UYUŞUMSUZ ÖLÇÜLER TESTİ

Prof.Dr. Ahmet AKSOY

1. GİRİŞ

Belli bir amaçla, örneğin nirengi, nivelman, trigonometrik nivelman, ve gravite ağlarının belirlenmesi için, yapılan ölçülerin oluşturduğu "ölçüler kümesi" nde bazı ölçüler değişik nedenlerle kaba hatalı olabilir. Sözü edilen kaba hata, genelde basit bir inceleme ya da karşılaştırma ile hemen farkedilebilecek ve ölçünün düzeltilerek kullanılabilmesini engellemeyecek türden bir hata değildir. Konu aldığımız hatalı ölçüler bazı istatistik testlerle ortaya çıkarılabilir. Bu nedenle bu türden hatalı ölçülere Almanca da "Ausreiser", İngilizcede "Outlier" sözcükleri karşılığında "uyuşumsuz ölçüler" deyimi kullanılmıştır. Matematik istatistikte bu ölçülerin, teorik olarak tanımlanan raslantısal değişkenler için bir örnekleme değer olarak alınamayacakları, örnekleme değerlerin oluşturacağı kümenin bir elemanı sayılamayacakları söylenir ve bu nedenle ölçülere dayalı olarak tahmin edilecek parametreleri olumsuz etkilememeleri için ölçüler kümesinden ayıklanmaları gerekir.

Uyuşumsuz ölçülerin ayıklanması için değişik çalışmalar yanında Baarda'nın (Baarda 1968) ve Pope'nin (Pope 1975) ileri sürdükleri teoriler tutunmuş ve geliştirilmiştir.

Bu yazıda son yıllarda daha çok uygulanan Pope yöntemi açıklanmaya çalışılacaktır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Raslantısal Değişkenler ve Dağılımları

Raslantısal değişkenler, bir zarın atılışında gelen sayı gibi, sonucunun önceden bilinemeyeceği olaylardır. Ancak çok sayıda tekrarları halinde bu tür olayların ortak özellikleri olduğu görülür ve bu özellikler "raslantısal değişkenlerin dağılımı" deyimi ile özetlenir. Örneğin kaba ve sistematik hatalardan arındırılmış ölçüler, raslantısal değişkenler olarak, bilindiği gibi, normal dağılımdadır. Bir raslantısal değişkene ilişkin örneklemenin sonucu önceden bilinememekle birlikte, dağılım biliniyorsa, örneklemenin hangi değerde olacağının olasılığı hesaplanabilir. Örneğin normal dağılımda bir ölçünün x sayısını verme olasılığı, yine bilindiği gibi $-\infty<x<\infty$ olmak üzere, olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2\right) \qquad (21.1)$$

eşitliği ile verilmektedir. Buna karşılık x'in a ve b sayıları arasında bir değer alma olasılığı, p(a<x<b) ile gösterilip, p, % bir sayı olmak üzere F(x) dağılım fonksiyonu adı ile

$$F(x) = P(a<x<b) = \int_a^b f(x)\, dx \qquad (21.2)$$

entegrali ile verilir.

Olasılık 0 la 1 arasında değer alır. Bir raslantısal değişkenin alabileceği en küçük ve en büyük değerler arasında çıkması kesindir ve normal dağılımda ölçüler için

$$P(-\infty<x<\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad (21.3)$$

olur.

(21.1) eşitliğinde μ ve σ^2 bir ölçünün girdiği normal dağılımın parametreleridir ve

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx \qquad (21.4)$$

entegrali ile μ , x değişkeninin E(x) ile gösterilen "Ümit değeri", σ^2 ise x'in varyansı ya da $(x-\mu)^2$ nin ümit değeridir ve

$$E\left((x-\mu)^2\right) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f(x)dx \qquad (21.5)$$

entegrali ile verilir. Sabit bir sayının ümit değeri kendisidir. μ ve σ^2 parametreleri verilen bir normal dağılımdaki x raslantısal değişkeni

$$x \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{21.6}$$

ile gösterilir ve " x , μ ve σ^2 parametreli normal dağılımdadır " şeklinde okunur.

Herbiri ayrı dağılımda olmakla birlikte, değişik raslantısal değişkenlerin (örneğin bir açı-kenar ağında doğrultu açısı ve kenar ölçülerinin) oluşturdukları ölçüler kümesinin dağılımları, "çok boyutlu dağılım" olarak ifade edilir.

$$\underline{X}^T = \| x_1 \quad x_2 \ldots x_n \|$$

olmak üzere nx1 boyutlu $\underline{x}$ vektörü ile gösterilen bu değişkenler vektörü örneğin normal dağılımda iseler, bunların ortaklaşa olasılık fonksiyonları,

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = f(\underline{x}) = (2\bar{n})^{-n/2} \; |\underline{\Sigma}|^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^T \; \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu}) \tag{21.7}$$

eşitliği ile verilmektedir. (Wolf 1968, S.500)

Burada $\underline{\mu}$, değişkenlerin, $E(\underline{X}) = \underline{\mu}$ ümit değerleri vektörü, $\underline{\Sigma}$ ise (21.8)

$$\underline{\Sigma}_x = \tilde{\sigma_o} \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} \cdots q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} \cdots q_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} \cdots q_{nn} \end{Vmatrix} = \sigma_o^2 \, \underline{Q}_x = \sigma_o^2 \, \underline{P}_x^{-1} \tag{21.9}$$

eşitliği ile varyans-kovaryans matrisidir ve

$$\underline{\Sigma} = E((\underline{x}-\underline{\mu}) \; (\underline{x}-\underline{\mu})^T) = E(\underline{x} \; \underline{x}^T) - \underline{\mu} \; \underline{\mu}^T \tag{21.10}$$

eşitliği ile verilmektedir. (Koch 1975, S.17). σ_o^2 ise birim ölçünün varyansıdır.

Raslantısal değişkenlerin dağılımları verilmişken, bunların lineer fonksiyonlarının dağılımı da bulunabilir. Örneğin

$$x \sim N\,(\mu,\sigma^2) \tag{21.11}$$

olmak üzere $y = ax+b$ eşitliği ile verilen y değişkeni normal dağılımındadır.

$$y \sim N\,(a\mu+b\ ,\ a^2\ \sigma^2) \tag{21.12}$$

Benzer olarak, çok değişkenli

$$\underline{x} \sim N(\underline{\mu},\underline{\Sigma}) \tag{21.13}$$

normal dağılımlı $\underline{x}$ vektörüne bağlı $\underline{y} = \underline{A}\underline{x}+\underline{b}$ eşitliği ile verilen $\underline{y}$ vektörü

$$\underline{y} \sim N(\underline{A}\underline{\mu}+\underline{b},\ \underline{A}\underline{\Sigma}\underline{A}^T) \tag{21.14}$$

olarak normal dağılımdadır. Buna karşılık $\underline{I}$ Birim matris olmak üzere

$$\underline{x} \sim N(\underline{0},\underline{I}) \tag{21.15}$$

normal dağılımlı $\underline{x}$ vektörü verilmişken yani $\sigma_o^2 = 1$ ve x_i değişkenlerinin eş ağırlıklı ve birbirinden bağımsız olmaları halinde

$$y = x^T x = x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots x_n^2 \tag{21.16}$$

eşitliği ile verilen karesel toplam artık normal dağılımda değildir. Bu dağılıma χ^2 (şi-kare) dağılımı denir ve aşağıdaki şekilde gösterilip

$$y \sim \chi^2(n) \tag{21.17}$$

"y,n serbestlik dereceli şi-kare dağılımındadır" şeklinde okunur. $\underline{X}$,

$$\underline{x} \sim N(\underline{\mu},\underline{I}) \tag{21.18}$$

olmak üzere normal dağılımda ise,

$$y = \underline{x}^T \underline{x} \tag{21.19}$$

karesel toplamı,

$$\lambda = \underline{\mu}^T \underline{\mu} \tag{21.20}$$

merkez kayıklığı ile

$$y \sim \chi^2(n,\lambda) \tag{21.21}$$

ile gösterilmek üzere, y, n serbestlik dereceli ve λ merkez kayıklıklı merkezsel olmayan şi-kare dağılımındadır.

$$y \sim \chi^2(m) \quad , \quad z \sim \chi^2(n) \tag{21.22}$$

olmak üzere y ve z , (m) ve (n) serbestlik dereceli merkezsel şi-kare dağılımlarında iseler, bunların birbirinden bağımsız olmaları halinde

$$W = \frac{y/m}{z/n} \tag{21.23}$$

eşitli ile verilen W raslantısal değişkeni (m) ve (n) serbestlik dereceli F (Fisher)- dağılımdadır ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$W \sim F(m,n) \tag{21.24}$$

Şi-kare ve Fisher dağılımlarının olasılık fonksiyonları her matematik istatistik kitabında(örneğin Aksoy 1974,S.24) bulunabilir.

Karesel toplam olduğu için χ^2 ve dolayısıyla F-dağılımlarında değişkenler 0 ile ∞ arasında değer alırlar ve örneğin α olasılığına karşılık değişken değerleri (Fraktilen) χ_α ve F_α ile gösterilirse,

$$P(0<y<\chi_\alpha^2) = \alpha \quad \text{ya da} \quad P(y<\chi_\alpha^2) = \alpha = \int_0^{\chi_\alpha^2} f(y)dy \tag{21.25}$$

$$P(0<W<F_\alpha) = \alpha \quad \text{ya da} \quad P(W<W_\alpha) = \alpha = \int_0^{W_\alpha} f(W)dW \tag{21.26}$$

olur.

2.2 İstatistik Testler (Hipotez testleri)

İstatistik testler, raslantısal değişkenlerin, bunlar için varsayılan dağılıma uyup uymadıkl'arının incelenmesidir. İki amaçla test yapılır. Bunlardan birisi, bir raslantısal değişkenler kümesinin aynı dağılımda olup olmadıkları, diğeri ise bir raslantısal değişkenin önceden verilen bir dağılıma girip girmediğinin irdelenmesidir. Örneğin bir x raslantısal değişkeninin girdiği varsayılan tek boyutlu bir dağılımın olasılık fonksiyonu f(x) ve değişkenin alabileceği en küçük ve en büyük değerler t_1 ve t_2 ise, (normal dağılımda $t_1 = -\infty$, $t_2 = \infty$ dur), değişkenin bu aralıklarda kalma olasılığı,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = 1 \tag{22.1}$$

ve değişkenin a ve b, (a < b), gibi verilen değişken değerleri arasında kalma olasılığı, önce

$$F(a) = P(t_1<x<a) = \int_{t_1}^{a} f(x)dx = \alpha/2 \tag{22.2}$$

ve

$$F(b) = P(t_1<x<b) = \int_{t_1}^{b} f(x)dx = S \tag{22.3}$$

denir ve $S = 1-\frac{\alpha}{2}$ alınırsa, (24.4)

$$P(a<x<b) = \int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{a} f(x)dx - \int_{t_1}^{a} f(x)dx = S - \alpha/2$$

ya da (22.4) ile

$$P(a<x<b) = \int_a^b f(x)dx = 1-\alpha \qquad (22.5)$$

elde edilir. Burada α ya "signifikans nivosu" ya da "test nivosu" denir. Dağılım verilmişse alınacak $\alpha = 0{,}05$ ya da $\alpha = 0{,}01$ test nivosu değerlerine karşılık a ve b değerleri hesaplanır. Örneklemeye dayalı bir x değeri, $a<x<b$ çıkıyorsa, x'in bu dağılımda olabileceği hükmüne varılır (iki taraflı test). Fakat çoğu hallerde x ,

$$F(b) = P(x<b) = 1-\alpha$$

olmak üzere yalnız b fraktileni ile karşılaştırılır ve $x<b$ çıkarsa, x değerinin bu dağılımda olabilecei (x in bu dağılımda olduğu hipotezinin reddedilemeyeceği) söylenir (tek taraflı test).

Raslantısal değişkenlere göre, değişik parametreli dağılımlar olacağından, yukardaki hesaplamaları her dağılım için özel olarak yapmak uygun değildir. Bu nedenle hesaplamalar parametreleri sabit değerdeki dağılımlarda, ya da bu dağılımlar için düzenlenen tablo değerleri yardımı ile yapılıp, dağılımı bu standart dağılımlara uymayan değişkenlere ilişkin değerler dönüşümle hesaplanır. Örneğin standart normal dağılım,

$$z \sim N(0,1) \qquad (22.7)$$

olarak verilmektedir. $x \sim N(\mu,\sigma^2)$ olarak verilmişse, z ve x arasında

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \text{bağıntısı vardır.} \qquad (22.8)$$

Çok değişkenli standart normal dağılım parametreleri $\underline{0}$ ve $\underline{I}$ dir ve

$$\underline{z} \sim N(\underline{0},\underline{I}) \qquad (22.9)$$

olur. $\underline{x} \sim N(\underline{\mu},\underline{\Sigma}) = N(\underline{\mu},\sigma_o^2\, \underline{P}^{-1})$ verilmişse, (21.9) dan $\underline{P}$ ağırlık matrisi önce $\underline{P} = \underline{C}^T\underline{C}$ cholesky çarpanlarına ayrılır (Aksoy 1979). (22.10) ve $\underline{\bar{x}} = \underline{C}\underline{x}$ ve $\underline{\bar{\mu}} = \underline{C}\underline{\mu}$ ile $\underline{\bar{x}}$ değişkeni (22.11)

$$\underline{\bar{x}} \sim N(\underline{\bar{\mu}}, \sigma_o^2 \underline{I}) \quad (22.12)$$

olmak üzere normal dağılımlı x değişkenler vektörüne ve sonra da

$$\underline{z} = \frac{\underline{\bar{x}} - \underline{\bar{\mu}}}{\sigma_o} \quad (22.13)$$

ile standart normal dağılımlı değişkene dönüştürülür.

Çünkü $\underline{\bar{x}} = \underline{C}\underline{x}$ ile (21.9) dan

$$\underline{\Sigma}_{\bar{x}} = \underline{C}\underline{\Sigma}_x \underline{C}^T = \underline{C}\, \sigma_o^2\, (\underline{C}^T\underline{C})^{-1}\underline{C}^T = \sigma_o^2\, \underline{C}\underline{C}^{-1}(\underline{C}^T)^{-1}\underline{C}^T = \sigma_o^2\, \underline{I} \quad (22.14)$$

olur. (22.1), (21.7) de konursa (22.12) nin elde edileceği görülür.

2.3 Parametre Tahmini

Girişte adı edilen, ölçülere dayalı olarak tahmin edilecek parametreler, örneğin nirengi ağlarında nokta koordinatları ve birim ölçünün varyansı gibi büyüklükler olabilir. Diğer tahmin yöntemleri yanında en çok kullanılan tahmin yöntemi, "en küçük kareler yöntemi", diğer adı ile "ölçülerin en küçük kareler yöntemi" ile dengelenmesidir.

Bu tahmin yönteminde önce bir matematik model ve bir stokastik model konmalıdır. Son zamanlarda en çok kullanılan matematik model Gauss-Markoff modelidir ve stokastik modelle birlikte

$$\underline{A}\underline{x} = E(\underline{\ell}) \quad ; \quad \underline{\Sigma}_\ell = \sigma_o^2\, \underline{P}^{-1} \quad (23.1)$$

olarak verilmektedir. (Şartlı ölçüler dengelmesindeki modele ise Gauss-Helmert modeli denir.) 1. eşitlik olan matematik modelde $\underline{A}$, nxu boyutlu verilen bir katsayılar matrisi, $\underline{x}$, uxl boyutlu aranan parametreler vektörü, $\underline{\ell}$ ise nxl boyutlu ölçüler vektörüdür. Stokastik modelde ise $\underline{\Sigma}_\ell$, $\underline{\ell}$ vektörünün varyans-kovaryans matrisi olup, sağda σ_o^2 birim ölçünün aranan varyansı, $\underline{P}^{-1} = Q_{\ell}$ ise nxn boyutlu olmak üzere, ölçülerin verilen ağırlık katsayıları matrisidir, ayrıca n>u dur.

(23.1) eşitliğinde ümit değerleri yerine ölçüler konulsa, $\underline{x}$ parametre sayısından fazla denklem oluşacağı için sistem tek çözümlü değildir. Tek anlamlı çözüm için

$$\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{\ell} + \underline{\varepsilon} \tag{23.2}$$

olmak üzere sistemde sağa bir $\underline{\varepsilon}$ raslantısal değerler vektörü (gerçek hatalar vektörü) eklenmelidir.

$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{A}}\underline{x} - \underline{\ell}$ ile, $\underline{x}$ gerçek değerinin ümit değeri kendisi olduğu için (23.1) den,

$$E(\underline{\varepsilon}) = \underline{\underline{A}}\underline{x} - E(\underline{\ell}) = \underline{0} \tag{23.3}$$

ve

$$\underline{\Sigma}_{\varepsilon} = \underline{\Sigma}_{\ell} = \sigma_o^2\, \underline{P}^{-1} \tag{23.4}$$

özelliklerini taşımakla birlikte $\underline{\varepsilon}$ gerçek hataları bulunamayacağı için (23.2) den $\underline{x}$ parametrelerinin bu yoldan çözüm olanağı yoktur. Ancak $\underline{\varepsilon}$ yerine

$$\underline{v}^T \underline{\underline{P}}\underline{v} = \min \tag{23.5}$$

koşulunu sağlayan $\underline{v}$ düzeltmeler (Resudien) vektörü konursa, $\underline{x}$ parametreleri yerine, en küçük kareler yöntemine göre tahmin değerleri $\hat{\underline{x}}$ bulunur.

$$\underline{\underline{A}}\hat{\underline{x}} = \underline{\ell} + \underline{v} \tag{23.6}$$

eşitliğinden (23.5) koşulu ile

$$(\underline{A}^T \underline{\underline{P}}\underline{\underline{A}})\underline{x} = \underline{A}^T \underline{\underline{P}}\underline{\ell} \tag{23.7}$$

elde edilir. (23.6) eşitlikleri dolaylı ölçüler dengelemesinde "lineerleştirilmiş düzeltme denklemleri" (23.7) ise "normal denklemler" adlarıyla tanımlanırlar.

$\underline{A}$ matrisi sütun düzgün bir matris yani mertebesi $rg(\underline{A}) = u$ ise, $\underline{A}^T\underline{P}\underline{A}$ matrisi u mertebesinde düzgün bir simetrik kare matristir ve Cayley inverzi alınabileceğinden (23.7) eşitliğinden,

$$\underline{\hat{x}} = (\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\,\underline{A}^T\underline{P}\underline{\ell} \tag{23.8}$$

elde edilir.

$\underline{\hat{x}}$ in ağırlık katsayıları matrisi $Q_{\hat{x}} = (\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}$ ile $\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_o^2 Q_{\hat{x}}$ (23.9)

ve ümit değeri $E(\hat{x}) = (\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\,\underline{A}^T\underline{P}E(\underline{\ell})$ ve $E(\underline{\ell}) = \underline{A}\underline{x}$ ile $E(\underline{\hat{x}}) = \underline{x}$ bulunur. Ayrıca (23.6) ve (23.9) dan

$$\underline{v} = \underline{A}\underline{\hat{x}} - \underline{\ell} = \underline{A}(\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\,\underline{A}^T\underline{P}\underline{\ell} - \underline{\ell} = (\underline{A}(\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\,\underline{A}^T\underline{P} - \underline{I})\,\underline{\ell} \tag{23.10}$$

$$E(\underline{v}) = \underline{A}\,E(\hat{x}) - E(\underline{\ell}) = \underline{0}$$

$\underline{\Sigma}_v = (A(\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}A^TP-\underline{I})\,\Sigma_{\underline{\ell}}(A(\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{P}-\underline{I})$ ve $\Sigma_{\underline{\ell}} = \sigma_o^2\,\underline{P}^{-1}$ ile

$$\Sigma_v = (\underline{P}^{-1} - \underline{A}(\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\underline{A}^T)\,\sigma_o^2 = Q_v\,\sigma_o^2 \tag{23.11}$$

elde edilir.

(23.10) da $(I - A(\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\,\underline{A}^T\underline{P}) = \underline{M}$ denirse $-\underline{v} = \underline{M}\,\underline{\ell}$ ve (23.12)

$$\underline{\Sigma}_v = \underline{M}\,\underline{P}^{-1}\,\sigma_o^2\,, \quad \underline{v}^T\,\underline{P}\,\underline{v} = \underline{\ell}^T\underline{M}\underline{P}\underline{M}\,\underline{\ell} \tag{23.13}$$

olduğu görülür. Ayrıca (23.12) de $\underline{\ell}$ yerine (23.2) den karşılığı konursa, (23.14)
$\underline{v} = \underline{M}\;\underline{\varepsilon}$ bulunur.

$\underline{M}\underline{M} = \underline{M}$ olduğu için, $\underline{M}$ matrisine "İdempotent" matris denir. (23.15)

İdempotent bir matrisin (23.15) özelliği yanında daha bazı özellikleri vardır. Bunlar,

a) İdempotent bir matrisin öz değerleri (1) ya da (0) dır. Çünkü bilindiği gibi n boyutlu bir $\underline{M}$ kare matrisinde

$$\underline{M}\,\underline{y} = \lambda\,\underline{y} \tag{23.16}$$

eşitliğini sağlayan λ bu matrisin öz değeri ve $\underline{y}$, matrisin öz vektörü olmak üzere $\underline{M}\,\underline{y} - \lambda\underline{y} = \underline{0} = (\underline{M}-\lambda\underline{I})\underline{y}$ homojen denklem sisteminde $\underline{y}$ nin sıfırdan farklı değerlerinin bulunabilmesi için, katsayıları matrisi determinantı

$$\det(\underline{M} - \lambda\underline{I}) = 0 \tag{23.17}$$

olmalıdır ve bu eşitlik λ ya bağlı n inci dereceden bir denklem verir. Denklemin kökleri λ_i $(i = 1,2, \ldots n)$ matrisin öz değerleridir ve (23.16) da yerlerine konulursa, her öz değere karşı bir $\underline{y}_i$ öz vektörü bulunur. Bu vektörler yerine

$$s_i = \frac{y_i}{\sqrt{\underline{y}_i^T\,y_i}}\,, \quad \text{öyleki} \quad \underline{s}_i^T\underline{s}_i = 1 \quad \text{olmak üzere} \tag{23.18}$$

normlandırılmış $\underline{s}_i$ vektörleri de (23.16) eşitliğini sağlarlar ve dolayısıyla $\underline{M}$ matrisinin öz vektörleridir. $\underline{M}$ matrisi simetrikse, i, k = 1,2, ...n

$i \neq k$ için $\quad \underline{s}_i^T\underline{s}_k = 0 \quad$ olur. Çünkü (23.16) dan (23.19)

$$\underline{s}_i^T\,\underline{M} = \lambda_i\underline{s}_i^T \quad , \quad \underline{s}_i^T\,\underline{M}\,\underline{s}_k = \lambda_i\underline{s}_i^T\underline{s}_k$$

ve benzer olarak $\underline{s}_k^T\underline{M}\,\underline{s}_i = \lambda_k\underline{s}_k^T\underline{s}_i$ eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa, skalar değerler oldukları için sol taraflar eşittir ve

$0 = \lambda_i\underline{s}_i^T\underline{s}_k - \lambda_k\underline{s}_k^T\underline{s}_i = \underline{s}_i^T\underline{s}_k(\lambda_i - \lambda_k)$ olur. λ_i ve λ_k her zaman (0) olmadığı (23.19) dan görülür. Yine (23.16) dan,

$\underline{M}\,\underline{M}\,\underline{y}_i = \lambda_i\,\underline{M}\underline{y}_i = \lambda_i^2\,\underline{y}_i$ ve $\underline{M}$ idempotent matris ise $\underline{M}\underline{M} = \underline{M}$ olacağından $\underline{M}\,\underline{y}_i = \lambda_i^2\,\underline{y}_i$ ve $\underline{M}\,\underline{y}_i = \lambda_i\underline{y}_i$ ile

$$\lambda_i \underline{y}_i = \lambda_i^2 \underline{y}_i \quad ; \quad \lambda_i(\lambda_i - 1)\, \underline{y}_i = 0, \quad \lambda_i = 1 \quad \text{yada} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{olur.}$$

b) n boyutlu $\underline{M}$ matrisi simetrik ise ve mertebesi rg($\underline{M}$) = r<n ise, (n−r) sayıda öz değeri sıfıra eşittir. Herhangi bir simetrik Matriste λ_i öz değerleri $\underline{D}$ köşegen matrisi ve s_i öz vektörleri $\underline{S}$ matrisinin sütun vektörleri olarak

$$\underline{D} = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{matrix} \right\| \qquad \underline{S} = \| s_1 \; s_2 \; \ldots\ldots s_n \| \tag{23.20}$$

ile gösterilirse, (23.16) dan,

$$\underline{MS} = \underline{SD} \quad \text{ve} \quad \underline{S}^T \underline{S} = \underline{SS}^T = \underline{I} \tag{23.21}$$

olur. Ya da bu eşitliklerden, (23.18) ve (23.19) ile

$$\underline{M} = \underline{S}\,\underline{D}\,\underline{S}^T$$

ve sıfırdan farklı öz değerlere karşılık öz vektörler matrisi nxr boyutlu $\underline{S}_1$ ve sıfır öz değerlere karşılık öz değerler matrisi nx(n−r) boyutlu $\underline{S}_2$ ile gösterilirse, (23.20) den, $\underline{S} = \| \underline{S}_1 \;\; \underline{S}_2 \|$ ile

$$\underline{M} = \underline{S} \left\| \begin{matrix} \underline{D}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{matrix} \right\| \underline{S}^T = \| \underline{S}_1 \;\; \underline{S}_2 \| \left\| \begin{matrix} \underline{D}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \underline{S}_1^T \\ \underline{S}_2^T \end{matrix} \right\| = \underline{S}_1 \underline{D}_r \underline{S}_1^T$$

olur. $\underline{S}_1 \sqrt{\underline{D}_r} \sqrt{\underline{D}_r} \underline{S}_1^T = \underline{S}_1 \underline{D}_r \underline{S}_1^T = \underline{M}$ ile $\underline{H} = \underline{S}_1 \sqrt{\underline{D}_r}$

denirse $\underline{M} = \underline{HH}^T$

elde edilir. İdempotent matriste $\underline{D}_r = \underline{I}_r$ olduğu için $\underline{M} = \underline{S}_1 \underline{S}_1^T$ olur ve köşegen terimlerin toplamı (i.z) olmak üzere,

$$iz(\underline{M}) = iz(\underline{S}_1\underline{S}_1^T) = iz(\underline{S}_1^T\underline{S}_1) = iz(\underline{I}_r) = r = rg(\underline{M}) \qquad (23.22)$$

olur. O halde İdempotent bir matrisin mertebesi, izine eşittir. Ayrıca (23.21) den, r mertebeli herhangi simetrik bir $\underline{M}$ matrisi

$$\underline{S}^T\underline{M}\underline{S} = \begin{Vmatrix} \underline{D}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{Vmatrix} \qquad (23.23)$$

ve idempotent $\underline{M}$ matrisinde $\underline{S}^T\underline{M}\underline{S} = \begin{Vmatrix} \underline{I}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{Vmatrix}$ olur.

c) $\underline{M}$ matrisi idempotent ise $(\underline{I} - \underline{M})$ matrisi de idempotenttir ve mertebesi

$$rg(\underline{I} - \underline{M}) = n-r \quad \text{olur.} \qquad (23.24)$$

Diğer taraftan (22.10) dan $\underline{P} = \underline{C}^T\underline{C}$ Choleky çarpanlara ayrılması sonucu bulunacak $\underline{C}$ matrisi ile (23.6) daki $\bar{\underline{A}} = \underline{C}\,\underline{A}$, $\bar{\underline{\ell}} = \underline{C}\,\underline{\ell}$, $\bar{\underline{v}} = \underline{C}\,\underline{v}$ (23.25) normlandırmaları ile,

$$\bar{\underline{A}}\,\underline{X} = E(\bar{\underline{\ell}}) \quad , \quad \underline{\Sigma}_{\bar{\ell}} = \underline{I}\,\sigma_o^2 \qquad (23.26\ a)$$

$$\hat{\underline{x}} = (\bar{\underline{A}}^T\bar{\underline{A}})^{-1}\,\bar{\underline{A}}^T\bar{\underline{\ell}} \quad , \quad \bar{\underline{M}} = \underline{C}\underline{M} = \underline{I} - \bar{\underline{A}}(\bar{\underline{A}}^T\bar{\underline{A}})\bar{\underline{A}}^T \quad , \quad -\bar{\underline{v}} = \bar{\underline{M}}\bar{\underline{\ell}} = \bar{\underline{M}}\bar{\underline{\varepsilon}} \qquad (23.26\ b)$$

ve $\underline{\Sigma}_{\bar{v}} = \bar{\underline{M}}\,\sigma_o^2$ olur. Buna karşılık $\bar{\underline{\varepsilon}} = \underline{C}\underline{\varepsilon} = \bar{\underline{A}}\underline{x} - \bar{\underline{\ell}}$ ile (23.26 c)

$$\underline{\Sigma}_{\bar{\varepsilon}} = \underline{\Sigma}_{\bar{\ell}} = \underline{I}\sigma_o^2 \quad \text{olur.} \qquad (23.26\ d)$$

$\bar{\underline{M}}$ de idempotent bir matristir ve bu nedenle

$$\underline{v}^T\underline{P}\underline{v} = \bar{\underline{v}}^T\bar{\underline{v}} = \bar{\underline{\varepsilon}}^T\bar{\underline{M}}\bar{\underline{\varepsilon}} = \bar{\underline{\ell}}^T\,\bar{\underline{M}}\,\bar{\underline{\ell}} \qquad (23.27)$$

elde edilir. (23.27) ile verilen karesel formun ümit değeri,

$E(\underline{v}^T\underline{P}\underline{v}) = E(\underline{\varepsilon}^T\underline{\bar{M}}\underline{\varepsilon})$ ile $\underline{\varepsilon}^T\underline{\bar{M}}\underline{\varepsilon}$ çarpımı skalar bir sayı verdiği ve skalar bir sayının izi kendisine eşit olduğu için $E(\underline{\varepsilon}^T\underline{\bar{M}}\,\underline{\varepsilon}) = E(iz(\underline{\varepsilon}^T\underline{\bar{M}}\underline{\varepsilon}))$ (23.27 b)

yazılabilir. Diğer taraftan $\underline{A}$ ve $\underline{B}$ gibi iki kare matris için,

$$iz(\underline{A}\ \underline{B}) = iz(\underline{B}\ \underline{A}) \quad , \quad iz(\underline{A} + \underline{B}) = iz(\underline{A}) + iz(\underline{B})$$

olduğundan, (23.27 b) den

$$E(iz(\underline{\varepsilon}^T\underline{\bar{M}}\underline{\varepsilon})) = E(iz(\underline{\bar{M}}\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}^T)) = iz(\underline{\bar{M}}\ E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}^T))$$

yazılabilir ve (21.10) eşitliği dikkate alınırsa,

$$iz(\underline{\bar{M}}(\underline{\Sigma}_{\varepsilon} + \underline{\mu}_{\varepsilon}\underline{\mu}_{\varepsilon}^T)) = iz(\underline{\bar{M}}\underline{\Sigma}_{\varepsilon} + \underline{\mu}_{\varepsilon}\underline{\bar{M}}\underline{\mu}_{\varepsilon}^T) \qquad (23.28)$$

elde edilir.

(23.3) ve (23.26) eşitliklerinden.

$\underline{\mu}_{\varepsilon} = E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}$ ve $\underline{\Sigma}_{\varepsilon} = \sigma_o^2\ \underline{I}$ (23.28) de yerine konursa

$E(\underline{v}^T\underline{P}\underline{v}) = E(\underline{\varepsilon}^T\underline{\bar{M}}\underline{\varepsilon}) = \sigma_o^2\ iz(\underline{\bar{M}})$ bulunur. $\underline{\bar{A}}$ nın boyutları nxu olduğu için (23.27) den

$$iz(\underline{\bar{M}}) = iz(\underline{I} - \underline{\bar{A}}(\underline{\bar{A}}^T\underline{\bar{A}})^{-1}\underline{\bar{A}}^T) = iz(\underline{I}_n) - iz((A^TA)^{-1}\underline{\bar{A}}^T\underline{\bar{A}}) = iz(\underline{I}_n) - iz(\underline{I}_u)$$

olur. $iz(\underline{I}_n) = n$, $iz(\underline{I}_u) = u$ ile $iz(\underline{\bar{M}}) = n-u = rg(\underline{\bar{M}})$ (23.29)

$$\text{ve} \quad E(\underline{v}^T\underline{P}\underline{v}) = \sigma_o^2\ (n-u) \qquad (23.30)$$

elde edilir. Böylece, $\underline{v}^T \underline{P} \underline{v} = \Omega$ denirse σ_o^2 nin ümit değere sadık (unbias) tahmin değeri

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{v^T P v}{n-u} = \frac{\Omega}{n-u} \quad \text{olur. Çünkü} \quad E(\hat{\sigma}_o^2) = \sigma_o^2 \quad \text{olduğu} \tag{23.31}$$

görülür.

2.4 Dengeleme Sonuçlarının Dağılımları

$\underline{A}\,\underline{x} = E(\underline{\ell})$; $\Sigma_\ell = \sigma_o^2 \underline{P}^{-1}$ ya da $\underline{\bar{A}}\,\underline{x} = E(\underline{\bar{\ell}})$; $\Sigma_{\bar{\ell}} = \sigma_o^2\,\underline{I}$

Gauss-Markoff Modelinde $\underline{\ell}$ ölçü değerlerinin,

$$\underline{\ell} \sim N(\underline{A}\,\underline{x},\ \sigma_o^2\,\underline{P}^{-1}) \quad \text{ya da} \quad \underline{\bar{\ell}} \sim N(\underline{\bar{A}}\,\underline{x},\ \sigma_o^2\,\underline{I}) \tag{24.1}$$

olmak üzere normal dağılımda oldukları kabul edilirse,

$\underline{\varepsilon} = \underline{A}\underline{x} - \underline{\ell}$ gerçek hataları (23.3) ve (23.4) den $E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}$ ve

$\Sigma_\varepsilon = \sigma_o^2\,\underline{P}^{-1}$ ile

$$\underline{\varepsilon} \sim \underline{N}(\underline{0}, \sigma_o^2 \underline{P}^{-1}) \quad \text{yada} \quad \underline{\bar{\varepsilon}} \sim N(\underline{0}, \sigma_o^2 \underline{I}) \tag{24.2}$$

normal dağılımındadır.

$\underline{x}$ Parametrelerinin $\underline{\hat{x}}$ tahmin değerleri (23.9) dan $E(\underline{\hat{x}}) = \underline{x}$ ve

$\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_o^2\,\underline{Q}_{\hat{x}}$ ile

$$\underline{\hat{x}} \sim N(\underline{x}, \sigma_o^2 \underline{Q}_{\hat{x}}) \tag{24.3}$$

normal dağılımındadır. $\underline{v}$ düzeltmeleri, (23.10) ve (23.11) den $E(\underline{v}) = \underline{0}$ ve $\underline{\Sigma}_v = \sigma_o^2 \underline{Q}_v$ ile,

$$\underline{v} \sim N(\underline{0}, \sigma_o^2 \underline{Q}_v) \quad \text{ya da} \quad \underline{\bar{v}} \sim N(\underline{0}, \sigma_o^2 \underline{\bar{M}}) \tag{24.4}$$

normal dağılımındadır.

Bunlara karşılık düzeltmelerin karesel formu $\underline{v}^T \underline{P} \underline{v}$ nın dağılımı için genelde bir karesel formun dağılımını çıkarmak gerekir.

$$\underline{y} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}) \tag{24.5}$$

olmak üzere normal dağılımlı bir $\underline{y}$ raslantısal değişkenler vektörü verilmişse, $\underline{\Sigma}$, n boyutlu regüler bir matris ve $\underline{A}$, n boyutlu bir kare matris olması halinde, $\underline{A}\,\underline{\Sigma}$ idempotent bir matris oluyorsa, $\underline{y}^T \underline{A}\underline{y}$ karesel formu

$$\underline{y}^T \underline{A} \underline{y} \sim \chi^2 (rg(\underline{A}), \underline{\mu}^T \underline{A} \underline{\mu}) \tag{24.6}$$

dağılımındadır. Çünkü idempotent bir matris olduğu için $\underline{A}\,\underline{\Sigma} = \underline{A\Sigma A\Sigma}$ olacaktır ve sağdan $\underline{\Sigma}^{-1}$ ile çarpılırsa $\underline{A} = \underline{A\Sigma A}$ elde edilir. Diğer taraftan $rg(\underline{A}) = r<n$ olduğu varsayılırsa, (23.21) den nxr boyutlu bir $\underline{H}$ matrisi ile $\underline{A} = \underline{HH}^T$ çarpanlarına ayrılabilir ve $rg(\underline{H}) = r$ olacaktır.

$\underline{z} = \underline{H}^T \underline{y}$ olmak üzere rx1 boyutlu $\underline{z}$ raslantısal değişkenler vektörü,

$$E(\underline{z}) = \underline{H}^T E(\underline{y}) = \underline{H}^T \underline{\mu} \quad \text{ve} \quad \underline{\Sigma}_z = \underline{H}^T \underline{\Sigma H} \quad \text{ile} \quad \underline{z} \sim N(\underline{H}^T \underline{\mu}, \underline{H}^T \underline{\Sigma H})$$

normal dağılımındadır.

Burada $\underline{H}^T \underline{\Sigma H} = (\underline{H}^T \underline{H})^{-1} (\underline{H}^T \underline{H}) \underline{H}^T \underline{\Sigma H} (\underline{H}^T \underline{H}) (\underline{H}^T \underline{H})^{-1}$ şeklinde yazılırsa, $\underline{HH}^T = \underline{A}$ ile, $\underline{H}^T \underline{\Sigma H} = (\underline{H}^T \underline{H})^{-1} \underline{H}^T \underline{A}\, \underline{\Sigma}\, \underline{A}\, \underline{H} (\underline{H}^T \underline{H})^{-1}$ ve $\underline{A\Sigma A} = \underline{A} = \underline{HH}^T$ ile $\underline{H}^T \underline{\Sigma H} = \underline{I}$ elde edilir.

Böylece $\underline{z} \sim N(\underline{H}^T\underline{\mu}, \underline{I})$ ve (21.19) dan

$$\underline{z}^T\underline{z} = \underline{y}^T\underline{H}\underline{H}^T\underline{y} = \underline{y}^T\underline{A}\underline{y} \sim \chi^2(r, \underline{\mu}^T\underline{A}\underline{\mu}) \qquad (24.7)$$

olduğu görülür.

Bu sonuç düzeltmelerin karesel formuna uygulanırsa, (24.1) ve (23.27)den,

$$\bar{\underline{\ell}} \sim N(\bar{\underline{A}}\underline{x}, \sigma_o^2\underline{I}) \quad \text{ve} \quad \underline{v}^T\underline{P}\underline{v} = \bar{\underline{\ell}}^T\bar{\underline{M}}\bar{\underline{\ell}}$$

ile $\frac{1}{\sigma_o^2}\underline{v}^T\underline{P}\underline{v} = \bar{\underline{\ell}}^T\frac{\bar{\underline{M}}}{\sigma_o^2}\bar{\underline{\ell}}^T$ denilirse $(\sigma_o^2\underline{I})(\bar{\underline{M}}/\sigma_o^2) = \bar{\underline{M}}$ idempotent bir matris ve (23.22) den $rg(\bar{\underline{M}}) = r = n-u$ olduğu için merkez kayıklığı

$\lambda = (\bar{\underline{A}}\underline{x})^T\bar{\underline{M}}\bar{\underline{A}}\underline{x}$ ile (24.6) dan

$$\frac{1}{\sigma_o^2}\underline{v}^T\underline{P}\underline{v} = \frac{1}{\sigma_o^2}\bar{\underline{\ell}}^T\bar{\underline{M}}\bar{\underline{\ell}} = \frac{\Omega}{\sigma_o^2} \sim \chi^2(n-u, \underline{x}^T\bar{\underline{A}}^T\bar{\underline{M}}\bar{\underline{A}}\underline{x})$$

olur. Diğer taraftan (23.26 b) den $\bar{\underline{M}}\,\bar{\underline{A}} = \underline{0}$ olduğu görülür ve böylece $\lambda = 0$ ve düzeltmelerin karesel formu $\frac{1}{\sigma_o^2}\underline{v}^T\underline{P}\underline{v}$ olarak,

$$\frac{\underline{v}^T\underline{P}\underline{v}}{\sigma_o^2} = \frac{\Omega}{\sigma_o^2} \sim \chi^2(n-u) \qquad (24.8)$$

(n-u) serbestlik dereceli merkezsel (Şi-kare) dağılımında ve birim ölçünün varyansının tahmin değeri ise, $\frac{n-u}{\sigma_o^2}\hat{\sigma}_o^2$ biçimi ile

$$\frac{(n-u)\ \hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \sim \chi^2\ (n-u) \qquad (24,9)$$

olarak yine (n-u) serbestlik dereceli Şı-kare dağılımındadır. (Wolf 1968) S.501, Koch 1975) Benzer olarak başkaca dağılımlar üretilebilir ve bunlardan birisi de 3. bölümde ele alınan Studentleştirilmiş düzeltmeler dağılımıdır.

3. STUDENTLEŞTİRİLMİŞ DÜZELTMELERİN DAĞILIMLARI VE TESTLER

Dengeleme sonucu bulunan $\underline{v}$ düzeltmeleri (24.4) de parametreleri verilen normal dağılımdadır. Ancak, görüldüğü gibi, bu dağılım standart bir dağılım olmadığı için, istatistik bir teste uygun değildir. Kaldıki birim ölçünün varyansı olan σ_o^2 parametresi de bilinmemektedir. Bu nedenle $\underline{v}$ düzeltmelerinin testini sağlayacak ve

$$\tau_o^2 = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_{v_i}} \quad (i=1,2\ \ldots\ldots n) \qquad (30.1)$$

eşitliği ile verilen bir τ_i raslantısal değişkenin dağılımı aranır. Burada $\hat{\sigma}_{v_i}$, v_i düzeltmesinin tahmin edilen (dengeleme sonucu bulunan) standart sapması (dengeleme dilinde karesel ortalama hatası) dır ve (23.11) de σ_o^2 yerine (23.30) dan $\hat{\sigma}_o^2$ tahmin değerinin konulması ile bulunacak $\underline{\Sigma}_v$ varyans-kovaryans matrisinin köşegen terimlerinin kareköküne eşittir ve

$$\underline{\hat{\sigma}}_{v_i} = (\mathrm{diag}\ \underline{\Sigma}_v)^{1/2} \qquad (30.2)$$

vektörü ile ifade edilir.

$\frac{v_i}{\sigma_{v_i}}$ standartlaştırılmış düzeltme adını alırken (30.1) eşitliği ile bulunan büyüklüğe "studentleştirilmiş düzeltme" denir. (Poppe 1975, Koch 1980, S.236) Studentleştirilmiş düzeltmenin dağılımını bulmak için (23.26) da $\bar{\underline{M}}$ matrisi, dimpotent bir matris olduğu ve öz değerlerinin (1) ya da (0) olacağı nedeniyle (23.21) e benzer olarak, (1) olan öz değerlerine karşılık öz vektörler matrisi $\underline{S}_1$ ile gösterilirse,

$$\bar{\underline{M}} = \underline{S}_1 \underline{S}_1^T \quad \text{olmak üzere} \tag{30.3}$$

çarpanlara ayrılabilir. Ayrıca, $\bar{\underline{M}}$ matrisinin boyutları nxn ve (1) olan özdeğerleri sayısı (23.22) ve (23.29) dan n-u ve $\underline{S}_1$ matresinin boyutları nx(n-u) olur ve $\underline{S}_1^T \underline{S}_1 = \underline{I}_{n-u}$ olarak (ortogonal matris) özelliğini taşır.

Diğer taraftan, (23.24) den normlandırılmış $\bar{\underline{\ell}}$ ölçü vektörü ile,

$$\underline{k} = \underline{S}_1^T \bar{\underline{\ell}} \tag{30.4}$$

olmak üzere (n-u) x 1 boyutlu bir k vektörü tanımlanırsa(23.26)dan

$$-\bar{\underline{v}} = \bar{\underline{M}} \bar{\underline{\ell}} = \underline{S}_1 \underline{S}_1^T \bar{\underline{\ell}} = \underline{S}_1 \underline{k} \tag{30.5}$$

bulunur. (30.4) ve (23.6) dan

$E(\underline{k}) = \underline{S}_1^T E(\bar{\underline{\ell}}) = \underline{S}_1^T \bar{\underline{A}}\underline{x}$ ve $\Sigma k = \underline{S}_1^T \Sigma_{\bar{\ell}} \underline{S}_1 = \underline{S}_1^T \sigma_o^2 \underline{I} \underline{S}_1 = \sigma_o^2 \underline{S}_1^T \underline{S}_1 = \sigma_o^2 \underline{I}$

ile $\underline{k} \sim N(\underline{S}_1^T \bar{\underline{A}}\underline{x}, \sigma_o^2 \underline{I})$ normal dağılımındadır. Ancak (23.26 b) den,

$$\bar{\underline{M}} \bar{\underline{A}} = \underline{0} \tag{30.6}$$

olduğu ve (30.3) den, $\underline{S}_1 \underline{S}_1^T \bar{\underline{A}} = \underline{0}$ ve soldan $\underline{S}_1^T$ ile çarpımla

$\underline{S}_1^T \underline{S}_1 \underline{S}_1^T \bar{\underline{A}} = \underline{0}$, $\underline{S}_1^T \underline{S}_1 = \underline{I} \neq \underline{0}$ olduğu için $\underline{S}_1^T \bar{\underline{A}} = \underline{0}$ olacağından

$$k \sim N(\underline{0}, \sigma_o^2 \underline{I}) \tag{30.7}$$

olduğu görülür.

Öte yandan $\underline{k}$ nin iki karesel formunun oranı olarak

$$a_i = \frac{(n-u-1)\ \underline{k}^T \underline{A}_i \underline{k}/\sigma_o^2}{\underline{k}^T \underline{B}_i \underline{k}/\sigma_o^2} \tag{30.8}$$

eşitliği ile bir a_i raslantısal değişkeni tanımlanır ve $\underline{u}_i$, (n-u)xn boyutlu S_i^T matrisinin i. sütun vektörü olmak üzere, (n-u) x (n-u) boyutlarında

$$\underline{A}_i = \underline{u}_i(\underline{u}_i^T \underline{u}_i)^{-1}\ \underline{u}_i^T \quad , \ \underline{B}_i = \underline{I} - \underline{A}_i \tag{30.9}$$

alınırsa, bu matrisler idempotent matrislerdir ve mertebeleri (23.22) den

$$rg(\underline{A}_i) = iz(\underline{A}_i) = iz((\underline{u}_i^T \underline{u}_i)^{-1}\ \underline{u}_i^T \underline{u}_i) = 1 \quad \text{ve benzer olarak,}$$

$$rg(\underline{B}_i) = rg(\underline{I} - \underline{A}_i) = rg(\underline{I}) - rg(\underline{A}_i) = n-u-1 \tag{30.10}$$

olur.

Diğer taraftan (30.7) normal dağılımlı $\underline{k}$ vektörü ile $\frac{1}{\sigma_o^2}\ \underline{k}_i^T \underline{A}_i \underline{k}$ karesel formu, $\frac{1}{\sigma_o^2}\ \underline{A}_i \underline{\Sigma}_k$ idempotent bir matris verdiğinden (24.7) den $rg(\underline{A}_i) = 1$ serbestlik dereceli ve $\underline{\mu}_k^T\ \underline{A}_i \underline{\mu}_k$ dış merkezlikli (Şi-kare) dağılımındadır, yani

$$\frac{1}{\sigma_o^2} \underline{k}^T \underline{A}_i \underline{k} \sim \chi^2(rg(\underline{A}_i),\ \underline{\mu}_k^T\ \underline{A}_i \underline{\mu}_k) \tag{30.11}$$

olur. (30.7) den $\underline{\mu}_k = 0$ ve (30.10) dan $rg(\underline{A}_i) = 1$ konursa, (30.8) de

$$\frac{1}{\sigma_o^2}\ \underline{k}^T \underline{A}_i \underline{k} \sim \chi^2\ (1) \tag{30.12}$$

ve benzer olarak

$$\frac{1}{\sigma_o^2}\underline{k}^T\underline{B}_i\underline{k} \sim \chi^2\ (n-u-1) \qquad (30.13)$$

elde edilir. Diğer taraftan $\underline{k} \sim N(\underline{\mu},\underline{\Sigma})$ normal dağılımda olan bir $\underline{k}$ vektörü ile,

$\underline{k}^T\underline{A}_i\underline{k}$ ve $\underline{k}^T\underline{B}_i\underline{k}$ karesel formları, $\underline{A}_i\underline{\Sigma}\underline{B}_i = \underline{B}_i\underline{\Sigma}\underline{A}_i = \underline{0}$ oluyorsa birbirlerinden bağımsızdır. (Koch 1980 , S.127)

Örneğimizde (30.7) ve (30.9) dan, $\underline{A}_i\underline{A}_i = \underline{A}_i$ (idempotent) matrisi ile

$\underline{A}_i\underline{\Sigma}_k\underline{B}_i = \sigma_o^2\ \underline{A}_i(\underline{I}-\underline{A}_i) = \underline{0}$ bulunur. Bu nedenle, (21.3) , (30.8) , (30.12) ve (30.13) den, a_i

$$a_i \sim F(1,\ n-u-1) \qquad (30.14)$$

olmak üzere F- dağılımında olduğu görülür. Buna karşılık

$$\tau_i^2 = \frac{(n-u)a_i}{n-u-1+a_i}$$

eşitliği ile tanımlanan bir τ_i^2 raslantısal değişkeninde, (30.9) dan

$$\underline{B}_i = \underline{I} - \underline{A}_i \quad \text{ve}\quad \underline{k}^T\underline{B}_i\underline{k} = \underline{k}^T\underline{k} - \underline{k}^T\underline{A}_i\underline{k} \quad \text{ile ,}$$

(30.8) den,

$$a_i = \frac{(n-u-1)\ \underline{k}^T\underline{A}_i\underline{k}/\sigma_o^2}{(\underline{k}^T\underline{k} - \underline{k}^T\underline{A}_i\underline{k})/\sigma_o^2}$$

konursa,

$$\tau_i^2 = \frac{(n-u)\ \underline{k}^T\underline{A}_i\underline{k}}{\underline{k}^T\underline{k}}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\underline{A}_i$ yerine (30.9) dan karşılığı konursa, skalar olduğu için $(\underline{u}_i^T\underline{u}_i)^{-1} = 1/(\underline{u}_i^T\underline{u})$ ile ve skalar olduğu için $\underline{k}_i^T\underline{u}_i = \underline{u}_i^T\underline{k}$ olacağından,

$$\tau_o^2 = \frac{(n-u)\underline{k}^T\underline{u}_i\underline{u}_i^T\underline{k}}{\underline{k}^T\underline{k}\ \underline{u}_i^T\underline{u}_i} = \frac{(n-u)(\underline{k}^T\underline{u}_i)^2}{\underline{k}^T\underline{k}\ \underline{u}_i^T\underline{u}_i} \qquad (30.16)$$

elde edilir. Bu eşitlikte,

(30.4) den $\underline{k}=\underline{S}_1^T\underline{\ell}$ ile $\underline{k}^T\underline{k} = \underline{\ell}^T\underline{S}_1\underline{S}_1^T\underline{\ell}$ ve (30.3) den (23.27) den

$\underline{k}^T\underline{k} = \underline{\ell}^T\underline{\bar{M}}\underline{\ell} = \Omega$ olduğu görülür.

Diğer taraftan $\underline{u}_i$, (30.3) den $\underline{S}_1^T$ matrisinin sütun vektörleri olarak alındığı için,

$$\underline{S}_1^T = \left\| \underline{u}_1 \quad \underline{u}_2 \quad \ldots \underline{u}_n \right\| \quad \text{ve} \quad \underline{S}_1 = \left\| \begin{matrix} \underline{u}_1^T \\ \underline{u}_2^T \\ \vdots \\ \underline{u}_n^T \end{matrix} \right\| \text{ olacaktır.} \qquad (30.18)$$

o halde (30.5) den,

$$-\underline{v} = \left\| \begin{matrix} -\bar{v}_1 \\ -\bar{v}_2 \\ \\ -\bar{v}_n \end{matrix} \right\| = \underline{S}_1\underline{k} = \left\| \begin{matrix} \underline{u}_1^T \\ \\ \underline{u}_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{matrix} \right\| \quad \underline{k} = \left\| \begin{matrix} \underline{u}_1^T\underline{k} \\ \\ \underline{u}_2^T\underline{k} \\ \vdots \\ \underline{u}_n^T\underline{k} \end{matrix} \right\|$$

olur. ve böylece (30.16) da $(\underline{k}^T\underline{u}_i)^2 = \bar{v}_i^2$ olduğu görülür. $\underline{u}_i^T\underline{u}_i$ ise

$\underline{S}_1^T\underline{S}_1 = \underline{\bar{M}} = \underline{Q}_{\bar{v}}$ matrisinin i köşegen terimi $q_{\bar{v}_i}$ olduğu (30.1), (23.6) ve (30.3) den görülmektedir. Bu değerlerle (30.16),

$$\tau_i^2 = \frac{(n-u)\,\bar{v}_i^2}{\Omega\, q_{\bar{v}_i}}$$ şeklini alır ve (23.31) den

$$\tau_i^2 = \frac{\bar{v}_i^2}{\hat{\sigma}_o^2\, q_{\bar{v}_i}} = \frac{\bar{v}_i^2}{\hat{\sigma}_{\bar{v}_i}^2}$$ olduğu çıkar. (30.19)

Burada $\bar{v}_i$ (23.25) den homojenleştirilmiş düzeltmedir. Gauss-Markoff modelinde, genellikte olduğu gibi ölçüler birbirinden bağımsızsa $\underline{P}$ ağırlık matrisi köşegen bir matristir ve köşegen terimleri ölçülerin ağırlığına eşittir. Bu durumda $\underline{P} = \underline{C}^T\underline{C}$ eşitliğini sağlayan $\underline{C}$ matrisi de terimleri $\sqrt{P_i}$ olan köşegen bir matristir. Böylece (23.25) eşitliklerinde $\bar{\ell}_i = \ell_i\sqrt{P_i}$, $\bar{v}_i = v_i\sqrt{P_i}$ ve $\bar{\underline{M}} = \underline{C}\,\underline{M}$ eşitligi ile bulunan $\bar{\underline{M}}$ matrisinin köşegen terimleri $\bar{m}_{ii} = m_{ii}\sqrt{P_i}$ olur. (30.20)

Bu durum (30.22) de dikkate alınırsa;

$$\tau_i^2 = \frac{\bar{v}_i^2}{\hat{\sigma}_{\bar{v}_i}^2} = \frac{v_i^2\, P_i}{\hat{\sigma}_{v_i}^2\, P_i} = \frac{v_i^2}{\hat{\sigma}_{v_i}^2} \qquad (30.21)$$

olur.

Bilgisayarla çalışılmaması halinde (23.26) dan $\bar{\underline{M}}$ matrisini hesaplamak güçtür. Bu nedenle bu matrisin (30.22) de geçen köşegen terimleri yerine bir ortalama değer, köşegen terimlerin ortalaması alınabilir. $\bar{\underline{M}}$ matrisinin izi (23.29) dan (n-u) olduğu için, ortalama değer $(n-u/_n)$ dir. Buna göre

$\hat{\sigma}_{\bar{v}_i}^2 = \frac{n-u}{n}\;\hat{\sigma}_o^2$ ve benzer olarak, $\hat{\sigma}_{\bar{v}_i}^2 = \hat{\sigma}_{v_i}^2\; P_i$ den,

$$\hat{\sigma}_{v_i}^2 = \frac{n-u}{nP_i}\;\hat{\sigma}_o^2 \qquad (30.22)$$

alınabilir.

(30.15) ve (30.21) den,

$$\tau_i^2 = \frac{v_i^2}{\sigma_{v_i}^2} = \frac{(n-u)a_i}{n-u-1\ a_i} \quad ; \quad a_i = \frac{(n-u-1)\tau_i^2}{n-u-\tau_i^2} \qquad (30.23)$$

elde edilir.

(30.14) ile a_i değeri F (Fisher)-dağılımında olduğu için herhangi bir F_o sınır değerine göre F_i nin F_o dan küçük olma olasılığı, F dağılımında $0<F_i<\infty$ olduğu için (22.2) den

$$F(F_o) = P(0<F_i<F_o) = P(F_i<F_o) = \int_0^{F_o} f(F)dF = F(F_o\ ;\ 1,n-u-1)$$

olur. Burada F_o, 1 ve (n-u-1) serbestlik derecesindeki F dağılımının Fraktil değeri, f(F) ise F- dağılımının olasılık fonksiyonudur. Entegralde F yerine (30.23) den τ ya bağlı karşılığı konursa,

$$P(F_i<F_o) = \int_0^{\tau_o} f(\tau)d\tau = P(\tau_i<\tau_o) = F(F_{o;1,n-u-1}) \qquad (30.25)$$

olur. Çünkü F_i büyüdükçe τ_i de büyümektedir. Burada $f(\tau)$, τ(Tau) adı verilen dağılımın olasılık fonksiyonudur.

F_o yerine F-dağılımının α olasılığına karşılık F_α fraktil değeri alınırsa,

$$P(\tau_i < \tau_\alpha) = F(F_\alpha\ ;\ 1,n-u-1) = \alpha \qquad (30.26)$$

olacaktır. Burada τ_α, (30.23) den F_α ya karşılık

$$\tau_\alpha = \left(\frac{(n-u)\ F_{\alpha\ ;\ 1,n-u-1}}{n-u-1+F_{\alpha\ ;\ 1,n-u-1}}\right)^{1/2} \qquad (30.27)$$

eşitliği ile hesaplanır.

Uyuşumsuz ölçülerin, dolayısıyla düzeltmelerin testi, $\max\left|\frac{v_i}{\hat{\sigma}_{v_i}}\right|$ değeri nin bir $\tau = C_{1-\alpha}$ sayısı ile kıyaslanmasıdır. $C_{1-\alpha}$ studentleştirilmiş düzeltmeler maksimum değerleri dağılımının $(1-\alpha)$ olasılığına karşılık fraktil değeridir.

$$\max\left|\frac{v_i}{\hat{\sigma}_{v_i}}\right| > C_{1-\alpha} \tag{30.28}$$

oluyorsa, v_i düzeltmesi ve dolayısıyla ℓ_i ölçüsü uyuşumsuz sayılıp atılır. Bu durumda α yanılma olasılığı (1.tip hata),

$$P(\max\left|\frac{v_i}{\hat{\sigma}_{v_i}}\right| > C_{1-\alpha} = \alpha \tag{30.29}$$

olur.

$C_{1-\alpha}$ fraktil değerini bulmak için aşağıdaki düşünce uygulanır:

$$P(\max \tau_i > C_{1-\alpha}) = P(\text{en az bir } \tau_i > C_{1-\alpha}) = 1-P(\text{Tüm } \tau_i < C_{1-\alpha})$$

$$= 1-P(\tau_1 < C_{1-\alpha} \text{ ve } \tau_2 < C_{1-\alpha} \text{ ve } \tau_n < C_{1-\alpha}) = \alpha$$

Buradan τ_i lerin bağımlılığı ihmal edilirse,

$$\alpha = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\tau_i < C_{1-\alpha}) = 1-(P(\tau_i < C_{1-\alpha}))^n$$

$$P(\tau_i < C_{1-\alpha}) = (1-\alpha)^{1/n} \tag{30.30}$$

bulunur. Böylece (30.27) den,

$$C_{1-\alpha} = \left(\frac{(n-u)\,F}{n-u-1+F}\right)^{1/2} \quad ; \quad F = F_{(1-\alpha)^{1/n}\,;\,1,n-u-1} \tag{30.31}$$

eşitlikleri ile $C_{1-\alpha}$ hesaplanır. Burada $F_{(1-\alpha)^{1/n}\,;\,1,n-u-1}$, $(1-\alpha)^{1/n}$ olasılığına karşılık F-dağılımının Fraktil değeridir.

(23.1) de nxu boyutlu $\underline{A}$ matrisi sütun düzgün değilse $rg(\underline{A}) = r<u$ ile (23.8) deki $(\underline{A}^T\underline{PA})^{-1}$ Cayley inverzi yerine $(\underline{A}^T\underline{PA})^{-1}$ genel inverzi (ve genellikle reflektif genel inverzi ya da en çok More-Penrose Psendoinverzi) alınır. Bu durumda $\underline{A}$ nın mertebe eksikliği (d) ise, eşitliklerde geçen (n-u) serbestlik derecesi yerine n-u+d = n-q alınır. (30.35)

KAYNAKLAR

Aksoy, A. : Matematik istatistik yöntemlerle jeodezik ölçülerin irdelenmesi, İ.T.Ü.Kütüphanesi No:987, 1974.

Aksoy, A. : Dengeleme notları, Harita Yüksek Teknik Okulu (Teksir) Ankara, 1979

Baarda, W. : A testing procedure for use in geodetic networks. Netherlands Geodetic Comission, Publ on Geodesy, vol.2 Nr. 5, Delft 1968.

Koch. K.,R. : Parameterschatzung und Hypothesentest in linearen Modellen, Dümmler. Bonn, 1980

Koch, K., R. : Wahrsheinlichkeitsverteilungen für statistische Beurteilungen von Ausgleichungnsergebnissen. Mitteilungen aus dem Institut für Theoretische Geodasie der Universitat Bonn, Nr. 38, 1975

Pope, J.,A. : The statistics of residuals and the detection of outliers. Paper presented to (IAG) in XVI General Assembly of (IUGG), Grenoble, France, August 1975.

Wolf, H. : Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Ferd. Dümlers Verlag, Bonn, 1968.