YERKÜRESİ ÜZERİNDE COĞRAFİ KOORDİNATLARI BİLİNEN ÜÇ NOKTADAN EŞİT UZAKLIKTAKİ NOKTANIN COĞRAFİ KOORDİNATLARININ BULUNMASI

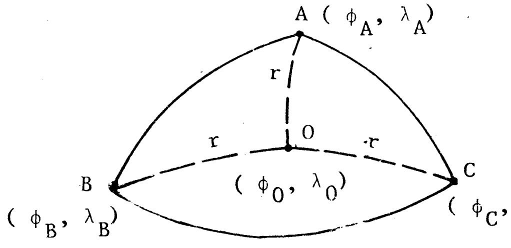
Doç.Dr.Ahmet YAŞAYAN
K.T.Ü.

1. Kapalı denizlere kıyısı olan ülkelerin deniz üzerindeki ortak sınır çizgileri kıyı üzerinde noktalar seçmek ve oluşturulacak üçgenlerin köşe noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların belirlenmesi suretiyle saptanır. Böyle bir belirleme uygun ölçekli haritalar üzerinde çizimsel yöntemle yapılabilirse de hesap yolu tercih edilir. Hesaplamalarda projeksiyon koordinatları ile çalışılabilir. Bu yazıda, sözü edilen problemin coğrafi koordinatlarla nasıl çözümlenebileceği kısaca açıklanacak ve genel olarak sorun bir küre geometrisi problemi olarak incelenecektir.

2. Küre üzerinde üç nokta bir daire belirtir. Bu dairenin merkezi doğal olarak, üç noktanın belirlediği küresel üçgenin köşe noktalarından eşit küresel uzaklıktadır. Bu nokta, düzlem üçgenlerde olduğu gibi, küresel üçgende de kenar orta dikmelerinin kesişme noktasıdır.

Küre üzerindeki üç noktadan eşit uzaklıktaki nokta, küre geometrisinde başka türlü de tanımlanabilir. Üç noktanın oluşturduğu daire düzlemine kürenin merkezinden indirilen dik doğru, başka bir deyişle, daire düzlemine dik olan kürenin çapı, küreyi iki noktada keser. Bu iki noktaya o dairenin kutupları denir. Bunlardan birisi, yukarıda sözü edilen, üçgenin dışına çizilen dairenin merkezinden başka bir şey değildir. Bu kutup noktalarının özelliği, söz konusu daire üzerindeki bütün noktalardan eşit küresel uzaklıkta bulunmasıdır.

Yer küresi üzerindeki üç nokta A,B,C ve bu noktaların coğrafi koordinatları da sıra ile ϕ_A, λ_A, ϕ_B, λ_B, ϕ_C, λ_C olsun.



Şekil: 1

Bu noktalardan eşit uzaklıkta olan nokta 0 ile gösterilsin (Şekil 1) . A,B,C noktalarından 0 noktasına olan küresel uzaklık r, bu noktanın coğrafi koordinatları da ϕ_o , λ_o olsun

P Kuzey kutup noktası ve 0 noktası, A,B ve C noktaları ile üç küresel üçgen oluşturur : POA , POB , POC . A,B ve C noktalarının P noktasına olan uzaklıkları sıra ile $90^o - \phi_A$, $90^o - \phi_B$ ve $90^o - \phi_C$ dir. Küresel trigonometrideki kenar kosinüs teoremi bu üç üçgen için yazılırsa

$$\cos r = \sin\phi_A \sin\phi_o + \cos\phi_A \cos\phi_o \cos(\lambda_A - \lambda_o) , \quad (1)$$

$$\cos r = \sin\phi_B \sin\phi_o + \cos\phi_B \cos\phi_o \cos(\lambda_B - \lambda_o) , \quad (2)$$

$$\cos r = \sin\phi_C \sin\phi_o + \cos\phi_C \cos\phi_o \cos(\lambda_C - \lambda_o) , \quad (3)$$

elde edilir. Bu üç trigonometrik denklemde üç bilinmeyen (r, ϕ_o , λ_o) bulunmaktadır. (1), (2), (3) eşitliklerinin her iki yanları da $\cos\phi_o$ ile bölünür, (1)' den (2) ve (3) denklemleri çıkarılırsa

$$(\sin\phi_A - \sin\phi_B) \tan\phi_o + \cos\phi_A \cos(\lambda_A - \lambda_o) - \cos\phi_B \cos(\lambda_B - \lambda_o) = 0, \quad (4)$$

$$(\sin\phi_A - \sin\phi_C) \tan\phi_o + \cos\phi_A \cos(\lambda_A - \lambda_o) - \cos\phi_C \cos(\lambda_C - \lambda_o) = 0 \quad (5)$$

bulunur. Bu iki bilinmeyenli iki trigonometrik denklem çözülürse

$$\tan\lambda_o = (a_1 a_5 - a_2 a_4) / (a_3 a_4 - a_1 a_6) \quad (6)$$

bulunur. Bu eşitlikteki a katsayıları

$$a_1 = \sin\phi_A - \sin\phi_B , \quad (7)$$

$$a_2 = \cos\phi_A \cos\lambda_A - \cos\phi_B \cos\lambda_B , \quad (8)$$

$$a_3 = \cos\phi_A \sin\lambda_A - \cos\phi_B \sin\lambda_B , \quad (9)$$

$$a_4 = \sin\phi_A - \sin\phi_C \; , \tag{10}$$

$$a_5 = \cos\phi_A \cos\lambda_A - \cos\phi_C \cos\lambda_C \; , \tag{11}$$

$$a_6 = \cos\phi_A \sin\lambda_A - \cos\phi_C \sin\lambda_C \tag{12}$$

dir. λ_o bulunduktan sonra ϕ_o koordinatı da

$$\tan\phi_o = -(a_2 \cos\lambda_o + a_3 \sin\lambda_o) / a_1$$

$$= -(a_5 \cos\lambda_o + a_6 \sin\lambda_o) / a_4 \tag{13}$$

eşitliklerinden kontrollü olarak hesaplanabilir.

3. Bu hesaplama Texas Instruments SR - 52 , SR-56 gibi proğramlanabilir elektronik hesaplayıcılarda kolaylıkla yapılabilir.

Böyle bir hesaplama örneği aşağıda verilmiştir.

Verilenler :

	Enlem (ϕ)			Boylam (λ)		
A	41^o	57'	51"	28^o	02'	34",8
B	41	59	07,8	28	02	09 ,6
C	41	14	15	29	13	30 ,6

(7), (8),... (12)' de tanımları verilen parametreler

$a_1 = -0,2768097 X 10^{-3}$, $a_4 = 9,4839322 X 10^{-3}$,

$a_2 = 0,1770948 X 10^{-3}$, $a_5 = 0,0032216 X 10^{-3}$,

$a_3 = 0,1972267 X 10^{-3}$, $a_6 = -17,5763943 X 10^{-3}$

olarak bulunur. (6) eşitliğinden λ_o değeri

$$\lambda_o = 29^o,29746293 = 29^o\ 17'\ 50'',8666$$

ve (13) eşitliğinden de

$$\phi_o = 42^o,19531191 = 42^o\ 11'\ 43'',1228$$

bulunur.

Bulunan bu değerler ve A,B,C noktalarının koordinatları (1) ,(2) ve (3) formüllerinde yerine yazılırsa O noktasının A,B,C noktalarından olan küresel uzaklıkları

$r = 57',55985$

$r = 57,55986$

$r = 57,55985$

deniz mili olarak bulunur.

4. Pratik anlamının olup olmadığına bakılmaksızın, başlangıçta sözü edilen amaçtan bağımsız olarak, problem, küre üzerinde verilen üç nokta - nın kutuplarının belirlenmesi biçiminde de ele alınabilir. Bu durumda O noktasından başka ikinci bir kutup noktasının bulunması gerekir. (6) eşitliğinden aslında iki λ_o değeri bulunur. İkinci değer birinciye göre 180^o farklıdır. Yer küresi koordinat sisteminde birinci değer, söz gelimi doğu boylamında ise, ikinci değer batı boylamında ve $180^o - \lambda_o$ dır. Bu ikinci değer (13) formülünde yerine yazıldığında tan ϕ_o değeri birincisinin ters işaretlisi olarak elde edilecektir. Küresel koordinatlarda $-90^o<\phi<90^o$ olduğundan ikinci ϕ_o değeri birincisinin ters işaretlisi olacaktır.

Kısaca ; üç noktanın belirlediği dairenin iki kutbu da (6) ve (13) eşitlikleri ile bulunabilmektedir. İkinci kutup, olması gerektiği gibi, kürenin merkezine göre birincinin simetriğinden başka birşey değildir.

5. Üç nokta aynı enlem üzerinde bulunuyorsa, yani $\phi_A = \phi_B = \phi_C = \phi$ ise $a_1 = a_4 = 0$ olur (6) eşitliğindeki tan λ_o sıfır bölü sıfır belirsiz durumuna gelir. koordinatının belirsiz olduğu nokta küresel koordinat sisteminin kutup noktalarıdır. Üç nokta aynı enlem dairesi üzerinde bulunduğu için enlem dairelerinin kutupları koordinat sisteminin kuzey ve güney kutup noktalarıdır.

Üç nokta aynı boylam dairesi üzerinde bulunuyorsa, yani $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C = \lambda$ ise, (6) eşitliğinden $\tan\lambda_o = \div \cot\lambda$, (13) eşitliğinden de $\tan\phi_o = 0$ bulunur. Bu durumda bu üç noktadan geçen büyük dairenin kutuplarının coğrafi koordinatları da $\lambda_o = \lambda + 90^o$ ve $\lambda_o = \lambda - 90^o$, $\phi_o = 0$, yani ekvator üzerinde simetrik iki noktadır.

Üç noktadan birinin coğrafi kutup noktalarından biri olması durumunda, söz gelimi $\phi_A = 90^o$ ise, a_1 ve a_4 katsayılarında $\sin\phi_A = 1$ yazılacak, diğerlerinde $\cos\phi_A$ bulunması nedeni ile ilk terimleri sıfır olacak, (6) ve (7) eşitlikleri ile yine sonuç alınabilecektir. Bu durumda $r=90^o - \phi_o$ dır.

6. Sonuç olarak ; küre üzerinde üç noktanın belirlediği herhangi bir dairenin kutuplarının bulunmasında açıklanan hesaplama yöntemi hiç bir sınır durum tanımaksızın uygulanabilmektedir. Bu problemin pratik tanımından başka bir şey olmayan, yer küresi üzerinde coğrafi koordinatları ile verilen üç noktadan eşit uzaklıktaki bir noktanın koordinatlarının bulunması da bu yoldan kolayca sağlanabilmektedir.