

Triangulasyonda Laplas Denkleminin kullanılması

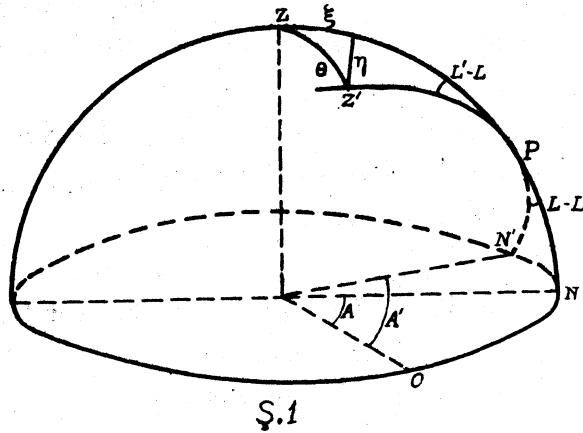
Yazan :
G. A. Rune

Çeviren :
Yk. Müh. İ. Erokan

Çok karışık gölündüğü için eskiden Laplas dekleminde faydalanarak Laplas şartları kurulmazdı. 1927 yılında Finli Geodet Ölender «Bir çok Laplas noktalı ve üçgenli zincirlerin muvazenesi» adlı eserinde bu şartı kullanmak suretiyle bu alanda yeni bir çığır açmıştır. Laplas noktaları, yani üzerinde astronomik tul ve semt rasadı yapılmış olan noktalar, bir birinden uzak olmadıkları takdirde Laplas denklemini kullanmak kolay ve faydalıdır. Zinciri sağlamlaştıran bu denklemin kullanıldığı durumlar aşağıda gösterilmiştir :

Durum : I.

Geoid ve elipsoidin kesiştikleri Q gibi bir noktada geoid ve elipsoide indirilen dikeyler arasında θ gibi küçük bir açı meydana gelir. Bu açığı inhiraf açısı denir. Universal teodölitin dik eksenini bir defa şakul istikâmetinde, bir defa da bu istikametten θ açısı kadar ayrılmış olduğu halde iki seri astronomi rasadı yapılmıştır. Birinci rasatla Q noktasının B', L' ve A' astronomik değerleri elde edilir. İkinci rasatla ise, alet eksenini θ açısı kadar şakul istikametinden ayrı bulunduğundan ötürü elipsoide ait, yani Q noktasının geodetik değerleri bulunmuş olur. Bunlar da B, L, ve A dan ibarettir.



Şekil I. de Z elipsoide, Z' geoide aid zenit mesafeleri, ζ inhiraf açısının kuzey - güney; η bu açının doğu - batı komponentleri ve P astronomik kutuptur.

Kürevi ve geometrik münasebetlerden aşağıdaki formüller çıkarılır:

$$\zeta = B' - B \quad (1a)$$

$$\eta = (L' - L) \cos. B \quad (1b)$$

$$\eta = (A' - A) \cot. B \quad (1c)$$

Bu formüllerin ikinci ve üçüncüsü Laplas denklemini vermektedir:

$$A' - A = (L' - L) \sin B \quad (2)$$

B' L' ve A' değerlerine «Astronomik değerler» denir. Çünkü bunlar geoid üzerinde astronomik rasatlarla elde edilmiştir. B, L, ve A değerlerine de «Geodetik değerler» denir. Çünkü bunlar elipsoide göre teyin edilmiştir.

Yukardaki formül kolay bir şekilde çıkartılabilir. (Formüllerin incelenmesi ve araştırılması bakımından geodetik ve astronomik ufukların üst üste geldiklerini kabul etmek mümkündür. Bu sebeple her iki ufuk bir tek hatla gösterilmiştir.) N' ve N kuzey noktalarında bu ufuklar arasındaki mesafe ζ dir. ζ ve η çok küçük olduklarından N' PN kürevi üçkeni için aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$N N' = A' - A = (L' - L) \sin. B$; burada $PN = B$ dir. Bu formül yukardaki 2. formüldür.

ZPZ' üçgeninde:

$\eta = (L' - L) \sin. (90^\circ - B) = (L' - L) \cos. B$, bu da (1b) formülüdür. (2) ve (1b) denklemlerinden (1c) denklemi elde edilir.

Laplas denklemi aşağıda gösterileceği şekilde kısa ve kolay bir usul ile de çıkarılabilir:

L geodetik tulünden meridyen konvergensi bulunur:

$$c = L \sin B + \text{yüksek dereceden terimler.}$$

Bunun gibi, L' tulünden c' konvergensi bulunur :

$c' = L' \sin. B +$ yukardaki gibi yüksek terimler. (*)

L ve L' değerleri bir birinden pek az miktarda farklı olduklarından :

$$A' - A = c' - c = (L' - L) \sin. B \text{ olur.}$$

Durum II :

Şekil 2 de geoid kesik ve elipsoid dolgun hatlar ile gösterilmiştir. Geoid ile elipsoid P noktasında bir birine teğettir. Fakat, Q noktasında bu iki yüzey bir birini kestiklerinden, bu iki yüzeye bu noktada dik olan doğruların arasında θ gibi küçük bir açı (Şakul inkırafı) vardır. P ile Q noktaları, bazları ve rasatları deniz yüzüne indirilmiş olan bir triyangulasyon şebekesindeki aynı üçgenin noktalarıdır. Bütün rasadlar ve hesaplar doğru kabul edilmektedir.

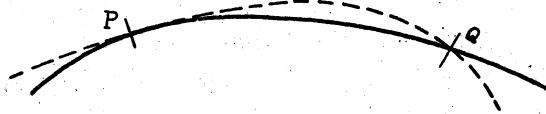
P noktasında astronomik arz ve tül ile O_1 gibi bir noktaya olan astronomik semt tayin edilmiştir.

Bu değerlerinyardımları ile O_1 noktasının B_1 , L_1 ve A_1

değerleri hesaplanabilir. (Burada, astronomik ve geodetik değerler bir birine eşittir.) Bu noktadan başlamak üzere Q noktasına kadar nirengi noktalarını hesap edelim. Bu suretle Q noktasının arz ve tülü ile birlikte, bu noktanın O_2 gibi bir noktaya olan A_2 semti tayin edilmiş olur. B_2 , L_2 ve A_2 geodetik değerlerdir. Bu geodetik değerleri hesaplamakla beraber, Q noktasında ayrıca B'_2 , L'_2 ve A'_2 astronomik değerleri de tayin edilmiştir.

(1) No. lu formülün yardımı ile Q noktasındaki ζ ve η komponentleri doğru olarak hesap edilebilir.

(*) Burada $B' = B$ alınabilir.



Ş 2

Bundan başka,

$$A_2 - A_3 = (L_2 - L_3) \sin. B_3 \text{ denklemini kurulabilir. (3)}$$

Hakikatte Q noktası Geoid-Elipsoid kesiminde bulunmayacağı gibi bu nokta Geoid veya elipsoid üzerinde dahi değildir. Bununla beraber bütün geodetik değerler elipsoide irca edilir. Bu sebeble Q dan O₂ ye olan Astronomik (Terrestrial) istikamet elipsoide irca edilir. (O₂ elipsoide olan yüksekliğinden ötürü düzeltildikten sonra). Astronomik değerlerin şakul mukavvesliğinden ötürü düzeltilmesine lüzum yoktur.

Eksenine muayyen bir meyil verilmiş olan bir teodolit ile Q noktasında astronomik rasatlar yapılsa dahi Laplas muadelesi değişmez. Fakat şakul inhirafı hesaplanacak olursa hatalı olur. (Bu hata eksenin değişmesine eşittir.)

Hesaplarda başka bir elipsoid kullanılacak olurta yine Laplas denklemini değişmez, fakat şakul inhirafı değişir.

Durum : III

Bu da durum II ye benzer. Aradaki fark, P noktasında geoid ile elipsoid bir birini kesmektedirler.

Şakul eğiminin az olması ihtimali olan nirengi şebekesindeki bir astronomik noktadan (astronomik değerleri B, L ve A olan) P ve Q ye kadar geodetik değerler hesaplanır. P için B, L ve A ile Q için B₂, L₂ ve A₂ geodetik değerleri bulunduktan sonra, P noktasında :

$$A_1 - A_2 (=L_1 - L_2) \sin. B_1 \dots \dots \dots (4)$$

Q noktası için ise (3) denklemini caridir. (3) ile (4) denklemlerini bir birinden çıkarmak suretile bu iki denklem arasındaki münasebet bulunur. Bu suretle iki nokta için Laplas denklemini şu olur :

$$(A_2 - A_3) - (A_1 - A_2) = (L_2 - L_3) \sin. B_3 - (L_1 - L_2) \sin. B_1 \dots (5)$$

Kaideten, P ile Q, ne geoid ve ne de elipsoid üzerinde bulunur. Bundan başka, elipsoid ile geoid bu noktaların civarında bir birini kesmezler. (Durum II. de anlatıldığı gibi). Böyle olmakla beraber (5) denklemini bozulmamaktadır. Başka bir elipsoid alınsa bile (5) denklemini değişmemektedir.

Durum : IV

Bu durum III No. lu durum gibidir, yalnız, bütün mikdarlara kaçınılmayan hataların girdiği düşünölmüştür. Bundan ötürü muvazene hesaplarına lüzum görölmektedir. Muvazene edilmiş değerleri aşağıdaki gibi gösterelim :

$$\begin{aligned} A_2 + dA_2, A_1 + dA_1, L_2 + dL_2, L_1 + dL_1, B_2 + dB_2, B_1 + dB_1, \\ A_2 + dA_2, A_1 + dA_1, L_2 + dL_2, L_1 + dL_1, B_2 + dB_2, B_1 + dB_1, \\ V_1 + v_1, V_2 + v_2, V_3 + v_3, \dots V_n + v_n \end{aligned}$$

Burada V_i , nirengi ağındaki i istikametlerinin muvazeneli değerleridir. v_i ise V_i istikametlerinin aldıkları düzeltmelerdir.

$(L' - L) \sin. (B + dB) = (L' - L) \sin. B + (L' - L) \cos. B dB$, olmakla dB düzeltmesi terk edilebilir. Çünkü sağ tarafın ikinci haddi birinci hadde göre çok küçüktür.

Bu değerler (5) nci denklemdede yerine konursa aşağıdaki Laplas denklemi yazılır :

$$\begin{aligned} (dA_2 - dA_2) - (dA_1 - dA_1) - (dL_2 - dL_2) \sin. B_2 + (dL_1 - dL_1) \sin. B_1 = \\ - (A_2 - A_2) - (A_1 - A_1) + (L_2 - L_2) \sin. B_2 - (L_1 - L_1) \sin. B_1 \end{aligned}$$

(6).

Sağ taraf, şart denkleminin « sabit » terimidir. Buna « Laplas kapanma hatası » da denir. Arzın başka dimenzyonları için aynı « Kapanma hatası » bulunur. Fakat şakul inhirafı değişir.

Şart denkleminin içindeki dA_2 ve dL_2 ile ilgili olarak aşağıdaki hususların da anlatılması faydalıdır :

$$A_2 = A_1 + f_A$$

$$L_2 = L_1 + f_L$$

Burada f_A ve f_L , $V_1, V_2, \dots V_n$ fonksiyonlarıdır.

Bu sebeple :

$$dA_2 = dA_1 + \sum \frac{\delta f_A}{\delta v_i} v_i = dA_1 + f_1(v),$$

$$dL_2 = dL_1 + \sum \frac{\delta f_L}{\delta v_i} v_i = dL_1 + f_2(v).$$

Eskiden Laplas şartına giren $f_1(v) - f_2(v)$ Sin. B_2 fonksiyonu v_1 v_n nin karışık bir fonksiyonu sayılırdı.

Öleder, çıkardığı publikasyonda, PQ muayyen bir sınırı aşmadıkca bu fonksiyonun, v değerlerine tabi bir fonksiyon olduğunu göstermiştir.

Ölenderin bulduğu kolaylık üzerine, Laplas denklemi üçgenlerin aç denklemleri kadar kolaylaşmıştır. Halbuki, bu denklem, üçgen denklemlerinden de üstün iş görmektedir. Laplas şartı, zincir veya ağlardaki sistematik hataları önlemekte çok büyük bir rol oynamaktadır.

