

**TÜRKİYE I NCI DERECE TRIYANGÜLASYON AĞININ
DENGELENMESİ**

Derleyen: Ergun UĞUR
Harita Genel Müdürlüğü

I. GENEL AÇIKLAMALAR :

Türkiye I nci Derece Triyagülasyon Ağı, tek referans noktasına bağlı olarak ve herhangi bir çevre noktaya dayandırılmadan, 1954 yılında dengelenmiştir.

Ağın yöneltimi (orientation) 98 adet Laplace noktası ile yapılmış ve ölçeği 40 adet baz büyütme ağından alınmıştır. Dengeleme hesabı, UNIVAG Sisteminde, simultan çözüm yoluyla, bütün ağ için tek aşamada yürütülmüştür. Dengelemede Koordinatların Değişimi Yöntemi (variation of coordinates) kullanılmış; daha açık bir anlatımla, kurulan şart denklemleri, gözlem denklemleri içine alınarak, bunlara Endirekt Gözlemlerin Dengelenmesi yöntemi uygulanmıştır.

Gözlem denklemlerinin katsayılarını yalınlaştırmak amacıyla bütün ağ, bir Lambert Konformal Konik Projeksiyonu üzerine alınarak, dengeleme düzlem üzerinde yürütülmüştür.

Laplace istasyonlarındaki astronomik azimut ölçmelerini hatasız varsaymanın ağa istenmeyen gerilimler getireceği düşünülerek, dengelemeden önce, Laplace azimutları ile geodezik açılar arasında, ağırlıklı bir ödengeleme programlanmıştır.

İnvar telleri ile mekanik yoldan ölçülen 40 adet bazda hesaplanmış bulunan Olasılıklı Oransal Hatalar (probable relative errors) 1/1.800.000 değerinin altındadır. Ancak bu oransal hata, bir baz büyütme kenarında 1/178.000 değerine kadar çıkabilmektedir.

Baz büyütme ağları dengelemesi ile elde edilen baz büyütme kenarlarının tümü, hatasız varsayılarak ana dengelemeye sokulmuştur.

Ana dengelemede, 786 adet istasyonu birbirine bağlayan 3538 adet doğrultu için yazılan gözlem denklemleri kullanılmıştır. Başlangıçta bu gözlem denklemlerinde $786 \times 3 = 2358$ adet bilinmeyen mevcutken, bunların sayısı, Schreiber Kuralı ile yöneltim bilinmeyenlerinin kaldırılması ve şart denklemlerinin gözlem denklemleri içine alınması ile $786 \times 2 - (98 + 2 + 40) = 1432$ bilinmiyene indirilmiştir.

Dengelemeden sonra, Birim Ağırlıktaki Gözlemin Ortalama Hatası olarak $\pm 0,681''$ değeri bulunmuştur. (Bk. Bölüm VI. ÖZET)

II. GEÇİCİ KOORDİNAT HESAPLARI :

98 adet Laplace istasyonunun enlem, boylam ve azimut ölçmelerine, diğer klâsik redüksiyonların yanısıra, Pol Varyasyonu ve Zaman Sinyali düzeltmeleri de getirilmiş; yıldız yerlerinin hesaplarında FK-3 Kataloğundan yararlanılmıştır.

Ana dengelemeden önce bu 98 Laplace istasyonunu birleştiren 124 adet zincir oluşturulmuş ve geodezik noktaların koordinat değerleri bu Laplace noktalarına bağlı olarak hesaplanmıştır.

124 zincirin ön hesaplarında, zincir kapanma hatalarının 0,100"yi geçmemesi halinde sonuçlar olduğu gibi ana dengelemeye alınmış, daha büyük kapanmalarda kapanma hataları, zincir boyunca, uzaklıklarla orantılı olarak ölçülen doğrultulara dağıtılmıştır.

Laplace Azimut Öndengelemesi sonucunda, doğrultulara getirilen düzeltmeler, geçici koordinatlarda 5 metreden daha büyük değişimlere yol açıyorsa, bu düzeltilmiş doğrultularla hesaplanan koordinatlar, geçici koordinat olarak ana dengelemeye alınmıştır. Bu çeşit farklılaşmalara 124 zincirin yalnız 10 kadarında rastlanmıştır.

III. LAPLACE AZİMUT ÖN DENGELEMESİ :

98 Astronomi noktasındaki Laplace azimutlarını sabit tutmakla, ağa gereksiz bir gerilim verileceği düşünülmüş ve bir Azimut Öndengelemesi programlanmıştır. Burada:

$$\bar{\alpha} = \alpha^* - (\lambda^* - \lambda) \cdot \sin \varphi \quad (1)$$

şeklindeki Laplace Eşitliğine

$$\delta = \delta \bar{\alpha} = \delta \alpha^* - \delta \lambda^* \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

bağıntısı yardımıyla, geodezik azimut ve astronomik boylam düzeltmelerinin fonksiyonu olarak bir koreksiyon getirilmesi uygun görülmüştür. (Kaynak: Wolf, Allgemeine Betrachtungen zur Azimuthausgleichung des Zentraleuropäischen Netzes, Bamberg 1949)

Böylece hesaplanan düzeltmeler Laplace azimutlarına eklenmiş ve bu azimutlar, ana dengelemeye şart olarak alınmıştır.

IV. ANA DENGELEME :

A. Geçici Koordinatlarda Son Düzeltmeler: Bazı zincirlerin öndengelemesinde büyük değişmelerin ortaya çıkması, buralardaki ilk geçici koordinatlara yeni düzeltmelerin getirilmesini gerekli kılmıştır. Bu durum özellikle Kuzeydoğudaki yedi zincir için söz konusu olmuş, buralarda dx ve dy mutlak değerlerinde 3,6 m. ile 13,9 m. arasında değişmeler görülmüştür. Bunlar ve bu büyüklük düzeni içindeki diğer birkaç zincirdeki uyumsuzluklar uygun dönüşüm ve ortalama alma işlemleri ile en aza indirilmiştir.

Bağımsız zincir dengelemeleri, gözlemlerde ve geçici koordinatlardaki bütün kaba hataları ortaya çıkarmıştır.

B. Koordinatların Değişimi ile Dengeleme Yöntemi :

Koordinat değişimleri yardımıyla bir triyângülasyon ağının dengelenmesinde her istasyonun yeri için ilk yaklaşımı veren geçici koordinatlara ve bu istasyonlarda gözlenmiş doğrultu veya açı gruplarına ihtiyaç bulunmaktadır.

Türkiye ağı dengelemesi doğrultularla yürütülmüştür. Bu durumda başlangıçta her gözlem denkleminde, bilinmeyen olarak dört koordinat düzeltme-

si dx_i , dy_i , dx_k , ve dy_k ile birer yöneltim düzeltmesi z_i yer almıştır.

Gözlem denklemleri sistemi tamamlandığında, buradan (vv) toplamının minimum olma koşulu ile, normal denklemler kurulabilir. Ancak bu durumda dengelemenin çözümünde 4 Bağımsızlık Derecesi (degrees of freedom) bulunmaktadır. Yani ağ, koordinat eksenlerinin her biri boyunca kaydırılabilir, bir merkez çevresinde döndürülebilir ve yüzey üstünde daralıp genişleyebilir. Bu bağımsızlık dereceleri kontrol altına alınmazsa, gözlem denklemleri sistemi, dört bilinmeyenli bir sınıra erişerek, sonuç belirsizliğe gider.

Bağımsızlık derecelerini kontrol altında tutabilmek üzere, bu dengelemede, bir istasyonun konumu ve birçok azimut ve kenar sabit tutulmuştur. Bu işlem, ek şart denklemleri uygulayarak yürütülmüştür.

Dengelenen Türkiye ağı, her iki doğrultuda ölçülmüş 1769 kenarın oluşturduğu 786 istasyonla kuruludur. Buna göre orijinal gözlem denklemleri sistemi $1769 \times 2 = 3538$ eşitlikte $786 \times 3 = 2358$ bilinmiyeni içermektedir.

C. Schreiber Kuralı :

Gözlem denklemlerindeki yöneltim bilinmeyenleri (z) ler, Schreiber Kuralına göre yok edildiğinde, denklemleri içindeki terim sayısı artmış, fakat bilinmeyen sayısının üçte birinin başlangıçta elimine edilmesi, normal denklemlerin kuruluşu ve çözümünde büyük kolaylık sağlanmıştır.

Bu sayede, Türkiye ağına bulunması gereken $2358 - 140 = 2218$ normal denklem yerine, $2218 - 786 = 1432$ normal denklem kurulmuştur.

D. Şart Denklemlerinin Kuruluş Yöntemleri :

1. Laplace Azimut Şart Denklemleri : (1) de gösterilen Laplace Eşitliğinden hareketle, yeterli yaklaşımlardan yararlanarak ve geçici değerler için ($^{\circ}$) üs indeksini kullanarak

$$\alpha^* - \alpha^{\circ} - (\lambda^* - \lambda^{\circ}) \cdot \sin \varphi^{\circ} + d \lambda \cdot \sin \varphi^{\circ} - d \alpha = 0 \quad (3)$$

yazılabilir.

Düz azimut ve III.bölümde açıklanan indirgemeler ile,

$$\begin{aligned} \alpha &= t - (t-T) + \delta \\ \alpha^{\circ} &= t^{\circ} - (t-T)^{\circ} + \delta^{\circ} \end{aligned} \quad d\alpha = dt - d(t-T) + d\delta \quad (4)$$

ilişkilerinden yararlanarak Laplace Denklemi

$$(\bar{t} - t^{\circ}) - dt + d(t-T) - d\delta + d\lambda \cdot \sin \varphi^{\circ} = 0 \quad (5)$$

şeklini alır. Burada \bar{t} ile, dengelenmemiş astronomik değerlerle oluşturulan

$$\bar{t} = \alpha^* - (\lambda^* - \lambda^{\circ}) \cdot \sin \varphi^{\circ} - \delta^{\circ} + (t-T)^{\circ} \quad (6)$$

ifadesi kısaltılmıştır.

Buradan itibaren (4) deki indirgeme değeri için, Lambert Konformal Konik Projeksiyonda geçerli bulunan değeri yazılır ve gene aynı projeksiyonun ilgili terimleri açılırsa, 98 astronomi noktası için dx_i , dy_i , dx_k , dy_k ile belirlenen dörder bilinmeyenli, 98 adet Laplace Eşitliği oluşturulabilir;

$$(\bar{t}_{ik} - \bar{t}_{ik}^0) + a_{ik} dy_i + \left[\frac{\rho (\sin \varphi_i - \sin \varphi_0)}{N_0 \cdot \cos \varphi_0} + b_{ik} \right] dx_i - a_{ik} dy_k - b_{ik} dx_k = 0 \quad (7)$$

Bu denklemlerdeki $(\bar{t}_{ik} - \bar{t}_{ik}^0)$ terimleri, gözlem denklemleri sabit sayılarını anlatmaktadır.

2. Baz Büyütme Kenarları Şart Denklemleri :40 adet baz büyütme kenarına ait şart denklemlerinin kuruluşunda, düzkenarlar için geçerli olan matematik temel bağıntılarından hareketle ve gerekli diferansiyel işlemlerle,

$$(s_0 - s) + \frac{y_i - y_k}{s_0} \cdot dy_i + \frac{x_i - x_k}{s_0} \cdot dx_i - \frac{y_i - y_k}{s_0} \cdot dy_k - \frac{x_i - x_k}{s_0} \cdot dx_k = 0 \quad (8)$$

bağıntısı bulunacaktır.

Buradaki $(s - s_0)$ sabit terimleri, geçici koordinat değerleri ile hesaplanan s_0 ve baz büyütme açısında hesaplanan s değerlerinin farkları ile oluşturulmuştur.

3. Sabit Nokta Şart Denklemleri: Dengelemede tek çözümü sağlamak için, en az bir azimutun ve bir kenar boyunun yanısıra en az bir noktaya ait konum değerlerinin de sabit tutulması gerekmektedir. Türkiye I nci Derece Açında çok sayıda kenar ve azimut sabit tutulurken, yalnız bir noktaya ait konum değerlerinin sabit tutulması ile yetinilmiştir. Bu nokta Meşedağı Astronomi Noktasıdır. Bu noktanın astronomik koordinatları geçici geodezik koordinatları ile eşdeğer tutulmuş (sıfır çekül sapması) ve dengelemeye, buradaki değişimler için $dx=0$, $dy=0$ şartları konulmuştur.

Böylece ağda toplam $98+40+2 = 140$ şart denklemleri kurulmuştur.

E. Şart Denklemlerinin Kullanılış Yöntemi :

Burada n sayıda gözlem denklemleri, m sayıda bilinmeyen ile verilmiş, ayrıca bilinmeyenlerin bir bölümü ile r sayıda şart denklemleri kurulmuştur. Bu durumda $(m-r)$ sayıda bilinmeyen ile, en küçük kareler yöntemi-ne dayalı olarak bir " Şartlı Gözlem Denklemleri Sistemi" kurulabilir.

Sonradan r sayıda bilinmeyen, kendilerine ait çözülmüş şart denklemlerinde, tersten yerine konularak bulunabilir.

Türkiye ağ dengelemesinde, başlangıç noktasını sabitleştiren iki denklem dışındaki şart denklemlerinin tümü, Laplace azimutu ve baz büyütme kenarının iki ucundaki koordinat değişimleri ile, dörder bilinmeyeni içermektedir.

V. KONTROLLAR :

A. Dengeleme Hesapları Sırasında Yapılan Kontroller :

1. Toplam kontrolleri : Normal denklem matrisi sonunda bir toplam sütunu açılmış ve bu sütun da diğer elemanlarla birlikte indirgenmiş;

bu terim, her sırada indirgeme ile oluşan terimler toplamı ile karşılaştırılmıştır.

2. vv Toplamı kontrolü : Normal denklem algoritmusuna, ll toplamı sütunu da eklenerek, son indirgeme basamağında vv toplamına eşit olması gereken, m. sıradaki ll toplamı redüksiyonu hesaplanmıştır.

Diğer taraftan, bilinmeyenler hesaplandıktan sonra

$$[vv] = [ll] - x_1[al] - x_2[bl] - x_3[cl] - \dots \quad (9)$$

bağıntısı yardımıyla da vv toplamı bulunmuştur. v Düzeltme değerleri, ayrı ayrı, şartlı gözlem denklemlerinden (v_C), Schreiber gözlem denklemlerinden (v_S) ve orijinal gözlem denklemlerinden (v_O) hesaplandığında, teorik olarak bütün bunların kare toplamalarının eşit olmaları gerekecektir. Buna göre, yuvarlatma hataları toleransı içinde

$$\begin{aligned} [vv] &= [ll.m] &&= 612,408 \\ &= [ll] - x_1[al] - \dots = 612,408 \\ &= [v_C \ v_C] &&= 612,408 \quad (10) \\ &= [v_S \ v_S] &&= 612,381 \\ &= [v_O \ v_O] &&= 612,381 \end{aligned}$$

değerleri bulunmuştur.

3. (t-T) Toleransı : (t-T) indirgemeleri hem dengelenmiş koordinatlarla hem de geçici koordinatlarla hesaplanmış; iki değer sistemi arasında 0,005"den daha büyük farklılaşma saptanmamıştır.

B. Üçgen Kapanma Kontrolleri :

Ağdaki 1027 üçgenin herbirinde, dengelemeden sonra,

$$(\alpha' + \beta' + \delta') - (\alpha + \beta + \delta) = \sum v \quad (11)$$

kontrolleri yapılmış ve burada 0,004"nin altında kalan farklılaşmalar görülmüştür.

C. Şartların Kontrolü :

40 Adet baz büyütme kenarının dengelenmiş uzunlukları ile, dengeli koordinatlardan hesaplanan uzunluklar arasındaki en büyük farklılaşma 3 mm kadardır.

Laplace azimut ödengelemesinden çıkarılan azimutlarla, dengeli koordinatlarla hesaplanan azimutlar arasında en büyük fark 0,013" kadardır.

D. Zincir Kapanma Kontrolleri :

Laplace azimutlarının kapanma kontrolleri 124 zincir için yapılmıştır. Burada her zincir için, bir uçtan diğer uca hesaplanan azimutlar, son uçta dengeli koordinatlarla hesaplanan azimutlarla karşılaştırılmış;

en büyük fark 0,0664" olarak bulunmuştur.

Baz büyütme kenarlarının kapanma kontrolleri, 40 baz büyütme açısını birleştiren 65 zincir üzerinde, Legendre Teoreminden yararlanarak yapılmış; bulunan en büyük fark 5 mm kadar olmuştur.

VI. ÖZET:

İstasyon sayısı	786
Gözlenmiş doğrultu sayısı	3538
Laplace şart denklemleri sayısı	98
Kenar şartı sayısı (Baz büyütme kenarları)	40
Normal denklem sayısı	1432
Gözlenmiş bir doğrultunun karesel ortalama hatası (sq.mean error).....	0,681"
Gözlenmiş bir doğrultunun olasılıklı hatası (probable error)	0,459"
Gözlenmiş bir doğrultuda maksimum hata	2,885"
Üçgen sayısı	1027
Ortalama üçgen kapanması	0,907"
Maksimum üçgen kapanması	4,046"
İnternasyonal yaklaşık formüle göre bir açının ortalama hatası (üçgen kapanmalarından).....	0,670"