TÜRKİYE İÇİN YENİ BİR KOORDİNAT SİSTEMİ ARAŞTIRMASI *

Prof.Dr.Erdoğan ÖZBENLİ
Y.Müh. Ahmet KAYA

0. Giriş

Türkiye jeodezisi geometrik olarak, elipsoid soldner koordinatlarının Gauss-Krüger tasviri yolu ile düzleme aktarılması esasına dayanmaktadır. Ayrıca pratik ihtiyaçlar bakımından, küçük hesap alanları için lokal hesap küreleri de kullanılır. Elipsoid-küre-düzlem üçlüsünün yanında, Bir meridyeni esas alan Soldner sistemlerinin sözü edilen üçlünün her birini de dilim dilim parçaladığı düşünülürse, durumun sistem bütünlüğü açısından pek uygun olmadığı görülür. Gerçi bu sistemler uluslararası bir sistem olan UTM sistemi ile uyum içindedir, ancak bu durum bizi ülkemiz için yeni ve daha uygun bir ulusal koordinat sistemi arayışından alıkoymamalıdır.

Bu noktadan hareketle, aşağıda elipsoid ve küre üzerindeki hesaplamaları birleştiren, Türkiye'nin tamamı için geçerli tek bir koordinat sistemi ve bu sistemin bütün halinde düzleme tasvirini veren yeni bir hesap şekli tartışmaya açılmış bulunmaktadır. Konu, "elipsoidin küreye konform tasviri", "kürede büyük daire koordinat sisteminin tarifi" ve "büyük daire koordinat sisteminin düzleme konform tasviri" olmak üzere üç ana başlık altında ele alınacaktır.

1. Elipsoidin Küreye Konform Tasviri

Elipsoidin küreye konform tasviri için 2. Gauss tasviri esas alınmıştır (Grossmann 1976). Bu maksatla sözkonusu bölgenin ortasında bir $P_o(B_o,L_o)$ başlangıç noktası kabul edilir. Buna göre

$$r=\sqrt{M_o N_o}\ , \qquad K_1^2=1+e'^2\cos^4 B_o\ , \quad \sin\phi_o=\frac{1}{K_1}\sin B_o \tag{1}$$

(*) 5-6 Mayıs 1983 tarihli TUJJB XII. Genel Kurul Toplantıları, Türkiye Ulusal Jeodezi Komisyonuna sunulan tebliğ.

dır. Burada ; r tasvir küresinin yarıçapı, K_1 birinci tasvir sabiti ve ϕ_o da B_o başlangıç enleminin tasvir küresindeki karşılığıdır. İkinci tasvir sabiti ise

$$K_2 = \operatorname{arctanh}(\sin \phi_o') - K_1 \left[\operatorname{arctanh}(\sin B_o) - e \operatorname{arctanh}(e \sin B_o) \right] \tag{2}$$

bağıntısı ile tayin edilir. Böylece bir defaya mahsus olmak üzere r, K_1, K_2 ve ϕ_o belirlendikten sonra, her $P(B,L)$ noktası için küredeki $P'(\phi, \lambda)$ tasvirinin koordinatları

$$\sin\phi = \tanh\left\{ K_1 \left[\operatorname{arctanh}(\sin B) - e \operatorname{arctanh}(e \sin B) \right] + K_2 \right\} \tag{3}$$

ve

$$\ell = L - L_o \quad , \quad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$$

olmak üzere

$$\Delta\lambda = K_1 \cdot \ell \tag{4}$$

bağıntıları ile verilir (Özbenli 1982).

Bu şekilde elipsoid noktalarının küre tasvirleri elde edilmiş olur. Küre üzerinde elipsoide eşdeğer hesap yapabilmek için uzunluk ve doğrultu düzeltmelerinin de bilinmesine ihtiyaç vardır. Bir kenarın iki ucundaki doğrultu düzeltmeleri

$$\psi_1 = -\frac{1}{3}\, \eta_o^2 \tan\phi_o \frac{s}{r} \sin A_1 \cos\phi_1 \left(\frac{\Delta\phi_1^2}{\cos\phi_1} + 2\frac{\Delta\phi_m^2}{\cos\phi_m} \right)$$

$$\psi_2 = +\frac{1}{3}\, \eta_o^2 \tan\phi_o \frac{s}{r} \sin A_1 \cos\phi_1 \left(\frac{\Delta\phi_2^2}{\cos\phi_2} + 2\frac{\Delta\phi_m^2}{\cos\phi_m} \right) \tag{5}$$

ve uzunluk düzeltmesi ise

$$S - s = \frac{s}{9\,\rho^3}\,\eta_o^2 \tan \phi_o \,(\Delta\phi_1^3 + 4\Delta\phi_m^3 + \Delta\phi_2^3) \qquad (6)$$

formülleri ile ifade edilir. Burada

$$\psi_1 = A_1' - A_1 \quad , \quad \psi_2 = A_2' - A_2 \quad ,$$

$$\phi_m = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \qquad \Delta\phi_i = \phi_i - \phi_o \quad ,$$

A : elipsoidde jeodezik eğrinin azimutu,

A': kürede büyük dairenin azimutu,

S : elipsoidde jeodezik eğrinin uzunluğu,

s : kürede büyük daire yayının uzunluğudur.

Eğer küreden elipsoide geçmek isteniyorsa, ϕ küre enleminden B elipsoid enlemi

$$\sin B_{i+1} = \tanh \left\{ \frac{1}{K_1} \left[\operatorname{arctanh}(\sin\phi) - K_2 \right] + e \operatorname{arctanh}(e \sin B_i) \right\} \qquad (7)$$

formülünden iterasyonla elde edilir. İterasyon başlangıcında $B_1 = \phi$ alınabilir. Boylam farkı da

$$\ell = \frac{\Delta\lambda}{K_1} \qquad (8)$$

ile tayin edilir.

Hiç şüphesiz bir tasvir için en önemli kriter m diferansiyel ölçeğidir. Bu tasvirde diferansiyel ölçek

$$m = \frac{r \cos \phi}{N \cos B} K_1 \qquad (9)$$

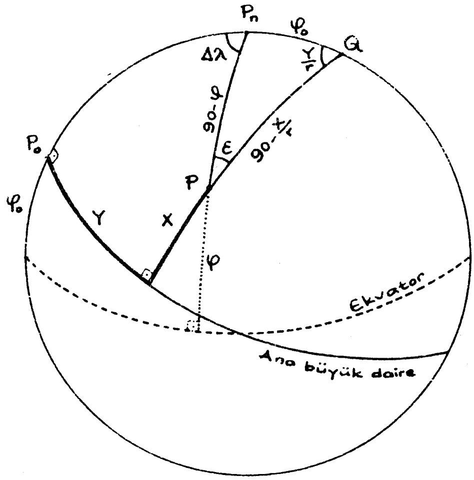
formülü ile belirlidir. (Özbenli 1982). B_o enlemli paralel dairede $m_o = 1$' dir. Diferansiyel ölçeğin 1'den farkının Türkiye için maksimum değeri $3x10^{-7}$ mertebesinde olmaktadır ki, bu da sözkonusu tasvirin orijinalle uyum halinde olduğunu gösterir.

Görüldüğü gibi elipsoid küreye konform olarak tasvir edilmiş, doğrultu ve uzunluk düzeltmeleri yardımı ile kürede elipsoide eşdeğer hesap yapma imkânı doğmuştur. Her zaman için küre değerlerinden elipsoid değerlerine geçmek imkânı mevcuttur. Bu sebeple bundan sonraki işlemler için hesap yüzeyi olarak elipsoid dikkate alınmayacak ve elipsoide nazaran fevkalade bir sadelik gösteren küresel hesapla yetinilecektir. Burada, lokal hesap kürelerinde olduğu gibi bir yaklaşıklık sözkonusu değildir. Bütün geçişler matematik bir bütünlük içinde kesin formüllerle sağlanabilmektedir.

2. Kürede Büyük Daire Koordinat Sistemi

Küre üzerinde bir jeodezik dik koordinat sistemine ***bir*** *meridyen veya ekvator esas alınabileceği gibi, herhangibir büyük daire de esas alınabilir. Böylece koordinat sisteminin yerleştirilmesinde daha serbest hareket imkânı doğar. Sözkonusu bölge veya ülkenin hakim uzantısına göre en uygun büyük daire seçilebilir ve "ana büyük daire" ismini vereceğimiz bu büyük daire, koordinat sistemine esas teşkil eder. Ana büyük daire, maksimum enleme ulaştığı P_o noktasında meridyene diktir ve bu nokta koordinat sisteminin başlangıç noktası, ana büyük daire de Y ordinat ekseni olarak alınır. X apsisleri ana büyük daireyi dik olarak kesen büyük daireler üzerinde ölçülür.*

P_o başlangıç noktasının coğrafi koordinatları (ϕ_o, λ_o) ise ; ana büyük daireye dik büyük daireler, P_o' ın meridyeni üzerinde ve P_n kutup noktasından ϕ_o uzaklığında bir Q noktasında kesişirler.



Şekil :1

Bir P noktasının bu sistemde küresel dik koordinatları ; bu noktadan ana büyük daireye indirilen dikin boyu X ve dik ayağının P_o'dan uzaklığı da Y olarak tarif edilir (Jordan/Eggert/Kneissl 1959).

Bir P noktasının bu sistemdeki (X,Y) küresel dik koordinatları ile (ϕ, λ) coğrafi koordinatları arasındaki ilişki $PP_n Q$ küresel üçgeni yardımı ile elde edilir :

$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$ olmak üzere

$$X = r \quad \arcsin\left(\cos\phi_{o} \sin\phi - \sin\phi_{o} \cos\phi \cos\Delta\lambda \right),$$

$$Y = r \quad \arctan\left(\frac{\sin \Delta \lambda}{\sin \phi_{o} \tan\phi + \cos\phi_{o} \cos\Delta\lambda} \right) , \qquad (10)$$

$$\varepsilon = \quad \arctan\left(\frac{\sin \Delta \lambda}{\cot\phi_{o} \cos\phi + \sin\phi \quad \sin\Delta \lambda} \right) ,$$

ve

$$\phi = \quad \arcsin\left(\cos\phi_{o} \sin \frac{X}{r} + \sin \phi_{o} \cos \frac{X}{r} \cos\frac{Y}{r}\right) ,$$

$$\Delta\lambda = \arctan\left(\frac{\sin \frac{Y}{r}}{\cos_{o} \cos\frac{Y}{r} - \sin \phi_{o} \tan\frac{X}{r}} \right) , \qquad (11)$$

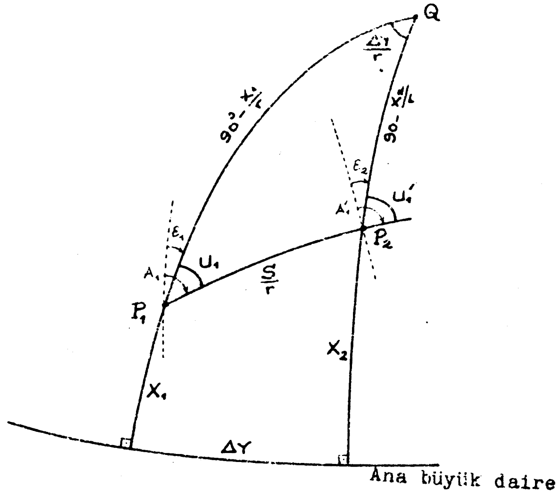
$$\varepsilon = \arctan\left(\frac{\sin \frac{Y}{r}}{\cot\phi_{o} \cos \frac{X}{r} - \sin\frac{X}{r}\cos\frac{Y}{r}} \right)$$

Buradaki ε açısı şekil 1'den de görüldüğü gibi, P noktasından geçen meridyen ile apsis büyük dairesi arasındaki açıdır.

Büyük daire koordinat sisteminde doğrultuların ifadesinde, başlangıç doğrultusu olarak $Y=$ sabit büyük daire yayları alınırsa, yeni bir U doğrultu açısı tarif edilebilir. Coğrafi koordinatlardaki azimuta identik olan bu doğrultu açısı

$$U = A - \varepsilon \qquad (12)$$

bağıntısı ile belirlidir.



Şekil: 2

Tarif edilen bu U doğrultu açısı ve uzunluklar yardımı ile, bir noktadan diğerine koordinatların taşınması veya koordinatları belli noktalar arasındaki kenarların uzunluk ve doğrultularının hesabı mümkündür. Jeodezik temel problemler denilen bu işlemler, $P_1\ P_2\ Q$ küresel üçgeninin çözümü ile gerçekleştirilir. Pek çok çözüm yollarından biri aşağıda örnek olarak verilmiştir.

1 nci jeodezik temel problem için :

$$X_2 = r \arcsin \left(\cos \frac{S}{r} \sin \frac{X_1}{r} + \sin \frac{S}{r} \cos \frac{X_1}{r} \cos U_1\right),$$

$$\Delta Y = r \arctan \left(\frac{\sin U_1}{\cos \frac{X_1}{r} \cot \frac{S}{r} - \sin \frac{X_1}{r} \cos U_1}\right), \quad Y_2 = Y_1 + \Delta Y, \qquad (13)$$

$$U_1' = \arctan \left(\frac{\sin U_1}{\cos \frac{S}{r} \cos U_1 - \sin \frac{S}{r} \tan \frac{X_1}{1}}\right), \quad U_2 = U_1' + \gamma$$

2 nci jeodezik temel problem için :

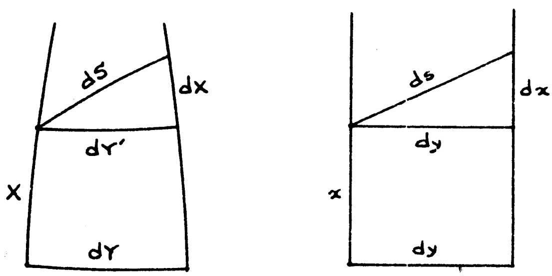
$$S = r \arccos\left(\sin\frac{X_1}{r}\sin\frac{X_2}{r} + \cos\frac{X_1}{r}\cos\frac{X_2}{r}\cos\frac{\Delta Y}{r}\right),$$

$$U_1 = \arctan\left(\frac{\sin\frac{\Delta Y}{r}}{\cos\frac{X_1}{r}\tan\frac{X_2}{r} - \sin\frac{X_1}{r}\cos\frac{\Delta Y}{r}}\right) \qquad (14)$$

$$U_1' = \arctan\left(\frac{\sin\frac{\Delta Y}{r}}{\sin\frac{X_2}{r}\cos\frac{\Delta Y}{r} - \cos\frac{X_2}{r}\tan\frac{X_1}{r}}\right) \qquad U_2 = U_1' + \pi$$

3. Büyük Daire Koordinat Sisteminin Düzleme Konform Tasviri

Diğer tasvir türlerinde olduğu gibi, ana büyük daire düzleme uzunluk koruyan biçimde ve y ekseni olarak tasvir edilsin. y eksenine dik doğrular da kürede Y sabit büyük dairelerinin tasvirleri olsunlar



Şekil:3

Ana büyük dairenin tasvirde uzunluk koruması istendiğine göre

$$dy = dY$$

olacaktır. Kürede, dY artımı X apsisinde dY' şeklinde küçüldüğü halde ; düzlemde $dy = dY$ artımı her apsis için sabit kalır. O halde küredeki diferansiyel üçgenin dY' kenarı düzleme dY/dY' oranında büyüyerek geçer. Konformluk gereği olarak, diferansiyel üçgenlerin benzerliğinin sağlanması için diğer dik kenar dX 'in de düzleme geçerken aynı oranda büyütülmesi gerekir. Büyüme oranı

$$\frac{dY}{dY'} = \sec \frac{X}{r}$$

dir. O halde

$$dy = dY = \sec \frac{X}{r} \, dY'$$

$$dx = \sec \frac{X}{r} \, dX \qquad (15)$$

elde edilir. Her iki tarafın entegrali, hiperbolik fonksiyonların da kullanılmasıyla

$$y = Y \qquad (16)$$

$$x = r \quad \operatorname{arctanh} (\sin \frac{X}{r})$$

tasvir denklemlerini verir. Buradan Y ve X çözülerek, düzlem değerlerden küre koordinatları

$$Y = y$$

$$X = r \quad \arcsin \left(\tanh \frac{x}{r}\right) \qquad (17)$$

formülleri ile elde edilir. Bu tasvirde diferansiyel ölçek

$$m = \sec \frac{X}{r} ,$$

doğrultu düzeltmeleri

$$\delta_1 = -\frac{\rho}{6r^2}(2x_1+x_2)(y_2-y_1)\left[1-\frac{1}{54r^2}(2x_1+x_2)(x_1+5x_2)\right],$$

$$\delta_2 = -\frac{\rho}{6r^2}(x_1+2x_2)(y_1-y_2)\left[1-\frac{1}{54r^2}(x_1+2x_2)(5x_1+x_2)\right], \tag{18}$$

ve uzunluk düzeltmesi de

$$S-s = -\frac{s}{6r^2}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+\frac{s}{24r^4}(x_1^4+x_1^3x_2+x_1^2\,x_2^2+x_1\,x_2^3+x_2^4) \tag{19}$$

formülleri ile hesaplanır (Özbenli/Kaya 1983). Bu düzeltmelerle düzlemde küreye eşdeğer hesap yapma imkânı elde edilir

Eğer (16) tasvir denklemlerinde X ve Y için (10)'daki değerleri yerine konulursa, tasvir koordinatlarını coğrafi koordinatlar cinsinden veren

$$x = r\ \text{arctanh}\,(\cos\phi_o\ \sin\phi - \sin\phi_o\cos\phi\cos\Delta\lambda),$$

$$y = r\ \arctan\left(\frac{\sin\Delta\lambda}{\cos\phi_o\ \cos\Delta\lambda+\sin\phi_o\ \tan\phi}\right), \tag{20}$$

ve (11)'de (17) değerleri dikkate alınırsa, coğrafi koordinatları tasvir koordinatları cinsinden veren

$$\phi = \arcsin\left(\frac{\cos\phi_o\ \sinh\frac{x}{r} - \sin\phi_o\ \cos\frac{y}{r}}{\cosh\frac{x}{r}}\right),$$

$$\Delta\lambda = \arctan\left(\frac{\sin\frac{y}{r}}{\cos\phi_o\ \cos\frac{y}{r} - \sin\phi_o\ \sinh\frac{x}{r}}\right) \tag{21}$$

formülleri elde edilir.

Türkiye için düşünüldüğünde

$$\phi_o = 39^o \quad , \quad \lambda_o = 35^o$$

koordinatlı bir P_o başlangıç noktası seçilebilir(*). Bu taktirde sözkonusu ana büyük daire Türkiye'yi uzunlamasına ortadan kateder ve Türkiye'nin en kuzey ve en güney noktaları bu eksenden maksimum 3^o mertebesinde uzak kalır.

4. Sonuç

Bütün Türkiye için geçerli tek bir koordinat sisteminin elde edilmesi amacıyla, önce elipsoidin küreye konform tasviri verilmiş ve bundan sonraki işlemler - pratiğin de ihtiyacına uygun olarak - küre ile sınırlı tutulmuştur. Elipsoid - küre, küre-elipsoid geçişi verilen formüllerle veya bunlara göre düzenlenecek cetvellerle mümkün olacağından burada herhangi bir yaklaşıklık sözkonusu değildir. Kürede tarif edilen büyük daire sistemi sayesinde bütün Türkiye için geçerli tek bir koordinat sistemi elde edilmiştir. Bu sistemin düzleme konform tasviri de UTM koordinatlarından farklı olarak tek bir düzlem koordinat sistemi verir. Bu koordinatlarla bütün Türkiye için, herhangibir ilâve tarife ve transformasyona ihtiyaç duyulmadan düzlem hesap yapma imkânı elde edilir.

Meridyen sisteminin (Soldner koordinatlarının) ve dolayısıyla UTM sisteminin farklı meridyenleri esas alan çok dilimli koordinat sistemleri arasındaki transformasyon ve dilim sınırlarında aynı noktaların heriki sistemde hesaplanma mecburiyeti küçümsenmeyecek külfetlerdir.

(*)Bu küre değerlerine elipsoid üzerinde karşılık gelen başlangıç koordinatları

$$B_o = 39^o\ 03'\ 25{,}47149'' \quad , \quad L_o = 35^o$$

olmaktadır.

Bilindiği gibi düzlem koordinatların uygulamada geniş bir kullanma alanı vardır. Ülke savunması açısından bu koordinatların gizli tutulması arzu edilir. Uluslararası bir sistem olan UTM sisteminde, kullanıcının ihtiyaçları ile bu gizliliği bağdaştırmak ötedenberi bir problem olmuştur. Büyük daire sisteminin bu açıdan, ulusal bir sistem olarak bu konuya bir çözüm getirme şansı vardır.

Burada teklif edilen koordinat sistemi ve bunun düzleme tasviri ile Rosenmund tarafından teklif edilen ve Odermatt'ın geliştirdiği İsviçre projeksiyon sistemi arasında eşdeğerliğe yakın bir ilişki vardır(Odermatt 1961). Bu durum bir bakıma teklif edilen sistemin kullanılabilirliğini göstermektedir. İsviçre projeksiyon sistemi için Odermatt tarafından çıkarılan formüller oldukça uzun ve karışık bir matematik model sonucunda elde edilmişlerdir. Büyük daire sistemi ve bunun tasviri ile ilgili formüller hem formül olarak daha kısa ve hem de dayandıkları matematik model yönünden daha sadedirler. Önemli bir fark da Odermatt'ın doğrudan doğruya coğrafi koordinatlardan tasvir koordinatlarına geçmesine karşılık, büyük daire sisteminde tasvir koordinatlarına küresel dik koordinatlar üzerinden ulaşılmasıdır. Kürede metrik koordinatların elde bulunması, küre üzerinde yapılacak jeodezik hesaplar bakımından kolaylık sağlar.

Türkiye gibi, jeodezi hizmetleri belli bir seviyede gelismis olan bir ülkede, UTM'nin yanında teklif edilen bu yeni sisteme bir anda adapte olunmasını beklemek mümkün değildir. Ancak bu işlemin ilk anda göründüğü kadar zor olmadığı da bilinmelidir. Zira meridyen sistemi, dolayısı ile UTM koordinatlarıyla karşılıklı transformasyon imkânı mevcuttur. En azından bu sistemin bilimsel araştırmalarda kullanılabileceği ve yayınlama sırasında gizlilik engelinin ortadan kalkmış olabileceği gerçeği dahi araştırıcılar için önemli bir gelişmedir.

Elbette teklif edilen sistem tartışılacak, hata ve noksanları varsa düzeltilip, geliştirildikten sonra uygulamaya geçilebilecektir.

Bu tebliğ, eğer böyle bir tartışmaya başlangıç teşkil edebilirse, amacına ulaşmış olacaktır.

K A Y N A K L A R

Grossmann, W. (1976) : *Geodaetische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung, Stuttgart, 1976*

Jordan/Eggert/Kneissl (1959) : *Handbuch der Vermessungskunde, Band IV/2 Stuttgart, 1959*

Odermatt, H. (1961) : *Eine neue Darstellung des schweizerischen Projektionssystems, ZfV 1961/10, s.350-362.*

ÖZBENLİ, E. (1982) : *Elipsoidin Küreye Konform Tasviri, KTÜ-Yer Bil. Fak. Araştırma Raporları Serisi, No: 1982/3, Trabzon, 1982.*

Özbenli, E./Kaya, A. (1983) : *Herhangibir Büyük Daireyi Esas Alan Küresel Dik Koordinat Sistemi ve Bunun Düzleme Konform Tasviri, KÜ Müh.-Mim. Fak.Araştırma ve İnceleme Yayınları Dizisi-1983/4 Trabzon 1983*