

## TRİGONOMETRİK YÜKSEKLİK AĞLARININ DENGELENMESİ

Veysel ATASOY

### ÖZET

Nirengi ağlarının üç boyutlu olarak kurulması, ölçülmesi ve hesaplanması günümüzde artık zorunluluk haline gelmiştir. Bu çalışmada, ağların üçüncü boyutu olan yükseklik konusu ele alınmış ve yüksekliklerin, bölgesel olarak kurulan ağların düşey açı gözlemlerinden yararlanarak trigonometrik yöntemle belirlenmesi açıklanmıştır. Gerekli olan düşey açıların ölçme koşulları, refraksiyon ile çekül sapması bileşenlerinin düşey açılar üzerindeki etkilerinin belirlenmesi ve trigonometrik yükseklik ağlarının dengelenmesinin küramsal temelleri kısaca anlatıldıktan sonra, bu işlemler 12 noktalı bir ağa uygulanarak sayısal sonuçları özetlenmiştir.

### GİRİŞ

Jeodezik anlamda yükseklik ölçüsü denilince, ilk akla gelen uygulamada en iyi sonuçları vermesi nedeniyle geometrik nivelandır. Ancak pratik olarak geometrik nivelmanın uygulanamadığı yerlerde yükseklik belirleme işlemleri zorunlu olarak trigonometrik yöntemlerle yapılmaktadır. Bilindiği gibi trigonometrik yöntemlerle yükseklik farklarının belirlenmesinde düşey açı gözlemlerinden yararlanılmaktadır. Düşey açılar, atmosferik koşullardan yataş açılarla göre çok daha fazla etkilenmekte, refraksiyon (ışın kırılması) olarak tanımlanan bu etki, hesaplanacak yükseklikler üzerinde olumsuzluklara neden olmaktadır. Yükseklikler, genellikle dağlık yerlerde veya topografik yapının bozuk olduğu alanlarda trigonometrik olarak belirlendiklerinden, ölçülen düşey açıların içerisinde çekül sapması bileşenlerinin etkileri de bulunmaktadır.

### 1- TRİGONOMETRİK YÜKSEKLİK AĞLARININ DENGELENMESİ

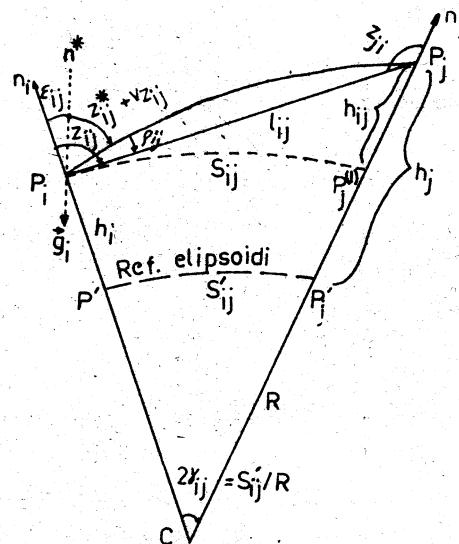
#### 1.1- Trigonometrik Yükseklik

Yükseklikler, kabul edilen referans yüzeyine ve ölçü yapılan düşey doğrultunun tanımına bağlı olarak çeşitli adlar alırlar. Ancak jeodezik anlamda en çok kullanılan kavram  $h_i$  elipsoid yüksekliğidir. Trigonometrik yükseklikler de referans elipsoidinden olan yüksekliklerdir (HEISKANEN; vd. 1984).

Trigonometrik yükseklik farkı  $h_{ij}$ ,  $P_i P_j C$  üçgeninde (şekil-1) tanjant serisi yardımıyla (VANICEK 1982).

$$h_{ij} = s_{ij} \left( 1 + \frac{h_m}{R} + \frac{s_{ij}}{12R^2} \right) \tan \left( \frac{z_{ji} - z_{ij}}{2} \right), \quad h_m = \frac{h_i + h_j}{2} \quad (1)$$

Şekilde hesaplanmaktadır.



Şekil 1 : Trigonometrik yükseklik farkı ve trigonometrik yükseklik bağıntıları.

Verilen bu eşitlikte ölçülen değerler  $z_{ij}$  düşey açılarıdır.  $P_i$  ve  $P_j$  noktaları arasındaki gerçek düşey açı ise,

$$z_{ij}^* = z_{ij}^* + v_{z_{ij}} + d_{z_{ij}} \quad (2)$$

dir. Burada  $z_{ij}^*$  arazide ölçülen düşey açayı,  $v_{z_{ij}}$  de bu açının dengelemeye sonucunda aldığı düzeltme değerini göstermektedir.  $d_{z_{ij}}$  parametresi, çekül sapması bileşenlerinin ve refraksiyon katsayılarının  $z_{ij}$  üzerindeki etkilerini içermektedir.

$$d_{z_{ij}} = \epsilon_{ij} + \rho_{ij} \quad (3)$$

$$\epsilon_{ij} = \xi_i \cos \alpha_{ij} + \eta_i \sin \alpha_{ij}, \quad \rho_{ij} = k_{ij} \gamma_{ij}$$

Kullanılan yatay veya eğik uzaklıklara ve ölçülerin tek ya da çift taraflı olmasına göre trigonometrik yükseklik farklarının hesabında dört ayrı formül kullanılmaktadır. Söz konusu bağıntılar,

$$h_{ij} = s_{ij} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos(z_{ij} - \gamma_{ij})}{\sin(z_{ij} - 2\gamma_{ij})} \\ \frac{\cos(z_{ij} - \gamma_{ij})}{\cos \gamma_{ij}} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{tek taraflı gözlemler} \\ \text{kullanılarak hesaplanan} \\ \text{yükseklik farkları.} \end{array} \quad (4)$$

$$h_{ij} = l_{ij} \frac{\sin \frac{1}{2}(z_{ji} - z_{ij})}{\cos(\frac{1}{2}(z_{ij} - z_{ji}) + \gamma_{ij})} \quad \begin{array}{l} \text{Karşılıklı gözlemler} \\ \text{kullanılarak hesaplanan} \\ \text{yükseklik farkları} \end{array} \quad (5)$$

$$h_{ij} = s_{ij} \frac{\sin \frac{1}{2}(z_{ji} - z_{ij})}{\cos(\frac{1}{2}(z_{ij} - z_{ji}) + \gamma_{ij})} \quad \begin{array}{l} \text{Karşılıklı gözlemler} \\ \text{kullanılarak hesaplanan} \\ \text{yükseklik farkları} \end{array} \quad (6)$$

$$h_{ij} = l_{ij} \frac{\sin \frac{1}{2}(z_{ji} - z_{ij})}{\cos \gamma_{ij}} \quad (7)$$

birimindedir. Trigonometrik yükseklik farkları, birbirinden bağımsız olarak (4) ve (5) eşitlikleri ile hesaplanabilmektedir. Bunlar, özellikle ağır her bir durak noktasındaki refraksiyon katsayılarının belirlendiği durumlarda, trigonometrik yükseklik ağlarının dengelenmesi için uygun bağıntılardır. (2) eşitliğindeki  $z_{ij}$  göz önüne alınıp (4) ve (5) eşitlikleri Taylor serisine göre doğrusal hale getirilerek trigonometrik yükseklik ağlarının düzeltme denklemleri oluşturulur.

(6) ve (7) eşitlikleri yazılırken  $P_i$  ve  $P_j$  noktalarını birleştiren doğrultunun her iki ucunda aynı oranda refraksiyon etkisinin bulunduğu varsayılmaktadır. Bu varsayımda, karşılıklı iki ucta düşey açılar avni anda gözlenmişse geçerlidir.

## 1.2 - Refraksiyon Katsayısının Belirlenmesinde Yararlanılan Jeodezik Üçüler

Trigonometrik noktaların koordinat değerlerinin yüksek duyarlılıkta elde edilebilmesi herseyden önce ölçme parametrelerine bağlıdır. Özellikle dağlık alanlarda yapılan gözlemlerde hedef işaretleri, düzgün arazilere göre çok daha önem kazanmaktadır. Geçici işaretlemeler için saat yanlarında yapılmış silindirik hedefler veya sabit işaretlemeler için pilyelerin kullanılması önerilmektedir.

Sistematik hataları ortadan kaldırın gözlem metodları seçilmelidir. Eğer, refraksiyon katsayısının belirlenmesi işlemi düşey açılar yardımıyla yapılacsa, ölçmeler birbirinden farklı birkaç zaman aralığında, örneğin iki saat veya daha uzun aralıklarda tekrarlanmalıdır. Kısa aralıklarda yapılan düşey açı gözlemleri arasındaki korelasyon katsayısı genellikle büyük olmaktadır. Bu özellik göz önüne alınarak bir durak noktasındaki ölçme işlemlerini için uygun bir iş akışının belirlenmesi gereklidir. Örneğin; 1. merkezlendirme elemanlarının ölçülmesi, 2. düşey açı ölçüsü, 3. yatay açı ölçüsü, 4. düşey açı ölçüsü, vb. gibi.

Yine bol sayıda gözlemin kullanılması tercih edilmelidir. Burada bol sayıda gözleme, aynı büyüklüğün çok sayıda ölçülmesi yerine değişik alanlarda, dağıtık gözlem yöntemleri ve aletlerle yapılacak gözlemler ifade edilmektedir. Elektronik uzunluk ölçüleri ile düşey açılar birlikte kullanıldığında duyarlık olumlu yönde artmaktadır.

Ancak, düşey açılar atmosferik koşullardan yatay açılara göre daha fazla etkilenmekte, dolayısıyla da tüm uğraşlara rağmen duyarlık kazancı bir limite kalmaktadır.

### 1.3 - Düşey Açı Gözlemleri Yardımıyla Yerel Refraksiyonun Belirlenmesi

Ölçülen düşey açılar üzerindeki düşey refraksiyon etkisinin giderilmesi oldukça zor bir problemdir. Günümüzde, refraksiyon etkisinin yok edilmesi veya belirlenmesi için birkaç yöntem önerilmektedir. Fakat bu yöntemlerin hiç biri genel anlamda doğru ya da gerçek modeller degildelerdir. Bu nedenle, bu işlem bir yerde şeker hastalarının insülinle tedavi edilmesine benzetilmektedir (HRADILEK, 1984).

Bu konuda çalışan jeodeziciler, labaratuvar koşulları altında çok iyi sonuçlar elde etmelerine karşın, gerçek koşullarda bu uygulamalar yapıldığında bir takım zorluklarla karşılaşmışlardır. Bu nedenle önerilen yöntemlerin oldukça kaba sonuçlar verdiği görülmekte, farklı metotlarla değişik sonuçlar elde edilebilmektedir.

Refraksiyon katsayısının belirlenmesinde meteorolojik veya jeodezik verilerden yararlanılmaktadır. Meteorolojik verilerden refraksiyonun belirlenmesi kuramsal olarak çok iyi sonuçlar vermesine rağmen uygulanamamasındaki nedenler, gerekli verilerin istenildiği şekilde toplanamamasından kaynaklanmaktadır. Çünkü bu metotla refraksiyon katsayılarını belirleyebilmek

icin düşey açı ölçüsünün aşın yolu üzerindeki sıcaklık değişimlerinin linmesi gereklidir.

Jeodezik verilerle refraksiyonun belirlenmesi veya yok edilmesinde düşey açı gözlemlerinden yararlanılır. Uygulamalarda iki metot kullanılmaktadır. Bunlar,

a) Karşılıklı ölçülen düşey açılar yardımıyla her bir gözlem doğrultusu için refraksiyon katsayısının belirlenmesi veya refraksiyon etkisinin yok edilmesi,

b) Her bir durak noktası için refraksiyon katsayısının ağı dengelemesi sırasında belirlenmesidir.

Jeodezik amaçlarla ölçülen düşey açılar için en uygun, en iyi bilinen, en eski, en çok kullanılan ve trigonometrik yükseklik farkı belirleme için anlamlı olanı, karşılıklı düşey açı gözlemleri ile uygulanan yöntemdir. Burada kullanılan en önemli varsayımdır, gözlenen doğrultunun her iki ucundaki refraksiyon katsayılarının birbiriyle eşit olduğunu söyleyebiliriz. Bu varsayımdır, gözlenen doğrultu eğiminin yataydan farkı  $15^g$  dan az ve doğrultu uzunlukları 2-5 km civarında ise geçerli olabilmektedir.

Trigonometrik yükseklik ağlarının dengelenmesinde doğal olarak ikinci yöntem tercih edilmekte, bu yöntemde düşey açıların karşılıklı ve aynı anda ölçülmesi gibi bir ön koşul bulunmamaktadır. Trigonometrik yükseklik ağlarının dengelenmesi sırasında refraksiyon katsayılarının belirlenmesi yeni bir yöntem olmayıp ilk kez 1826 yılında Gauss tarafından denenmiş ve Orta Avrupa'da yapılan bir uygulamada  $k = 0.1306$  olarak hesaplanmıştır.

#### 1.4 - Refraksiyon Katsayısının Genel Modeli

$P_i$  ve  $P_j$  doğrultusuna ait refraksiyon katsayısı iki fonksiyonun toplamı olarak gösterilmektedir,

$$k_{ij} = f(P_i) + g(P_i, P_j) \quad (8)$$

Buradaki  $f(P_i)$ ,  $P_i$  noktasındaki refraksiyonun ana bölümüdür ve bu değer gözlenen doğrultulardan bağımsızdır.  $g(P_i, P_j)$  fonksiyonu ile de  $P_i P_j$  doğrultusuna ilişkin refraksiyon katsayılarındaki değişimler gösterilmektedir. Bu fonksiyonun katsayıları genellikle meteorolojik verilerden belirlenir veya dengeleme modellerinin içinde bilinmeyen parametreler olarak hesaplanırlar.

**Sıfır Hipotezi :** Her bir durak noktasında ayrı bir refraksiyon katsayıısı etkindir. Normal gözlem koşulları altında, yani refraksiyonu değiştirecek iki farklı ortam dışında yapılan ölçümler sonucuna göre her bir durak noktası için (8) eşitliği

$$f(P_i) = k_i, \quad g(P_i, P_j) = 0, \quad k_{ij} = k_i \quad (9)$$

varsayıma dayalı olarak yeryüzündeki her  $P_i$  noktası için birer refraksiyon katsayıısı  $k_i$  bilinmeyen olarak ele alınır. Bu hipotez, pratik uygulamlarda önemli bir yer tutmakta ve deneysel sonuçlarla da uyuymaktadır.

Bu sıfır hipotezinin testi iki aşamada gerçekleştirilir. Önce, her durak noktasındaki düşey açı değişimlerinin refraksiyon üzerindeki etkilerinin anlamlı olup olmadığı irdelenir, ikinci olarak da koşulların mutlak anlamda eşit olup olmadıkları test edilir.

Sıfır hipotezine göre,  $P_i$  noktasında gözlenen bütün doğrultularda tek bir refraksiyon katsayıısı varsa  $k_{ij}$  değeri o noktadaki tüm doğrultular için aynı olmalıdır. İstatistiksel anlamda bütün doğrultular bir kümenin içinde toplanamıyorsa, kümenin dışında kalan doğrultular belirlenerek, söz konusu doğrultular için bağımsız bir refraksiyon katsayıısı belirlenmelidir.

Tüm bu açıklamaların ışığında arzu edilen, her bir durak noktasında tek bir refraksiyon katsayıısının belirlenmesidir. Aksi halde denelemeye gitrecek bilinmeyen sayısı artacak, bu artış diğer bilinmeyenler üzerinde olumsuzluklara neden olacaktır. Eğer sıfır hipotezi reddediliyorsa karşıtı hipotezler gündeme gelir. Bu durumda (9) eşitliğindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonları hesaplanıp  $P_i$  noktasındaki her bir doğrultu için refraksiyon katsayıları, meteorolojik ve jeodezik gözlemler birlikte kullanılarak ayrı ayrı belirlenmelidir.

### 1.5 - Ağ Denelemesi ile Refraksiyon Belirleme Koşulları

Jeodezik ölçülerle refraksiyon belirlemenin en büyük yararı, fazladan bir donanıma gerek duyulmaması, yalnızca bir teodolit ve dağlık alanlarda bir uzaklık ölçerle verilerin toplanabilmesidir. Ancak duyarlığın artırılması için bazı koşulların yerine getirilmesi gerekmektedir. Daha çok ağır kuruluş, planlama ve ölçmelerine yönelik bu koşullar kısaca şunlardır.

a) Düşey açılar yüksek duyarlılıkta gözlenmeli, durak noktaları olabileğince dağ zirvelerinde olmalı ve yeryüzüni sıyrarak geçen doğrultulardan kaçınılmalıdır. Bir durak noktasındaki gözlemler kısa bir zaman aralığında

ve en az iki kez yapılmalıdır.

b) Her bir durak noktasındaki doğrultuların uzunlukları birbirleriyle orantılı olmalı, minimum ve maximum uzunluklar birbirlerinden %50 den fazla farklılık göstermemeli ve aşırı değerlerde de hiç bir zaman 1:3 oranını aşılmamalıdır.

c) Kurulacak ağıın düşey doğrultuları 4 km'den daha uzunsa, çekül sapması bileşenleri ve refraksiyon katsayılarının düşey açılar yardımıyla belirlenmesi daha anlamlıdır. Bu nedenle bir durak noktasında 6-7 düşey açının bulunması, bu açıların ufka iyi bir şekilde dağılması veya yataydan olan farklarının oldukça az olması duyarlığın artırılması için gereklidir.

ç) Trigonometrik yükseklik ağının ölçeginin belirlenebilmesi ve sistematik refraksiyon hatalarının yok edilebilmesi için, bu türden ağlarda veriler eğik uzunluk ölçüleri ile ve mümkün olabilen yerlerde geometrik nivelman ölçüleri ile de desteklenmelidir.

## 1.6 - Trigonometrik Yükseklik Ağlarının Dengelenmesi

Trigonometrik yükseklik ağlarının dengelenmesine ait matematik modeller (4)-(7) eşitliklerinden yararlanarak kurulurlar. (2) eşitliğinde verilen dengeli düşey açı (4) eşitliğinde yerine konulur ve Taylor'a göre doğrusal hale getirilirse,

$$h_{ij}^* = \frac{s_{ij} \cos(z_{ij}^* - \gamma_{ij})}{\sin(z_{ij}^* - 2\gamma_{ij})} \quad (10)$$
$$a_{ij} = \frac{s_{ij} \cos \alpha_{ij}}{\rho_{cc} \sin^2(z_{ij}^* - 2\gamma_{ij})}$$

gösterimleri ile dengeli yükseklik farkları

$$h_{ij} = h_{ij}^* - a_{ij} (v_{z_{ij}} + \gamma_{ij} k_i + \xi_i \cos \alpha_{ij} + \eta_i \sin \alpha_{ij}) \quad (11)$$

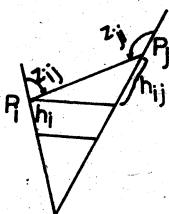
şeklinde hesaplanmaktadır. Ölçülen düşey açılar için yazılacak düzeltme denklemleri,

$$v_{z_{ij}} = \frac{1}{a_{ij}} dh_i - \frac{1}{a_{ij}} dh_j - \gamma_{ij} k_i - \cos \alpha_{ij} \xi_i - \sin \alpha_{ij} \eta_i +$$
$$\frac{1}{a_{ij}} (h_i^o - h_j^o + h_{ij}^*) \quad (12)$$

birimindedir. Burada  $h_i^o$  ve  $h_j^o$ ,  $P_i$  ve  $P_j$  noktalarının yaklaşık yüksekliklerini;  $a_{ij}$ ,  $P_i P_j$  doğrultusunun azimutunu göstermektedir,  $v_{z_{ij}}$  de  $P_i P_j$  doğrultusu boyunca ölçülen düşey açıya getirilecek düzeltme değeridir. (12) eşitliği içinde  $d_{hi}$  ve  $d_{hj}$  yükseklik bilinmeyenlerin yanında,  $k_i$  refraaksiyon katsayısı ile  $\xi_i$  ve  $\eta_i$  çekül sapması bileşenleri de bulunmaktadır. Bu çekül sapması ve refraksiyon ile ilgili parametreler, dengeleme içinde bilinmeyenler olarak alınabildikleri gibi,  $k_i, \xi_i$  ve  $\eta_i$  diğer yöntemlerle belirlenebiliyorsa bu büyülüklükler, (12) eşitliğinde sabit terimler olarak yorumlanabilirler.

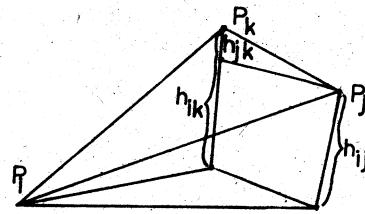
Diger taraftan, düşey açıların yanında ölçülen eğik veya yatay uzaklıklar ile geometrik nivelman, gravite vb. gibi ölçülere ait düzeltmeler de (12) eşitliğinde dikkate alınmalıdır.

Trigonometrik yükseklik ağlarının dengelenmesi sırasında, ölçülen düşey açılar için yazılabilen koşul denklemleri genelde iki şekilde düşünülmektedir. Bunlardan ilki, karşılıklı ölçülen düşey açıların toplamıyla belirlenen doğrultu koşul denklemleri, ikincisi de kendi üzerine kapanabilen geometrik şekillerle ilgili koşullardır (şekil-2).



(a) doğrultu koşul denklemi

$$h_{ij} + h_{ji} = 0$$



(b) üçgen koşul denklemi

$$h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0$$

Şekil 2: Düşey açı gözlemleri için yazılan koşul denklemleri.

$u$  kenarlı poligonlar için genel formül  $\sum_{i+1}^{i+1} h_u = 0$  şeklindeki denklemde,  $h_u$  herhangi bir kenarın yüksekliği,  $i+1$  ve  $i+1$  ise kenarın iki köndür.

Koşul denklemlerinin kurulmasında çekül sapması bileşenlerinin ve refraksiyon katsayılarının ön değerlerinin bilinmesi gereklidir. Bu nedenle, mutlak anlamda koşul denklemlerini kurmak ve tam bir dengeleme modeli oluşturmak zordur. Diğer taraftan programlamaya uygunluğu nedeniyle, dolaylı (endirekt) ölçüler yöntemi tercih edilmektedir. Çünkü, yukarıda sözü edilen işlemler hem karmaşık hem de elle yapılmayacak kadar zordur.

Trigonometrik yükseklik ağları, yukarıda verilen düzeltme denklemlerinden yararlanılarak dolaylı ölçüler yöntemine göre ya da kısaca tanıtılmaya

Çalışılan koşul denklemlerinden hareketle koşullu ölçüler yöntemine göre dengelenerek noktaların kesin yükseklikleri ve dengeli ölçüler elde edilebilmektedir.

### 1.7 - Çekül Sapması Bileşenlerinin ve Refraksiyon Katsayılarının Yaklaşık Değerlerinin Belirlenmesi

Çekül sapması bileşenleri ve refraksiyon katsayıları, gerek dengelenme bilinmeyenleri ve gerekse sabit parametreler olarak işleme sokulduklarında bunlara ait yaklaşık değerlerin bilinmesi gereklidir. Söz konusu parametreler, geometrik yapı bakımından en uygun duruma getirilmiş ağlarda 1.5 de belirtilen koşulların sağlandığı durumlarda elde edilen ölçülerden çok iyi bir yaklaşılıkla belirlenebilmektedir.

Düsey açıların karşılıklı gözlediği durumlarda, çekül sapması bileşenleri ve düzeltmeler göz önüne alınmazsa (Şekil-1),

$$2\gamma_{ij}^k = 200 + 2\gamma_{ij}^* - z_{ij}^* - z_{ji}^* \quad (13)$$

bağlantısı yazılır ve  $P_i P_j$  doğrultusu için

$$k_{ij} = \frac{200 + 2\gamma_{ij}^* - z_{ij}^* - z_{ji}^*}{2\gamma_{ij}} \quad (14)$$

eşliğinden yaklaşık refraksiyon katsayıları belirlenebilir.

Her bir  $P_i$  durak noktasına ait ortalama bir refraksiyon katsayısı

$$k_i = \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij}}{n} \quad (15)$$

Bağıntısından hesaplanır. Burada  $n$ ,  $P_i$  noktası merkez olmak koşulu ile karşılıklı gözlenen düsey açıların sayısını göstermektedir. (15) eşitliği ile belirlenen refraksiyon katsayısının, özellikle dağlık alanlarda 10 km'yi geçmeyen gözlem doğrultuları için uygun olduğu söylenebilir. Ancak daha doğru bir refraksiyon katsayısı elde edebilmek için, çekül sapması bileşenlerinin de ele alındığı modellerle çözüme gidilmelidir.

Jeodezik ağlarda çekül sapması bileşenleri astrojeodezik ölçülerle belirlenebilmektedir. Ancak bölgесel ağlardaki ölçüler, düsey açılar olduğuna göre çekül sapması bileşenlerinin belirlenmesinde bu ölçülerin kullanılması

tercih edilmektedir. Şekil-1 deki  $P_i P_j C$  üçgeninden,

$$z_{ij} + z_{ji} - 2\gamma_{ij} - 200 = 0 \quad (16)$$

dengeli düşey açılarla koşulu yazılırsa, karşılıklı ölçülen  $P_i P_j$  doğrultusu için

$$-\eta_i \sin \alpha_{ij} - \xi_i \cos \alpha_{ij} + \eta_j \sin \alpha_{ij} + \xi_j \cos \alpha_{ij} = z_{ij}^* + z_{ji}^* - 2\gamma_{ij} - 200 \quad (17)$$

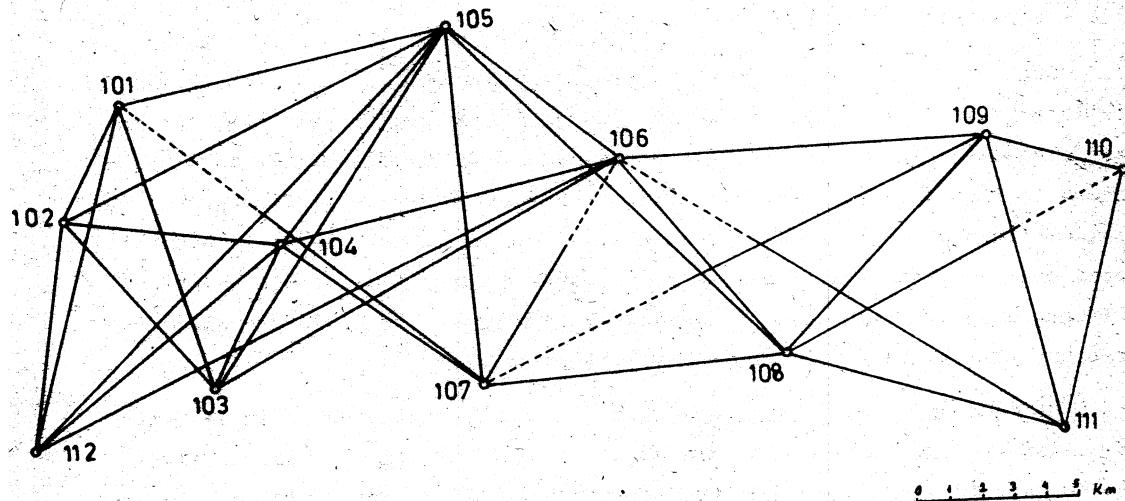
şeklinde yazılan denklemde  $\eta_i$ ,  $\xi_i$ ,  $\eta_j$ ,  $\xi_j$  bilinmeyenler olarak alınır ve çekül sapması bileşenleri hesaplanabilir. Bu çözüm için, ağıda birisi sabit olmak üzere en az dört nokta bulunmalı ve tüm düşey açılar karşılıklı gözlenmelidir. Eğer bilinmeyen sayısından fazla denklem yazılabiliyorsa bir deneleme işlemi söz konusudur ve burada kurulacak normal denklemler genelde tekil (singüler) yapıdadır.

## 2 - SAYISAL UYGULAMALAR

Kuramsal temelleri yukarıda kısaca açıklanan trigonometrik yükseklik ağlarının dengelenmesi ve refraksiyon katsayıları ile çekül sapması bileşenlerinin belirlenmesine ilişkin sayısal uygulamalar, FORTRAN-77 dilinde yazılan programlarla, KÜ-BİM Bilgisayar Merkezinde gerçekleştirılmıştır.

Sayısal uygulamada kullanılan veriler, Akyazı/Adapazarı Kuzey Anadolu fay kuşağı üzerinde kurulan test ağından alınmıştır. Bölgedeki yatay kabuk hareketlerinin izlenmesi amacıyla kurulan bu ağıda 1984 yılı ölçmelerinde yatay doğrultular ve bazı eğik uzunlukların yanında düşey açı gözlemleri de yapılmıştır. Sayısal uygulamalar, ortalamma 4 dizi ölçülen bu düşey açı gözlemleri ile gerçekleştirılmıştır. Dokurcun vadisinin her iki yamacı boyunca doğu-batı yönünde uzanan test ağında pilyelerle işaretli 12 nokta bulunmaktadır (Şekil-3).

Ağın yatay koordinatları, düşey açı gözlemlerinin kullanıldığı 1984 yılı gözlemlerindeki yatay doğrultu verilerinden yararlanarak serbest ağı deneleemesi yöntemi ile bulunmuştur (ATASOY, 1984).



Şekil 3 : Sayısal uygulamada kullanılan ağın geometrik şekli ve düşey açı gözlem planı.(Kesikli çizgilerle tek yönlü gösterilen düşey açılar gösterilmektedir.)

Ağın projeksiyon yüzeyindeki sağa,yukarı değerleri ve noktaların yaklaşık yükseklikleri tablo-1 de verilmiştir. Söz konusu ağda yüksekliği bilinen, bir başka söyleyişle yüksekliği sabit alınacak nokta bulunmamaktadır. Beş tanesi tek yönlü olmak üzere toplam 63 adet düşey açı gözlemi bulunan bu ağda, her doğrultuya ait egerik uzunlukların ölçülememiş olması nedeniyle hesaplama larda, dengeli koordinatlardan bulunan yatay uzaklıklar kullanılmış,sayısal işlemler sadece ağın düşey konumu üzerinde yapılmıştır.

Nokta no	Y (m)	X (m)	Yaklaşık Yükseklik
101	556.259.431	4 497 089.095	337.0 m
102	555 155.614	4 494 478.611	734.0
103	558 181.974	4 490 830.337	825.0
104	559 763.058	4 493 650.143	572.0
105	563 211.015	4 498 777.013	1048.0
106	566 923.873	4 495 644.871	670.0
107	563 789.569	4 490 597.441	913.0
108	570 422.337	4 489 995.913	1062.0
109	574 803.777	4 495 966.141	959.0
110	577 632.590	4 494 929.782	717.0
111	576 234.556	4 489 043.890	1547.0
112	554 476.185	4 489 343.016	1268.0

Tablo 1.: Sayısal uygulamada kullanılan ağın projeksiyon yüzeyindeki sağa, yukarı değerleri ve noktaların 1:25 000 ölçekli haritalardan alınan yaklaşık yükseklikleri.

## 2.1 - Verilerin işlenmesi

Düsey açılar çizelge-1 deki akışa göre hazırlanan bilgisayar programıyla değerlendirilmiştir. Bu akışın içinde trigonometrik yükseklik ağının dengelenmesi, diğer bir ifade ile noktaların dengeli yüksekliklerinin hesabının yanında, noktalardaki refraksiyon katsayılarının ve çekül sapması bileşenlerinin belirlenebilmesi amaçlanmıştır. Ancak bu bilgilerin hepsinin aynı anda belirlendiği modeller yerine, ayrı ayrı ve iterasyonla belirleme yöntemi uygulanmıştır. Yine programlamaya uygunluğu nedeniyle dengeleme işlemleri için dolaylı ölçüler yöntemi kullanılmıştır.

Refraksiyon katsayıları, dengelemenin fonksiyonel modelinden de belirlenebilmektedir. Ancak, özellikle düsey açı gözlemlerindeki kaba ve sistemik hataların yanında model hatalarının refraksiyon katsayılarının içinde yer alacağı kuşkusunu yukarıda sözü edilen ayırma nedeni olmaktadır. İlk ölçü değerlerine göre, her bir durak noktası için ortalama bir refraksiyon katsayısı hesaplanmış, bu katsayılar dengeleme içinde sabit alınmıştır. Daha sonra bulunan dengeli ölçüler yardımıyla refraksiyon katsayıları yeniden hesaplanmıştır. Ağdaki gözlemler ve refraksiyon katsayılarına ait bilgiler tablo-2 de toplu olarak verilmektedir.

Çekül sapması bileşenlerinin yükseklik üzerindeki etkilerinin refraksiyon katsayısına göre çok daha az olduğu bilindiğinden, verilerin işlenmesinin son aşamasında noktalar arasındaki bağıl (relatif) çekül sapması bileşenleri (18) eşitliğine göre hesaplanmış ve bunlar düzeltme denklemleri içinde sabit terimler olarak ele alınmıştır. Çünkü 50 km'yi geçmeyen ve çok farklı bir topografik yapı üzerinde bulunmayan bölgesel ağlarda, çekül sapması bileşenlerinin etkileri gözardı edilebilecek kadar az olmaktadır.

Düsey açılar dizi yöntemiyle, farklı sayılarında gözlemlendikleri bu ağda gözlemlerin ağırlıkları, 4 dizi gözlem yapılan doğrultular için 1.0 olacak şekilde belirlenmiş ve bir ön dengeleme işlemi yapılarak  $m_0 = \pm 13.40^{\text{CC}}$  bulunmuştur. Bu değer, birim ölçünün ortalama hatasının öncül (a priori) değeri olarak kabul edilmiş, gözlemlerin ağırlıkları yeniden hesaplanarak dengelemenin stokastik modeli oluşturulmuştur.

## 2.2 - Refraksiyon Katsayılarının, Çekül Sapması Bileşenlerinin Etkilerinin ve Dengeli Yüksekliklerin Hesaplanması

Veriler işlenirken, sıfır hipotezi olarak her bir durak noktasında tek bir refraksiyon katsayısi düşünülmüştür. Karşılıklı gözlemi bulunan doğrultu-

lardan her bir durak noktası için ortalama refraksiyon katsayıları, (12) eşitliğindeki düzeltme denklemlerinde, sabit terimlerin içinde ele alınmıştır. Trigonometrik yükseklik ağı, ilk gözlem değerlerinden elde edilen bu yaklaşık refraksiyon katsayıları ile dengelenmiş ve her bir durak noktasındaki refraksiyon katsayıları yeniden hesaplanmıştır.

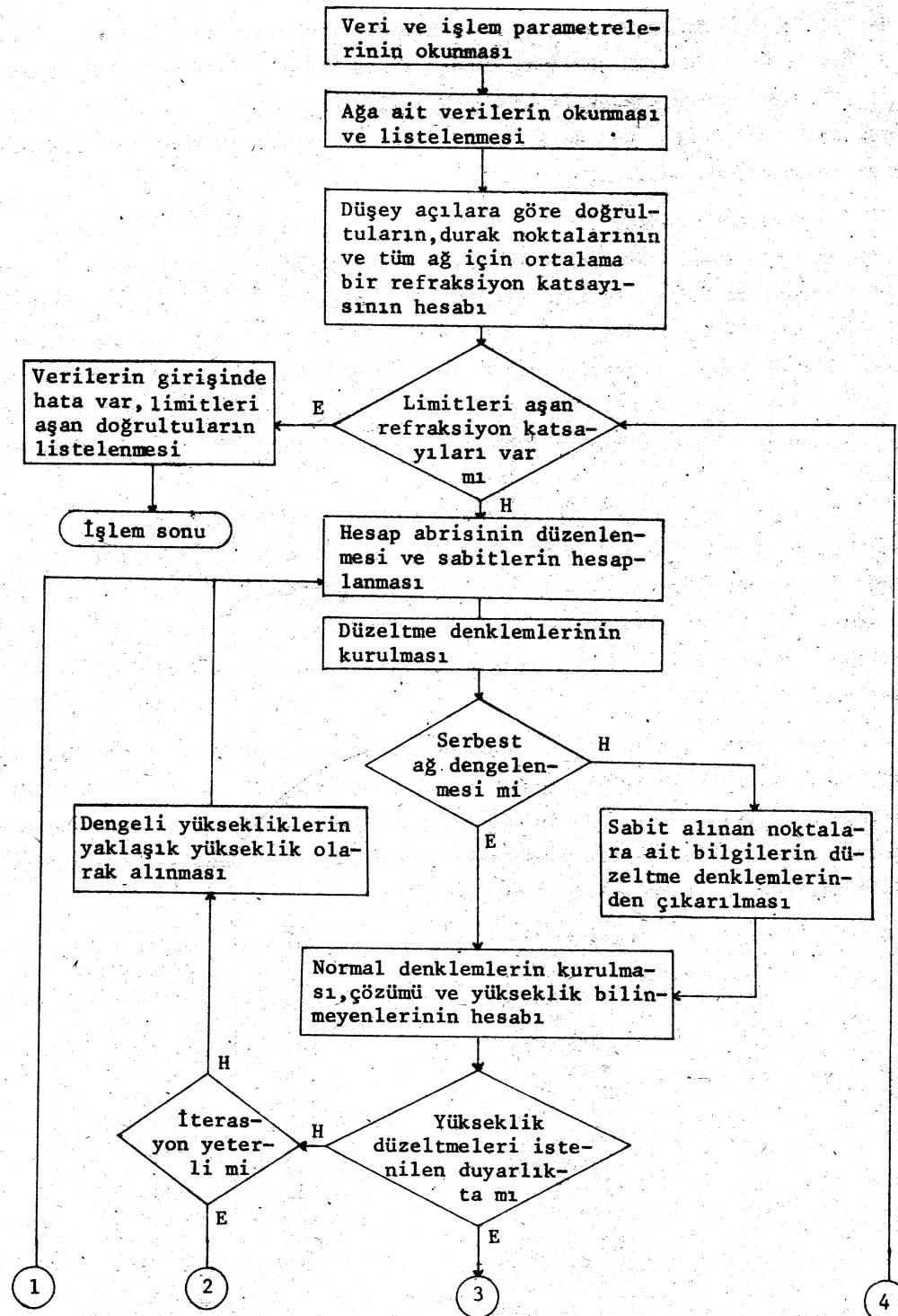
Bu ardışık işleme, refraksiyon katsayılarında anlamlı değişimler görüldüğü sürece devam edilmüştür. Burada anlamlılık ölçütü olarak, aynı noktada ki refraksiyon katsayılarının ardışık iki iterasyon adımda elde edilen değerleri arasındaki farkın 0.005 den daha büyük olması öngörmüştür. Doğrultulara göre hesaplanan refraksiyon katsayılarının 0.05 ile 0.25 değerleri arasında kalıp kalmadıkları denetlenmekte, özellikle negatif işaretli katsayıların elde edildiği gözlemlerdeki kaba hatalar kolaylıkla belirlenebilmektedir.

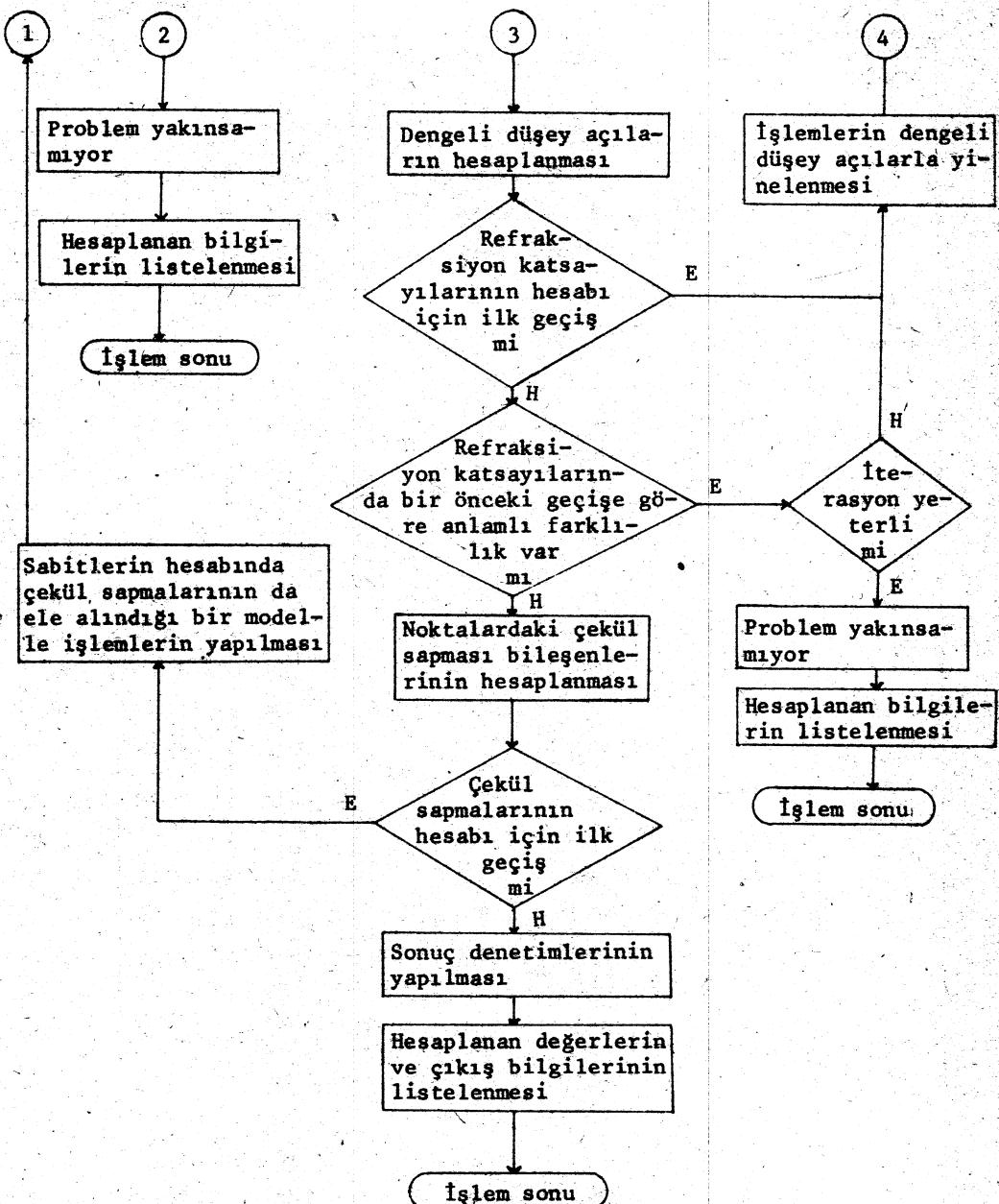
Noktalar arasındaki relativ çekül sapmalarının ölçülen düşey açılar üzerindeki etkileri, her bir durak noktasındaki kesin refraksiyon katsayılarının belirlenmesinden sonra hesaplanmıştır. Düşey açılar üzerindeki söz konusu bu etkiler  $\pm 4.2^{\circ}$  yi geçmemekte, bunların yükseklik bilinmeyenleri üzerindeki etkileri de en fazla 0.1 mm kadar değer almakta ve göz arı edilebilecek düzeyde kalmaktadır.

Noktaların yükseklikleri ve düşey açılar son olarak bir kez de refraksiyon katsayıları ve çekül sapması bileşenleri etkilerinin sabit terimler içinde yer aldığı bir dengeleme modeli ile hesaplanmıştır. Bu fonksiyonel maddeden elde edilen dengeli yükseklikler tablo-3 de, düşey açılaraya getirilen düzeltme değerleri tablo-2 de verilmektedir.

Nokta no	Dengeli Yükseklik (m)	Ortalama hata (cm)	Refraksiyon katsayısı
101	336.9888	4.797	0.125
102	734.1304	4.629	0.122
103	825.0182	4.567	0.126
104	572.6911	3.896	0.122
105	1047.2591	4.210	0.131
106	670.3340	4.170	0.120
107	916.5658	4.765	0.131
108	1060.6067	4.945	0.123
109	958.3230	5.732	0.109
110	718.4958	6.253	0.108
111	1547.0940	6.662	0.112
112	1268.3102	5.999	0.126
ortalama		5.124	0.123

Tablo-3: Noktaların dengeli yükseklikleri, dengeli yüksekliklerin ortalama hataları ve her bir durak noktasındaki refraksiyon katsayıları.





Çizelge - 1: Sayısal uygulamaların gerçekleştirildiği bilgisayar programının (TRIGON) akış şeması.

Durulan nokta	Bakılan nokta	Ölçülen düşey açı	Ref. Kat.		Dengelemeden sonra		
			Doğ.	Ort.	$\gamma_{ij}$	$k_{ij}$	$\epsilon_{ij}$
101	105	g 93.73420	.1208		cc 44.64		cc -25.47
	103	95.29300	.1274		40.86		-4.50
	112	92.61042	.1319		49.60		0.28
	102	91.14868	.1406		17.68		17.14
	104	96.96728	.1020	.125	30.64		2.66
102	104	102.21619	.0845		28.51	cc -0.90	-13.34
	101	108.87563	.1406		17.26	0.30	-12.19
	105	97.85632	.1430		55.61	-0.40	15.86
	103	98.79965	.1210		28.87	-1.02	7.63
	112	93.48226	.1050	.117	31.55	-0.50	-0.22
103	101	104.76404	.1274		41.29	0.32	5.80
	104	104.97356	.1020		20.34	-1.05	-11.26
	105	98.53446	.1433		59.16	-1.13	26.27
	102	101.24194	.1210		29.82	0.97	-8.92
	106	101.02765	.1288	.129	62.78	-1.66	24.25
104	107	95.69528	.1616		30.78	-0.76	15.33
	112	93.55915	.1286		41.53	0.28	0.29
	101	103.07673	.1020		29.90	0.74	-13.10
	105	95.14798	.1205		37.63	-0.59	-5.88
	106	99.19825	.1247		45.28	-0.54	-17.75
	102	97.82660	.0845		28.51	0.73	-4.16
	103	95.05542	.1020	.118	19.69	-0.38	4.23
105	107	101.04920	.1528		53.63	-3.33	7.90
	106	104.95045	.1192		31.77	-0.51	-0.03
	103	101.54408	.1634		61.51	-4.18	6.68
	104	104.90628	.1205		40.41	-4.18	2.15
	112	98.95985	.1568		84.09	-4.12	-16.75
	102	102.22280	.1430		59.71	-3.66	-10.72
	101	106.32860	.1208		46.69	-3.04	20.32
	108	99.97450	.1464	.139	74.31	-1.26	0.26

Tablo-2 : İlk gözlem değerleri, bu değerlerle hesaplanan refraksiyon kat-sayılarının yaklaşık değerleri, dengeleme sonucunda düşey açı-lara getirilen refraksiyon, çekül sapması etkileri ve düzeltme değerleri.

Durulan nokta	Bakılan nokta	Ölçülen düşey açı	Ref.	Kat.	Dengelemeden sonra		
			Doğ.	Ort.	$\gamma_{ij}$	$k_{ij}$	$\epsilon_{ij}$
106	108	g 96.29315	.1312		39.81	-3.09	16.16
	112	97.33560	.1236		83.59	3.88	-7.41
	103	99.05916	.1288		59.79	3.73	-18.42
	104	100.86671	.1247		44.53	3.34	20.57
	109	97.71355	.0717		47.25	-3.67	-23.11
	105	95.09226	.1192	.117	29.10	4.06	2.92
107	101	103.75019			65.02	3.57	-4.13
	105	99.02015	.1528		53.62	0.29	10.11
	106	102.66237			38.86	-2.54	-0.69
	104	104.34703	.1612		33.05	3.76	2.28
	108	98.65308	.0887	.134	43.56	-3.92	-6.18
108	105	100.12234	.1464		69.78	3.60	21.81
	106	103.76449	.1312		40.80	3.46	-9.71
	109	100.91239	.1214		45.48	0.41	-8.62
	110	102.52898			53.65	-1.15	5.16
	107	101.40752	.0887		40.90	3.76	-19.27
	111	94.77781	.1402	.126	36.17	-3.95	-24.38
109	111	94.74316	.0979		38.47	3.98	11.43
	108	99.15256	.1214		40.30	3.43	12.77
	107	100.27005			60.68	3.26	13.77
	106	102.35954	.0717		42.91	3.30	-10.49
	110	105.07033	.1215	.103	16.39	-0.91	-3.80
110	111	91.36405	.0951		32.62	3.98	-12.17
	109	94.95609	.1215	<u>108</u>	16.24	-4.07	7.78
111	106	104.93063			63.82	-4.01	0.24
	108	105.27275	.1402		32.93	-3.97	-11.00
	109	105.32050	.0979		39.52	0.18	2.63
	110	108.69060	.0951	.111	33.83	3.35	3.28
112	102	106.56400	.1054		32.59	-1.62	-9.27
	105	101.14839	.1568		80.88	-2.24	-19.63
	101	107.45847	.1319		50.00	-1.77	4.89
	106	102.78648	.1236		87.77	-2.22	8.36
	104	106.50018	.1286	.129	42.90	-2.26	2.88
		ortalama		.123			

### 2.3- Duyarlık Hesapları ve Model Hipotezinin Testi

Birim ölçünün ortalama hatasının dengeleme sonucunda hesaplanan soncul (a posteriori) değeri  $\pm 12.92^{\text{cc}}$  dir. Ölçülen düşey açıların ortalama hataları, 6 dizi gözlenen doğrultularda  $\pm 10.55^{\text{cc}}$ , 4 dizi gözlenen doğrultularda  $\pm 12.92^{\text{cc}}$  dir. Dengeli yüksekliklerin ortalama hataları  $\pm 3.89$  cm ile  $\pm 6.66$  cm arasında değişmektedir.

p ağıdaki nokta sayısını ve  $\text{iz}\{Q_{xx}\}$  ters ağırlık matrisi  $Q_{xx}$ 'in köşegen terimleri toplamını göstermek üzere, ortalama koordinat duyarlığı (ÖZTÜRK, 1982),

$$m_h = m_o \sqrt{\frac{\text{iz}\{Q_{xx}\}}{p}} = 5.12 \text{ cm}$$

olarak hesaplanmıştır.

Ağdaki gözlemlerin duyarlıklarını belirleyebilmek ve fonksiyonel model hakkında bilgi edinmek amacıyla yapılan ön dengeleme ile hesaplanan birim ölçünün ortalama hatası  $s_o = \pm 13.40^{\text{cc}}$  ve toplu dengeleme işlemi tamamlandıktan sonra düzeltmeler yardımıyla bulunan soncul değer  $m_o = 12.92^{\text{cc}}$  ile model hipotezinin testi yapılırsa,

$$T = s_o^2 / m_o^2 = 1.08$$

test büyülüğüne karşın, F-dağılımı cetvelinden  $\alpha = 0.05$  yanlışma olasılığı,  $f_s = 47$  ve  $f_m = 52$  serbestlik derecesi ile alınan değer

$$F = F_{f_s, f_m 1-\alpha/2} = 1.75$$

dir.  $T < F$  olduğundan, kurulan dengelemenin fonksiyonel modeli gözlemler arasındaki geometrik ilişkilere uygundur ve stokastik model gözlemler arasında duyarlık ilişkilerini veterince kapsamaktadır.

### 3 - SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan teorik çalışmalar ve gerçekleştirilen sayısal uygulamalar sonucunda elde edilen sonuç ve öneriler kısaca şunlardır. Bölgesel olarak kurulan ve pratik olarak geometrik nivelmanla yükseklikleri bulunamayan, özellikle topografik yapının bozuk olduğu yerlerde ve dağlık alanlardaki noktaların yükseklikleri, trigonometrik olarak, pratik amaçlar için yeterli duyarlıklı belirlenebilmektedir. Bu nedenle ağıın yatay konumuna ilişkin en uygunlaştırma yöntemleri, ağıın düşey konumunu da kapsayacak şekilde planlanmalıdır.

Gözlemlerin 1.5 bölümünde sayılan koşulları yerine getirmesine özen gösterilmeli, özellikle düşey açı gözlemlerinin ortalama hatalarının  $\pm 2^{\circ}$  yi geçmemesi sağlanmalıdır. Duyarlığın artırılması, sistematik ve kaba hataların belirlenebilmesi için boy sayıda gözleme gerek duyulduğundan, ağın yatay ölçme planında bulunmasa bile, gözlenebilen düşey açıların tümünün karşılıklı olarak ölçülmesine çalışılmalıdır. Noktalardan uygun olanlar arasında geometrik nivelman ölçüleri yapılmalı ve veriler var olan nivelman noktaları ile trigonometrik yükseklik noktaları arasında ölçülecek uzunluklarla desteklennmelidir.

Düşey açı ölçüleri ile yüksekliklerin yanında refraksiyon katsayıları ve çekül sapması bileşenlerinin yükseklikler üzerindeki etkileri de hesaplanabilmektedir. Söz konusu bu bilgilerin dengeleme modelinin içinde belirlenmesi arzu edildiğinde, gözlemlerin güvenilir olduklarının istatistiksel olarak garanti edilmiş olmaları, ağın nokta sayısının beşten daha fazla olması ve fazla gözlem sayılarının yeterli olması gerekmektedir. Bu çalışmada iterasyon yöntemi ile elde edilen sonuçlar, doğrudan dengeleme işlemiyle bulunan sonuçlarla tipatip uyuşmaktadır.

Refraksiyon katsayılarının düşey açılar üzerindeki etkileri göz ardı edilemeyecek derecede büyük olduğundan bunlar, yüksekliklerin belirlenmesinde etkili olmaktadır. Kenar uzunlukları 1 km'den uzun olan ağlarda, refraksiyon etkisi gözönüne alınmalıdır. Büyüklüğü 50 km'yi geçmeyen bölgesel ağlarda çekül sapması bileşenlerinin sonucu olan etkileri göz ardı edilebilecek kadar küçük olmaktadır.

Öngörülen koşulların tümünün sağlandığı, gözlemlerin büyük bir özenle yapıldığı trigonometrik yükseklik ağlarının düşey konum duyarlığı bile, geometrik nivelmanla bulunacak düşey konum duyarlığına ulaşamamaktadır. Ortalama hataları  $\pm 2^{\circ}$  yi geçmeyen düşey açılarla, refraksiyon ve çekül sapması bileşenlerine ait bilgilerinde yeterli duyarlıkta elde edilmesine karşın, yükseklik ortalama hataları  $\pm 3$  cm civarında kalmaktadır. Bu duyarlık ancak yatay doğrultu ve uzunluklarla belirlenen yerel nirengi ağlarının yatay konum duyarlığına eşittir.

Özetlenirse, yukarıda sayılan koşul ve özelliklerin sağlandığı bölgesel ağlarda yatay ve düşey konum duyarlıklarını yaklaşık olarak birbirlerine eşit çökmekta ve böyle bir modelle (yatay doğrultu + varsa eğik veya yatay uzunluk ölçüleri + düşey açılarla) noktaların üç boyutlu konumları aynı duyarlıktır belirlenebilmektedir.

## K A Y N A K L A R

- ATASOY, V. : Jeodezik Deformasyon Ölçüleriinin İrde-  
lenmesi,KÜ-FBE Yüksek Lisans Tezi,Trab-  
zon, 1984 (Yayınlanmadı).
- ATASOY, V. : Trigonometrik Yükseklik Ağlarının Denge-  
lenmesi,KÜ-FBE Doktora Semineri-I,Trab-  
zon, 1985 (Yayınlanmadı).
- HEISKANEN, W.;MORITZ,H. GÜRKAN,O. : Fiziksel Jeodezi, Karadeniz Üniversitesi  
Basımevi, Trabzon, 1984 (Çeviri).
- HRADILEK, L. : Three- Dimensional Terrestrial Triangu-  
lation, Applications In Surveying Engi-  
neering,Konrad Wittwer Verlag,Stuttgart,  
1984.
- ÖZTÜRK, E. : Jeodezik Ağlarda Güven Ölçütleri ve Ölç-  
me Planının Enuygunlaştırılması,KTÜ Ya-  
yınları 149, Trabzon, 1982
- VANICEK,P.; KRAKIWSKY, E. : Geodesy, The Concepts, Nort-Holland Pub-  
lishing Company Amsterdam, 1982.