YER MERKEZLİ ÜÇ BOYUTLU JEODEZİK AĞLARDA DATUM SORUNU

Haluk KONAK

ÖZET

Jeodezik ağlar, günümüzde, ölçülerin serbestlik ölçütlerini (redundanz paylarını) yeterli duruma getirmek ve GPS ölçüleri ile yersel gözlemlerin birbirlerini karşılıklı kontrol etmelerini sağlamak amacıyla, geometrik anlamda bütünleşik jeodezik ağlar olarak ölçülmekte ve yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sistemlerinde değerlendirilmektedir. Bu yazıda, söz konuşu jeodezik ağların değerlendirilmesi aşamasında ortaya çıkan datum sorunu irdelenmekte ve uygulanabilir çözüm önerileri sunulmaktadır.

ABSTRACT

Nowadays, geodetic networks are measured as integrated geodetic networks to enable sufficient redundancy of observations and to control GPS and terrestrial observations against each other and evaluated in geocentric 3 D coordinate systems. in this paper, the datum problem which appears in the process of evaluating geodetic networks is discussed and presented suggestions for appiicable solution.

l. GİRİŞ

Gözlemlerin yapıldığı *Yerel Astronomik Sistem* ile *Yer Merkezli Üç Boyutlu Dik Koordinat Sistemi (Ortalama Yersel Sistem)* arasındaki dönüşüm üç boyutlu jeodezinin temelini oluşturmaktadır. Yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sistemi ideal bir dünya jeodezik sistemidir. Bu koordinat sisteminde her bir noktanın yer merkezli üç boyutlu dik koordinatları ile bu noktalara ilişkin astronomik enlem ve boylamlar da belirlenebilmektedir. Bu amaçla yapılan yatay doğrultu, düşey açı, astronomik azimut, astronomik enlem ve boylam ile eğik uzunluk gözlemleri herhangi bir referans yüzeyine indirgenmeksizin kullanılabilmektedir. Nivelmanla ölçülen yükseklik farklarının değerlendirilebilmesi için jeoid yüksekliklerinin başka bir kaynaktan elde edilmesi gerekir. Bundan başka; ayrı bir yer merkezli dünya jeodezik sisteminde tanı dengelemesi işlemleriyle değerlendirilen GPS koordinat farkları da son adımda kullanılan koordinat sistemine dönüştürülerek yersel gözlemlerle birlikte topluca değerlendirilebilmektedir.

Bir Jeodezik ağda yapılan yatay doğrultu, düşey açı, eğik uzunluk vb. gözlemler ile ağ noktalarının karşılıklı konumları belirlenir. Örneğin eğik uzunluk, yükseklik farkı ve koordinat farklarının ölçülmediği durumlarda, ağ noktalarının belirli bir koordinat sistemindeki yerleri ile ağın ölçeği ve yönü belirsiz kalır. Başka bir kaynaktan elde edilmesi gereken söz konusu parametreler datum parametreleri olarak adlandırılır.

Kullanım amaçlarına göre oluşturulan ve bu amaçlara göre en uygun hale getirilmesi istenen jeodezik ağların, önceden belirlenen doğruluk, duyarlık ve güvenirlik isteklerini karşılamaları istenir. Bu anlamda gerçekçi bir irdeleme yapabilmek için ele alınan jeodezik ağlar, hiç bir datum parametresi sabit alınmaksızın, ölçülere ilişkin düzeltmelerin ve koordinat bilinmeyenlerinin kareleri toplamının minimum yapıldığı en küçük kareler çözümü (Serbest Ağ Dengelemesi) ile değerlendirilirler.

Bu yazıda, serbest ağ dengelemesi yöntemi ile değerlendirilen yer merkezli üç boyutlu jeodezik ağlarda ortaya çıkan datum sorunu irdelenmiş ve çözüm Önerileri geliştirilmiştir.

2. DATUM SORUNU

Yer merkezli üç boyutlu jeodezik ağlarda, durulan her bir noktada üçü dik koordinat bilinmeyenleri (dX, dY, dZ) ve diğer ikisi de gerçek gravite vektörünün doğrultusunu belirlemek amacıyla seçilen astronomik enlem ve boylam bilinmeyenleri (astronomik koordinat bilinmeyenleri: $d\Phi$, $d\Lambda$) olmak üzere toplam beş adet dengeleme bilinmeyeni söz konusudur. Sadece yatay doğrultu ve düşey açı gözlemlerinin yapıldığı ve hiç bir datum parametresinin sabit alınmadığı jeodezik ağlarda datum defekti (belirsizliği) d=7 (3 öteleme, 3 dönüklük, l Ölçek) olur. Bu durumda ağın uygun yerlerinde seçilecek herhangi iki noktanın dik koordinatları (X_1,Y_1,Z_1 ve X_2,Y_2,Z_2) ile üçüncü bir noktanın koordinatlarından biri (Z_3) sabit alınarak zorlamasız bir dengeleme yapılabilir. Eğik uzunlukların ölçülmesi durumunda ise ölçek yönündeki belirsizlik giderilmiş olur. Böyle durumlarda diğer belirsizliklerin giderilmesi İçin dik koordinatlar yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle birinci noktanın (X_1,Y_1,Z_1), ikinci bir noktanın (X_2,Z_2) ile üçüncü bir noktanın (Y_3) dik koordinatlarının sabit alınmasının yanı sıra, ağın uygun bir yerinde ve söz konusu noktalar arasında en az bir yükseklik farkının da ölçülmesi zorunludur. Ancak kararlı bir çözüm elde edebilmek için, birinci noktanın dik koordinatları (X_1,Y_1,Z_1) İle astronomik enlem ve boylamı (Φ_1, Λ_1) ve ikinci bir noktanın dik koordinatının (Z_2) sabit alınması gerekir/3/. Astronomik koordinat bilinmeyenleri ağın datumu hakkında doğrudan bilgi taşımazlar. Astronomik koordinat bilinmeyenlerinin tümünün sabit alındığı ya da ölçülerle birlikte değerlendirildikleri durumlarda, ağın ölçeği de belirli ise datum defekti d=4 (3 Öteleme, l dönüklük) olur.

Sözü edilen belirsizlikler datum hakkında bilgi taşıyan yeterli sayıda gözlemin ölçme planına eklenmesi ile giderilebilir. Uygulamada pek kullanılmamakla birlikte; ağda en az bir noktada koordinat üçlüsü, en az bir astronomik azimut ile farklı azimutal yönlerde olmak üzere en az iki adet daha astronomik azimut ya da astronomik başucu açışı ve son olarak da yükseklik farkları da ölçülerek öteleme ve dönüklük yönündeki belirsizlikler giderilmiş olur. Ancak bu ölçülerin yeterli sayıda yapılması gerekir. Örneğin eğik uzunluklar tek basma yükseklik belirlemede yetersiz kalmaktadır. Yetersiz sayıda gözlem yapıldığı böyle durumlarda azimut yönünde belirsizlikler oluşur. Bu durumda ağın bir doğrultusu sabit alınarak ağın ortalama yönü yaklaşık koordinatlardan belirlenebilir /1/. Yersel gözlemlerle GPS gözlemleri nin topluca değerlendirilmesi durumlarında ise üç dönüklük ve bir ölçek belirsizliği giderilmiş olur.

Datum belirsizlikleri hiç bir datum parametresi sabit alınmaksızın;

v: Düzeltmeler vektörü

x: Bilinmeyenler vektörü

P: Ölçülere ilişkin ağırlık matrisi olmak üzere

$$v^T P v + x^T x \Rightarrow \min \qquad (1)$$

Tüm İz Minimum koşulu altında, düzeltmelerin ve koordinat bilinmeyenlerinin kareleri toplamının minimum yapıldığı en küçük kareler çözümü ile giderilebilir. Serbest ağ dengelemesi olarak da adlandırılan bu çözüm sonucunda, koordinat bilinmeyenlerinin ortalama hatalarının en küçük olması anlamına gelen

$$\text{iz}\,\{Q_{xx}\} \Rightarrow \min \qquad (2)$$

koşulu da gerçekleşir /5/. Normal denklem katsayılar matrisi (N) ve normal denklemlerin sabit terimler vektörü (n)

$$N = A^T P A \qquad (3)$$

$$n = A^T P l \qquad (4)$$

olmak üzere Moore-Penrose inversi;

$$N^{+}=(N+GG^{T})^{-1} - GG^{T} \tag{5}$$

ve serbest dengelenmiş koordinatlara ilişkin çözüm vektörü (Bilinmeyenler vektörü)

$$\hat{x} = N^{+}n \tag{6}$$

hesaplanır. Burada G matrisi, normal denklem katsayılar matrisinde d sayıda sıfıra eşit özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerden ya da benzerlik dönüşümüne karşılık gelen ve ağırlık merkezine ötelenmiş (normlandırılmış) koordinatlardan oluşturulan ortogonal özellikli bir dönüşüm matrisidir. Astronomik koordinat bilinmeyenlerinin katsayılarından kaynaklanan kondüsyon sorununun bir sonucu olarak; yer merkezli üç boyutlu jeodezik ağlarda kararlı bir serbest ağ dengelemesi için, özdeğerler sayısal anlamda sağlıklı olarak belirlenemezler. Bundan başka; başlangıçta koordinatların yeterli yaklaşıklıkla belirlenemediği söz konuşu jeodezik ağlarda, G dönüşüm matrisinin yaklaşık koordinatlardan oluşturulması da yeğlenmez. Bu sorunların bir sonucu olarak; kararlı ve güvenilir çözümler elde edebilmek için normal denklemler

$$\begin{vmatrix} N_{rr} & N_{rd} \\ N_{dr} & N_{dd} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_r \\ x_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n_r \\ n_d \end{vmatrix} \tag{7}$$

olacak biçimde alt matrislere ayrılır.

r : Regüler alt matrise karşılık gelen satır-sütun sayısı

d : Datum defektine karşılık gelen satır-sütun sayısı

Moore-Penrose ters matrisinin elemanları, değiştirilmiş Gauss algoritmasına göre

$$Z = N_{rr}^{-1} N_{rd}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} W &= Z^{T}Z + I \\ U &= ZW^{-1} \\ Y &= N_{rr}^{-1} U \\ Q_{rr}^{1} &= N_{rr}^{-1} - ZY^{T} - YZ^{T} \\ R &= Y^{T}U \\ T &= ZR^{T} \end{aligned} \tag{8}$$

kısaltmalarından yararlanarak

$$N^{+} = Q_{xx} = \begin{bmatrix} Q_{rr} & Q_{rd} \\ Q_{dr} & Q_{dd} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{rr}^{1}+TZ^{T} & Q_{rr}Z \\ Z^{T}Q_{rr} & Z^{T}Q_{rd} \end{vmatrix} \tag{9}$$

hesaplanır /6/. Burada $N_{dd}=N_{dr}N_{rr}^{-1}N_{rd}$ ve $G^{T}=[-N_{dr}\, N_{rr}^{-1}, I]$ olmak üzere $NG=0$, $Q_{xx}G=0$ koşullarının da sağlanması gerekir /2/.

3. İRDELEMELER

Bu yazıda; konuya açıklık getirmek amacıyla çok sayıda sayısal uygulama örneğinin sergilenmesi yerine karşılaşılan durumların, önerilen çözümlerin ve ulaşılan sonuçların bir bütün içerisinde özetlenmesi daha uygun olacaktır.

Yer merkezli üç boyutlu jeodezik ağların serbest ağ dengelemesi yöntemiyle değerlendirildikleri durumlarda: gerek datum hakkında bilgi taşıyan bilinmeyenlerin diziliş sırası, gerek ölçme planının datum belirlemedeki yetersizliği gerekse astronomik koordinat bilinmeyenlerine ilişkin katsayıların kondüsyonundan kaynaklanan sayısal çözümleme sorunlarmın da bir sonucu olarak; normal denklem katsayılar matrisinin rang defekti, ağın datum defektinden farklı çıkabilir. Bu nedenlerden Ötürü normal denklem katsayılar matrisinin pseudo terslerinin değiştirilmiş Gauss algoritmasma göre hesaplandığı böyle durumlarda, her nokta için bilinmeyenler

$d\Phi_i$, $d\Lambda_i$, dX_i, dY_i, dZ_i,

sırasında dizilmelidir. Bu durumda sözü edilen defekt farklılıkları da giderilmekte ve en uygun çözüme ulaşılmaktadır /3/.

Yer merkezli üç boyutlu jeodezik ağlarda gerçekleştirilecek bir serbest ağ dengelemesi işleminde kararlı bir çözümün elde edilebilmesi için, bilinmeyenlere ilişkin yaklaşık değerlerin (X_0,Y_0,Z_0,Φ_0,Λ_0) çok iyi belirlenmiş olması gerekmektedir. Bu amaçla ağın uygun bir yerinde seçilen P_0 noktasının astronomik koordinatları (Φ_0,Λ_0) ile oluşturulan ortogonal bir dönüşüm matrisi yardımıyla, yerel astronomik dik koordinatlardan yer merkezli üç boyutlu yaklaşık dik koordinatlar elde edilir. Ya da her bir noktanın elipsoidal eğri koordinatlarından (B,L,h) yararlanılarak da yer merkezli üç boyutlu dik koordinatların yaklaşık değerleri hesaplanabilir. Yaklaşık dik koordinatların birinci yöntemle elde edilmesi durumunda, dik koordinatlar başlangıç noktasına bağlı olarak ötelendiği için diğer grup bilinmeyenlerin yaklaşık değerlerine göre daha iyi olarak hesaplanırlar. Buna karşın, ikinci yöntemde her bir noktanın yaklaşık dik koordinatları elipsoit yüksekliklerine bağlı olarak hesaplandığı için diğer gruba göre daha zayıf kalmaktadır. Ancak her iki durumda da, yerel astronomik dik koordinatlar yatay doğrultu-kenar ağları ve yükseklik ağlarında gerçekleştirilecek birer tanı dengelemesi işlemiyle belirlenmeli ve bir sonraki adımda uygun bir dönüşüm modeli ile yer merkezli üç boyutlu dik koordinatların yaklaşık değerleri hesaplanmalıdır. Böylece daha başlangıçta model hatalarının önüne geçilmekte ve güvenilir bir yaklaşık koordinatlar kümesi tanımlanmaktadır.

Yer merkezli üç boyutlu jeodezik ağlarda en uygun yaklaşık koordinatlar ve datum sorunun önerildiği biçimiyle çözümlendiği söz konusu işlemler sonucunda, koordinat bilinmeyenleri ortalama 3-4 iterasyonda yakınsayabilmektedir.

Durulan her bir noktada yatay doğrultu ve düşey açı gözlemleri için söz konuşu olan astronomik koordinat bilinmeyenleri, dengelemenin serbestlik derecesini azaltır. Ayrıca, sözü edildiği üzere; bu bilinmeyenlere ilişkin katsayıların kondüsyonundan kaynaklanan sayısal çözümleme sorunlarının da bir sonucu olarak, güvenirlik ölçütleri yönünden sağlıklı bir irdeleme yapılamaz. Bu durumda, astronomik koordinat bilinmeyenleri ilk adımda bir tanı dengelemesi işlemiyle kestirilmeli ve ikinci adımda da bilinmeyenler vektöründen çıkarılarak ölçü kümesi ile birlikte ele alınmalıdır. Sayısal uygulamalar, bütünleşik olarak değerlendirilen yer merkezli üç boyutlu jeodezik ağlarda gerçekleştirilecek bir duyarlık ve güven optimizasyonu işlemi için böyle bir yaklaşımın oldukça güvenilir olduğunu göstermektedir /3/, /4/.

4 . SONUÇ VE ÖNERİLER

Serbest ağ dengelemesi yöntemiyle değerlendirilen yer merkezli üç boyutlu jeodezik ağlarda, özellikle astronomik koordinat bilinmeyenlerine ilişkin katsayıların kondüsyonundan ve bilinmeyenlerin diziliş sırasından kaynaklanan tutarsızlıkların bir sonucu olarak; bilinmeyenler her bir nokta için $d\Phi_i$, $d\Lambda_i$, dX_i, dY_i, dZ_i sırasında dizilmelidir.

Bundan başka; ağa ilişkin yerel üç boyutlu dik koordinatlar, yatay doğrultu-kenar ağları ve yükseklik ağlarında gerçekleştirilecek birer tanı dengelemesi işlemiyle belirlenmeli ve son adımda da seçilecek uygun bir dönüşüm modeli ile yer merkezli üç boyutlu dik koordinatların yaklaşık değerleri hesaplanmalıdır.

Bu işlemlerin bir sonucu olarak; normal denklem katsayılar matrisinin pseudo terslerinin değiştirilmiş Gauss algoritmasına göre hesaplandığı bir serbest ağ dengelemesi işlemi sonucunda, güvenilir ve kararlı dengeleme sonuçları elde edilmekte ve en uygun çözüme ulaşılmaktadır.

KAYNAKLAR

/1/ Bäumker, M. : Zur dreidimensionalen Ausgleichung von terrestischen und Satellitenbeobachtungen, Wissenschäftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen, Dissertationen, 130, Hannover, 1984.

/2/ Koch, K.R. : Parameterschätzung and Hypothesentests in linearen Modellen, Bonn, 1980.

/3/ Konak, H. : Yüzey Ağlarının Optimizasyonu, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1994.

/4/ Konak, H. : Bütünleşik Olarak Değerlendirilen Yüzey Ağlarının Optimizasyonu, Türk Haritacılığının 100. Yıl Kutlamaları ile TUJJB ve TUFUAB Bilimsel Kongreleri, Ankara, 1-5 Mayıs 1995.

/5/ Öztürk, E. Şerbetçi, M. : Dengeleme Hesabı, Cilt III, K.T.Ü. Yayınları, 144, Trabzon, 1992.

/6/ Ruff, B. : Berechnung der Pseudoinversen mit modifiziertem Gauβ-Jordan Austauschverfahren unter Ausnutzung der Symetrieeigenschaften der Normalgleichungsmatrizen, ZfV, 6, 216-220, 1983.