ÜÇ BOYUTLU AĞLARDA GÜVEN ELİPSOİDLERİ

Veysel ATASOY

ÖZET

Bu çalışmada, üç boyutlu jeodezi kavramı içersinde, üç boyutlu dengeleme sonucunda ağın tamamına ve noktalara göre tanımlanan güven ölçütleri kısaca açıklanmakta ve daha sonra altı noktalı bir test ağında gerçekleştirilen sayısal uygulama sonuçları verilmektedir.

GİRİŞ

Bir ağ dengelemesi probleminin çözümü için kurulan fonksiyonel ve stokastik modeller, fiziksel ve geometrik ilişkilerin tümünü kapsamalı ve ölçülerin stokastik özelliklerini de tam olarak yansıtabilmelidir. Çünkü dengeleme işlemi sonucunda hesaplanan büyüklüklerin duyarlıkları, kurulan model geçerli ise gerçeğe uygundurlar (ÖZTÜRK, 1982). Bu nedenle kurulan stokastik ve fonksiyonel modeller denetlenir ve varsa model hataları giderilirler.

Üç boyutlu anlamda ağın dengelenmesi uzun hesapları gerektirdiğinden zorunlu olarak bilgisayarlardan yararlanılmaktadır. Programlama tekniğine daha uygun olması nedeniyle de dolaylı ölçüler dengelemesi tercih edilmektedir. En küçük kareler metoduna göre dolaylı ölçülerle yapılacak dengeleme işleminin matematik modeli

$$v = A x - l \quad ; P \tag{1}$$

şeklinde kurulmaktadır. Burada v: ölçülere getirilecek düzeltmeleri, x: konum bilgilerine ve seçilen diğer bilinmeyenlere getirilecek düzeltmeleri, -l: sabitleri ve P: gözlemlerin duyarlıklarını göstermektedir. A katsayılar matrisinin hesabı (WOLF, 1975), (RAPP, 1975), (FUBARA, 1972), (ATASOY, 1986) vb. de ayrıntılı olarak verilmektedir. (1) eşitliğindeki modelle, ölçülere getirilecek düzeltmelerin genelleştirilmiş en küçük kareler ilkesine uygun olarak belirlenmesini sağlayan Gauss-Markow modeline ilişkin normal denklemler

$$A^T P A x - A^T P l = 0 \tag{2}$$

şeklinde kurulmaktadır. Bu denklemlerin çözümü ile bulunacak bilinmeyenler

$$x = (A^T PA)^- A^T Pl \qquad (3)$$

olarak elde edilirler. (3) eşitliğinde bilenmeyenlerin ağırlık katsayıları ters matrisi

$$Q_{xx} = (A^T PA)^- \qquad (4)$$

olarak yazılırken, normal denklemlerden bu matrisin tersi, dayalı ağ dengelemesinde $(A^T PA)^-$ (Cayley tersi ile), serbest ağ dengelemesinde $(A^T PA)^+$ (Pseudo tersi ile) şeklinde elde edilmektedir.

Dengeleme sonucunda bulunacak birim ağırlıklı ölçünün ortalama hatasının soncul değeri,

$$m_o = (v^T Pv/f)^{0.5} \qquad (5)$$

şeklinde hesaplanmaktadır, f = (n-u+d) ağın toplam serbestlik derecesini göstermektedir. Burada n: ağdaki gözlemlerin toplam sayısını, u: bilinmeyenlerin toplam sayısını, d: ağın dış serbestlik derecesini göstermektedir. Ağda tüm noktaların koordinatları değişken alınıyorsa eğik uzunluk, düşey açı ve yatay doğrultu gözlemleri kullanıldığında d=6, aynı ölçü kümesi içinde eğik uzunluklar yoksa d=7 (üç ötelenme + üç dönüklük + ölçek) olmaktadır. Bilinmeyenlere ait varyans-kovaryans matrisi de

$$K_{xx} = m_o^2 \, Q_{xx} \qquad (6)$$

şeklinde elde edilmektedir.

ÜÇ BOYUTLU AĞLARDA GÜVEN ÖLÇÜTLERİ

Jeodezik ağların duyarlıkları ve güven ölçütleri ile ilgili kavramlar iki ana başlık altında incelenirler.

1. Ağın Tamamına İlişkin Ölçütler :

Bir jeodezik ağın güvenilir olabilmesi için dengeleme sırasında kaba ve sistematik ölçü hatalarının belirlenebilmesi, tanımlanan duyarlık ve güven ölçütleri ile ağın tamamına veya büyük bir bölümüne egemen olan model hatalarının belirlenmesi amaçlanır. Genelde, bu ölçütlerle fonksiyonel model hataları denetlenir.

Ağdaki noktaların konum duyarlıklarının kareleri toplamı ağın tamamı için bir güven ölçütüdür. p: ağdaki nokta sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^{p} (m_{x_i}^2 + m_{y_i}^2 + m_{z_i}^2) = \sum_{i=1}^{p} m_{p_i}^2 = iz \{ K_{xx} \} \qquad (7)$$

veya (6) eşitliği ile

$$\text{iz} \{ Q_{xx} \} = \min \tag{8}$$

şeklinde yazılabilen, koordinat bilinmeyenlerinin ağırlık katsayılar ters matrisi Q_{xx} in ana köşegen terimleri toplamı dengeleme işlemi için bir güven ölçütüdür. (8) eşitliğinin sağlanabilmesi için Q_{xx} matrisine ait λ_i özdeğerleri yardımı ile

$$\lambda_m = \max (\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_u) \tag{9}$$

değerinin minimum olması gerekmektedir. Ortalama konum duyarlığı, ağın tamamına ait bir ölçüttür.

$$m_p^2 = \frac{| m_{x_i}^2 + m_{y_i}^2 + m_{z_i}^2 |}{3p} \tag{10}$$

ile bulunacak ortalama konum hatası

$$m_p = m_o (\text{iz} \{ Q_{xx} \} / 3p)^{0.5} \tag{11}$$

şeklindedir. (11) eşitliğindeki Q_{xx} matrisi dayalı ağ dengelemesi sonucunda bulunuyorsa m_p ağın dış konum hatası veya serbest ağ dengelemesi sonucunda bulunuyorsa m_p ağın iç konum hatası olarak değerlendirilmektedir (ÖZTÜRK, 1982). Diğer taraftan, serbest ağ dengelemesinde (9) eşitliğindeki d adet özdeğerin sıfır yada sıfıra çok yakın değerler olacağı unutulmamalıdır.

2. Noktalara Göre Belirlenen Ölçütler :

Jeodezik ağlarda duyarlık ve güven ölçütleri genellikle noktalara göre tanımlanmışlardır. Bu ölçütler ayrıca noktaların duyarlıkları konusunda değerlendirme yapılmasında da kullanılmaktadırlar.

Ağ dengelemesi sonucunda hesaplanan Q_{xx} matrisinden bir P_i noktasına karşılık gelen elemanlardan oluşturulan Q_{ii} altmatrisi ;

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} \end{bmatrix}_i \tag{12}$$

yardımıyla,

$$\text{iz} \{K_{ii}\} = m_o^2 \text{ iz} \{Q_{ii}\} = m_o^2 (q_{xx} + q_{yy} + q_{zz})_i \tag{13}$$

veya

$$m_o \left(iz \{Q_{ii}\}\right)^{0.5} = m_{P_i} = \left(m^2_{x_i} + m^2_{y_i} + m^2_{z_i}\right)^{0.5} \tag{14}$$

Helmert Ortalama Konum Hatası bağıntısından hesaplanan hata hiperelipsoidi ve güven hiperelipsoidi de bir güven ölçütüdür. Diğer taraftan hata ve güven hiperelipsoidleri, nokta duyarlıkları konusunda sözü edilen diğer ölçütlerden daha fazla bilgi taşırlar ve çalışılan koordinat sisteminin dönmesinden ve ötelenmesinden bağımsızdırlar.

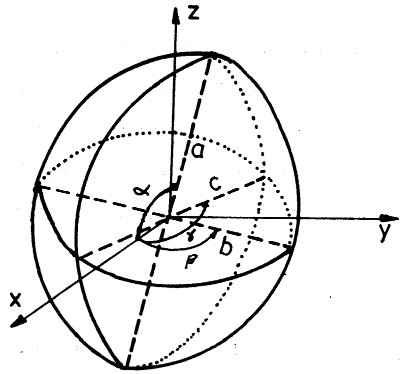
Q_{xx} matrisinden P_i noktasına ait λ_i özdeğerleri büyükten küçüğe doğru dizildiklerinde hata hiperelipsoidlerinin yarıeksen uzunlukları

$$\begin{aligned} a &= m_o \sqrt{\lambda_1} \\ b &= m_o \sqrt{\lambda_2} \\ c &= m_o \sqrt{\lambda_3} \end{aligned} \tag{15}$$

şeklinde bulunur (WOLF, 1968 ; 1975). Bu yarıeksenlerin doğrultuları, doğrultu kosinüsleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos (M/W) \\ \beta &= \arccos (N/W) \\ \gamma &= \arccos (T/W) \end{aligned} \tag{16}$$

olarak koordinat sistemine göre sırasıyla x, y ve z eksenlerinden olan dönüklükleri göstermektedir (Şekil-1).



Şekil-1 : Üç boyutlu güven elipsoidinin elemanları.

(16) eşitliğinde geçen katsayılar

$$
\begin{aligned}
M &= q_{xz}(q_{yy}-\lambda_j)-q_{yz}q_{xy} \\
N &= q_{yz}(q_{xx}-\lambda_j)-q_{xy}q_{xz} \\
T &= q_{xy}^2(q_{xx}-\lambda_j)(q_{yy}-\lambda_j) \\
W &= (M^2+N^2+T^2)^{0.5}
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

şeklinde elde edilmektedir. (15) eşitliği ile hesaplanan yarıeksen uzunlukları aynı zamanda noktaların ortalama konum hataları için de kullanılırlar.

$$m_{p_i} = (a^2+b^2+c^2)_i^{0.5} \qquad (18)$$

ile (14) eşitliğinde verilen Helmert Ortalama Konum Hatası elde edilir (WOLF, 1975).

Noktanın,(18) eşitliği ile hesaplanan bir hata hiperelipsoidinin içinde kalma olasılığı ortalama 0.38 dir. Bu oran en iyimser tahminle bile 0.68 i geçmemektedir. Bu nedenle güven ölçütü olarak hata hiperelipsoidleri yerine, olasılık değeri serbestçe seçilebilen güven hiperelipsoidleri kullanılmaktadır. Güven hiperelipsoidlerinin yarıeksenleri (15) eşitliği ile verilen yarıeksenlerin

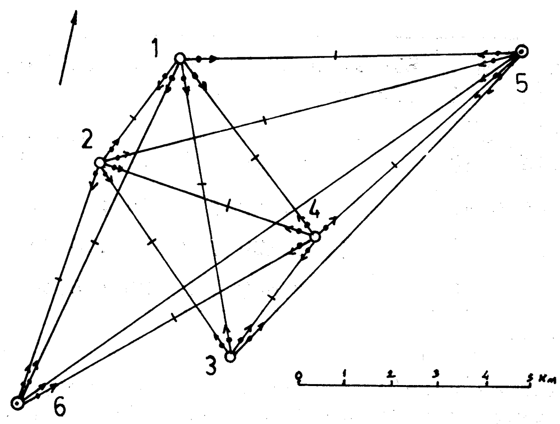
$$F_t = (3F_{3,f,1-\alpha})^{0.5} \qquad (19)$$

ile çarpılmasıyla bulunur. $F_{3,f,1-\alpha}$: α yanılma olasılığı, 3 ve f serbestlik dereceleri ile F-Fisher dağılım çizelgesinden alınmaktadır.

Serbest ağ dengelemesi sonucunda d adet özdeğerin sıfır ya da sıfıra çok yakın değerler olacağından (15) eşitliği ile bulunacak d tane yarıeksen hesaplanamayacaktır. Bu gerçekte olmayan dairesel veya çizgisel özellikli hiperelipsoidleri oluştururlar. Bu nedenle serbest ağ dengelemesi gündeme geldiğinde daha dikkatli davranılması gerektiği unutulmamalıdır.

SAYISAL UYGULAMA

Yukarıda kısaca açıklanan güven ölçütleri ile ilgili olarak, ikisi sabit altı noktalı bir test ağında gerçekleştirilen sayısal uygulamanın sonuçları aşağıda kısaca verilmektedir. Şekil-2'de verilen bu ağdaki gözlem sayısı, 29 yatay doğrultu, 26 düşey açı ve 12 eğik uzaklık olmak üzere toplam 67 dir.



⊙ : Dengelemede sabit alınan noktalar,

o : Dengeleme ve güven elipsleri hesaplanan noktalar,

: Ölçülen yatay doğrultular,

: Ölçülen düşey açılar,

: Ölçülen eğik uzunluklar.

Şekil-2 : Sayısal uygulamanın gerçekleştirildiği ağın geometrik şekli ve ölçme planı.

7 yöneltme bilinmeyeni ve 12 koordinat bilinmeyeni ile toplam bilinmeyen sayısının 19 olduğu bu ağda iki noktanın sabit alınması sonucunda d=0 olur. Toplam serbestlik derecesi f=48 olan bu ağın x, y, z yerel dikkoordinat sistemi esas alınarak yapılan dengeleme işlemi tamamlandıktan sonra düzeltmelerden hesaplanan birim ölçünün ortalama hatasının soncul değeri.

$$m_o = \pm\, 4.505^{cc}$$

dır. Model hipotezinin geçerli olduğu bu dengeleme işlemi sonucunda noktalara ait konum duyarlıkları ve her bir nokta için hesaplanan özdeğerler Tablo-1'de verilmektedir. (9) eşitliğine göre hesaplanan

$$\lambda_m = 1.100$$

dır. (11) eşitliğine göre hesaplanan ağın ortalama dış konum hatası da

$$m_p = \pm\, 2.217 \text{ cm}$$

olarak bulunmuştur.

Noktalara göre (15), (16) ve (19) eşitlikleri ile hesaplanan hata ve güven hiperelipsoidlerinin elemanları Tablo-2'de özetlenmiştir. Hesaplanan bu

Nokta No. i	m_{x_i} (cm)	m_{y_i} (cm)	m_{z_i} (cm)	m_{p_i} (cm)	Büyükten küçüğe doğru dizilmiş özdeğerler (λ_j, j=1,2,3)
1	2.40	2.25	3.18	4.58	0.728 ; 0.692 ; 0.598
2	2.51	1.99	3.04	4.42	0.665 ; 0.616 ; 0.433
3	2.81	2.89	3.25	5.18	1.100 ; 0.951 ; 0.919
4	2.23	2.11	3.13	4.38	0.640 ; 0.583 ; 0.501
Ortalama	2.49	2.31	3.15		

Tablo-1 : Noktaların ortalama hataları ve koordinat bilinmeyenleri kofaktörler matrisinden Jakobi iterasyon yöntemiyle hesaplanan özdeğerleri.

güven hiperelipsoidleri her nokta için Şekil-1'deki gibi çizildiklerinde, yorumları kısaca şöyledir.

Konum duyarlığı yönünden en kötü durumda olan 3 no.lu noktadır. Bu noktaya ait güven elipsoidi incelendiğinde, z ve y yönünde zayıflıklar gözlenmekte, iyileştirme işlemleri bu eksenlere göre planlanmalıdır. Diğer noktaların konum duyarlıkları ile hata ve güven hiperelipsoidleri yaklaşık homojen ve izotrop bir yapıda oldukları görülmektedir.

Nokta No.	Yarıeksen Uzunlukları		Eksen Dönüklükleri		
	Hata (cm)	Güven (cm)	α(grad)	β(grad)	γ(grad)
1	2.39	7.07	96.8883	105.5155	6.3365
	2.16	6.39	79.8958	130.9716	37.9388
	1.61	4.78	97.6580	103.3386	195.9209
2	1.99	5.90	92.8209	134.4757	34.3814
	1.71	5.06	99.0703	105.7700	194.1551
	0.85	2.51	99.8083	101.7160	198.2735
3	5.45	16.15	100.0634	99.8084	199.7973
	4.07	12.06	100.1336	99.5096	199.4930
	3.81	11.27	100.1577	99.3444	199.3264
4	1.85	5.47	97.7711	100.1553	197.7659
	1.53	4.53	98.6954	99.9609	198.6949
	1.13	3.35	99.0728	99.9425	199.0710

Tablo-2 : Noktalara göre hesaplanan hata ve güven hiperelipsoidlerinin yarıeksen uzunlukları ve dikkoordinat sistemine göre dönüklükleri.

Aynı ağın serbest dengelenmesi sonucunda bulunan değerler, doğal olarak burada verilenlerden daha küçük olmalarına rağmen 3 no.lu nokta yine aynı özellikleri yansıtmaktadır. Ancak 3 ile 6 no.lu noktalar arasında düşey açı ve eğik uzunluk ölçülerinin gerçekleştirilmesi halinde sözkonusu dört nokta aynı özellikleri göstermektedir.

SONUÇ

Üç boyutlu jeodezi kavramı içersinde, tüm jeodezi işlemlerinin iskeleti sayılân nirengi ağlarının üç boyutlu olarak kurulması, ölçülmesi ve hesaplanmasını gerektirmektedir. Sözkonusu bu ağların yukarıda kısaca açıklanan ölçütlerle kontrol edilerek fonksiyonel ve stokastik modellerinin gerçeğe ne kadar uygun olduklarının görülmesi açısından yararlıdır. Böylece uzun bir işlem dizisinden sonra ortaya çıkacak konum bilgilerine ne kadar güvenileceği, daha güvenilir sonuçlara ulaşmak için ağda zayıf kalan yer ve bölgelerin neler olduğu sorularına rahatlıkla karşılık bulunabilmektedir.

KAYNAKLAR

/1/ ATASOY, V. : Yersel Yöntemlerle Ölçülen Jeodezik Ağların Üç Boyutlu Dengelenmesi. K.Ü. Doktora Semineri II, Trabzon (Yayımlanmadı) 1986

/2/ FUBARA, D.M.J. : Three-dimensional Adjustment of Terrestrical Geodetic Networks, The Canadian Surveyor, September, 1972

/3/ ÖZTÜRK, E. : Jeodezik Ağlarda Güven Ölçütleri ve Ölçme Planının Enuygunlaştırılması, K.T.Ü. Yayınları, Trabzon 1982

/4/ RAPP, R.H. : Geometric Geodesy, volume II, Ohio State University, 1975

/5/ WOLF, H. : Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Fred Dummlers Verlag, Bonn 1968

/6/ WOLF, H. : Ausgleichungsrechnung, Formeln zur Praktischen Anwendung, Fred Dummlers Verlag, Bonn 1975