CNES, 1 and 2, CNES, Toulouse, May, 2001.
/20/	Rapp, R.H.,	:	Global Geopotential Solutions, <i>Lecture Notes in Earth Sciences: Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy</i> , pp. 365-415, Eds. Sünkel H., Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.
/21/	Rummel, R.,	:	Geoid Heights, Geoid Height Differences, and Mean Gravity Anomalies from Low-low Satellite-to-satellite Tracking – an error analysis, <i>Technical Report</i> , 306, Dept. Of Geod. Sci., Ohio State University, Columbus, OH, 1980.
/22/	Sneeuw, N., Gerlach, C., Svehla, D., Gruber, C.,	:	A First Attempt at Time-variable Gravity Recovery from CHAMP Using The Energy Balance Approach, IN Tziavos (ed.), <i>Proceedings of The Third Meeting of the</i> <i>International Gravity and Geoid Commission</i> , <i>Thessaloniki</i> , <i>Greece</i> , <i>August 2002</i> , 237-242, 2002.
/23/	Thomas, J.,	:	An Analysis of Gravity Field Estimation Based on Intersatellite Dual One-way Biased Ranging, <i>JPL</i> <i>Publication</i> , 98-15: 3-13, 1999.

/24/	Tóth, G., Földváry, L., Tziavos, I., Ádam, J.,	:	Upward / downward continuation of gravity gradients for precise geoid determination 2 nd Int. <i>GOCE USER</i> <i>Workshop</i> , http://earth.esrin.esa.it/workshops/goce04/ participants/152/paper_Toth_v2.pdf.
/25/	Wahr, J., Molenaar, M., Bryan, F.,	:	Time Variability of the Earth's Gravity Field: hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE, <i>J. of Geophy. Res.</i> , 103, 30205-30229, 1998.
/26/	Wolff, M.,	:	Direct Determination of Gravitational Harmonics from Low-low GRAVSAT Data, J. Geophy. Res., 88, 10309- 10321, 1969.
/27/	Zadeh, L.A.	:	Fuzzy Sets, Information and Control, 8(3): 338-353, 1965
/28/	Zimmermann, HJ.,	:	Fuzzy Technologien. VDI Verlag Düsseldorf, 1993.