TEST DAĞILIMLARININ SINIR DEĞERLERİNİN HESAPLANMASI

D.Uğur ŞANLI

ÖZET

Uygulamada sıkça kullanılan normal dağılım, F-dağılımı, t-dağılımı ve χ^2-dağılımlarının olasılık fonksiyonlarını hesaplayan seri formülleri ve yaklaşık sınır değerlerini veren formüller incelenerek, bu dağılımların sınır değerlerini Newton İterasyon Yöntemi'ne göre hesaplayan alt programlar QUICK BASIC programlama dilinde hazırlanmıştır.

ABSTRACT

The series formulas which compute the values of the probability functions and the formulas giving the approximate percentage points of the Normal, F,t and Chi-square Distributions have been discussed, and the sub procedures which compute the table values of these distributions according to the Newton's İteration Method have been prepared in QUICK BASIC computer language.

1. GİRİŞ

Jeodezik ölçülerin, matematiksel modellerin ve değerlendirme sonuçlarının irdelenmesinde istatistiksel test yöntemlerine başvurulmaktadır (Aksoy 1987;Ayan 1992; Demirel 1992; Koch 1987; Mikhail 1976; Öztürk 1989). Öngörülen bir hipotezin kabul edilebilirliği, o hipotez testi için geçerli olan T test büyüklüğünün, α yanılma olasılığına göre bulunan ilgili test dağılımının q sınır değerinden küçük olmasına ($T<q = f(\alpha)$) ya da yine T yardımı ile bulunan α_T'nin α'dan küçük çıkmasına bağlıdır ($\alpha = f(T)$). Bu amaçla en sık kullanılan dağılımlar; normal dağılım, F-dağılımı, χ^2-dağılımı ve t-dağılımları'dır. Bu dağılımların olasılık fonksiyonları integral alarak çözülebilir. İntegral çözümü pratik olmadığından bu fonksiyonlar sonlu seriler yardımıyla ifade edilmektedir (Abramowitz ve Stegun 1968). Yalnız, serbestlik derecesi büyüdükçe seri terimlerinin üsleri büyüdüğünden sayısal sorunlar ortaya çıkmakta ve yeterli doğruluktaki sonuçlara ulaşılamamaktadır. Sınır (= eksen) değerlerinin hesaplanması için kullanılan formüller de yaklaşık sonuç vermektedirler (Abramowitz ve Stegun 1968).

Roschlaub (1992) Dağılım fonksiyonlarının hesaplanmasında ortaya çıkan sayısal sorunları aşmak için kullanılan formülleri çarpanlara ayarmayı ve eksen değerlerinin daha doğru belirlenebilmesi için de Newton İterasyon Yöntemini önermektedir.

Uygulamada, sözü edilen test dağılımlarının sınır değerleri için çoğunlukla istatistik kitaplarına başvurulur. Uygulayıcı ilgili değeri bazen doğrudan, bazen de doğrusal enterpolasyon yoluyla elde eder. Oysa bunlar da değerlendirme anında bilgisayarda üretilebilmeli ve herhangi bir amaç için kullanılabilir nitelikte olmalıdır. Ayrıca, "Büyük Ölçekli Haritaların Yapım Yönetmeliği"nde bir takım testlerin (örneğin, uyuşumsuz ölçüler testi, bağlantı noktalarının uygunluğunun test edilmesi) zorunlu kılınması da bunun gerekliliğini ortaya koymaktadır.

Bu amaçla, uygulamada sıkça kullanılan normal dağılım, F-dağılımı, t-dağılımı ve χ^2-dağılımları'nın sınır değerlerini ve yanılma olasılıklarını hesaplayan alt programlar hazırlanmıştır. Olasılık fonksiyonlarının hesaplanmasında Abramowitz ve Stegun 1968'de verilen ve Roschlaub 1992'de sayısal analiz açısından programlamaya yatkın hale getirilen seri formüllerinden yararlanılmıştır. Eksen değerleri ise yine bu formüller yardımıyla Newton İterasyon Yöntemi (Thomas ve Finney 1988; Conte ve De Boor 1980; Aktaş vd. 1984) uygulanarak elde edilmiştir. Programlar QUICK BASIC dilinde hazırlanmış olup, algoritmaları diğer bir dile kolayca dönüştürülebilecek kadar basit ve açıktır.

2. NEWTON İTERASYON YÖNTEMİ İLE SINIR DEĞERLERİNİN BULUNMASI

Bir f(X) = 0 eşitliği doğrudan çözülemiyorsa köklerin bulunmasında sayısal yöntemlere başvurulur. Bunlardan birisi de Newton (bazı kaynaklarda Newton-Raphson) yöntemidir. Yöntem, y = f(X) fonksiyonuna yaklaşmak için f(X)'in sıfır olduğu noktalarda teğet doğrular kullanma esasına dayanır. Newton yöntemi'nin işlem adımları şu şekilde verilebilir:

a. f(X) = 0 eşitliğinin kökü için yaklaşık bir değer seçilir (ilk yaklaşım). Bu değerin seçimi için y = f(X)'in grafiğinden ya da bu çalışmada yapıldığı gibi ilk yaklaşımı yeterli doğrulukta bulan formüllerden yararlanılabilir.

b. İlk yaklaşım ikinciyi, ikinci yaklaşım üçüncüyü, n. yaklaşım ise n + 1. yi elde etmede kullanılır.

n'inci x_n yaklaşımından bir sonraki x_{n+1}'inci yaklaşıma ulaşmak için

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

formülü kullanılır (Thomas ve Finney 1988). Burada $f'(x_n)$, $f(x)$'in x_n'deki türevidir. İşlem, x_{n+1} ile x_n arasındaki fark kesme koşulu da denen belli bir δx değerine ulaşıncaya kadar sürdürülür (bk.bölüm 7).

Abramowitz-Stegun (1968) ve Roschlaub (1992) tarafından verilen formüller yanılma olasılığını, ya da doğrudan olasılığı bulmaya yöneliktir ve sınır değerleri ile serbestlik derecesinin fonksiyonudur (Örn., $Q(F|f_1,f_2)$, $P(t|f)$ vb.). Oysa bizim amacımız, olasılığın bulunması yanında, bu formüller yardımıyla eksen değerlerini (sınır değerleri) elde etmektir ve bu,iteratif yolla, yani Newton yöntemi uygulanarak gerçekleştirilecektir.

q herhangi bir dağılımın sınır değeriyse ve bu değer $1-\alpha$ istatistiksel güven ile belirleniyorsa, o zaman yanılma olasılığı fonksiyonu

$$Q(q\ ,f) = \alpha$$

olarak verilir. Newton yöntemi ancak $f(x) = 0$ durumunda uygulanabileceğinden

$$Q(q,f) - \alpha = 0$$

şeklinde yazılır ve bu bağıntının 1. türevi alınırsa (1) göz önünde bulundurularak

$$q_{n+1} = q_n - \frac{[\ Q(q,f)-\alpha\ ]}{\frac{\partial Q(q,f)}{\partial q}} = q_n + \frac{[\ \alpha-Q(q,f)\ ]}{\frac{\partial Q(q,f)}{\partial q}}$$

elde edilir.

3. NORMAL DAĞILIM SINIR DEĞERLERİ

Bu dağılım genellikle ölçü değerlerinin istatistiksel özelliklerini tanımlamada kullanılır ve yalnızca $P = 1 - \alpha$ olasılığına bağlıdır. Jeodezik amaçla yapılan ölçümler sonucu elde edilen değerlerin normal dağılımlı olduğu varsayılmaktadır.

Ölçülerin örneklem içinde hangi sıklıkta (yüzde kaç olasılıkla) bulunacağının belirlenmesinde kullanılan olasılık fonksiyonu normal dağılım için

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt \tag{2}$$

olarak verilmektedir. Burada x, X rasgele değişkeninin herhangi bir eksen değeridir. Eksen değerlerinin Newton İterasyon Yöntemi ile elde edilebilmesi için normal dağılımın olasılık fonksiyonu polinomsal bir yaklaşımla ifade edilmelidir. Bunun için $|\varepsilon x| < 1{,}5E-7$ lik bir doğrulukla

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2}(1 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 + d_5x^5 + d_6x^6)^{-16} \qquad (3)$$

polinomu önerilmektedir (Abramowitz ve Stegun 1968). Formülde yer alan katsayılar

$$d_1 = 0{,}0498673470\ , \qquad d_4 = 0{,}0000380036\ ,$$
$$d_2 = 0{,}0211410061\ , \qquad d_5 = 0{,}0000488906\ ,$$
$$d_3 = 0{,}0032776263\ , \qquad d_6 = 0{,}0000053830\ ,$$

dır. Yanılma olasılığı, yani Q(x) bulunmak isteniyorsa

$$P(x) + Q(x) = 1$$

ilişkisi göz önünde bulundurulmalıdır. Burada P(x) istatistiksel güven (yani olasılık), Q(x) yanılma olasılığı fonksiyonudur. Bu çalışmada yanılma olasılığını veren formüller dikkate alınacaktır. Şimdi 2. bölümde anlatılan Newton yöntemini uygulayabilmek için (3) eşitliğinin birinci türevini alalım.

$$Q(x) = 1 - P(x)$$

ve

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{16}{2}(1 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 + d_5x^5 + d_6x^6)^{-17} \qquad (4)$$
$$.(d_1 + 2d_2x + 3d_3x^2 + 4d_4x^3 + 5d_5x^4 + 6d_6x^5)$$

dir. x için ilk yaklaşık değer (Graf vd. 1987; Abramowitz ve Stegun 1968) $|\varepsilon u_p| < 4{,}5E-4$'lük bir hata ile

$$u_p = a - \frac{c_o + a.c_1 + a^2.c_2}{1 + a.b_1 + a^2.b_2 + a^3b_3} \qquad (5)$$

ve formülde yer alan katsayılar

$$a = \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha^2}} \qquad \alpha \neq 0$$

ve

$$c_o = 2{,}515517 \quad , \quad b_1 = 1{,}432788 \; ,$$

$$c_1 = 0{,}802853 \quad , \quad b_2 = 0{,}189269 \; ,$$

$$c_2 = 0{,}010328 \quad , \quad b_3 = 0{,}001308 \; ,$$

dir (Graf vd. 1987; Abramowitz ve Stegun 1968).

İterasyon işlemini gerçekleştirmek için gerekli ilişkiler kurulduktan sonra, son adım olarak iterasyonu sonlandıracak olan kesme değeri (ya da koşulu) pratik deneyimler sonucu $\delta_x = 0{,}5E-8$ olarak alınmaktadır (Roschlaub 1992). Her bir test dağılımı için kesme değerlerinin istenilen doğrulukta hesaplanması 7. bölümde ayrıntılı olarak incelenmektedir.

4. F-DAĞILIMI SINIR DEĞERLERİ

F-dağılımı f_1 ve f_2 serbestlik dereceleri ile α yanılma olasılığının bir fonksiyonudur, $F_{f_1,f_2,1-\alpha}$ gösterimi ile iki boyutlu bir dağılımdır. Uygulamada genellikle iki farklı dengeleme sonucu elde edilen varyansların, ya da dengeleme sonucu elde edilen varyansla, önsel varyansın kıyaslanmasında kullanılmaktadır (Cooper 1987; Aksoy 1987; Öztürk 1989). F-dağılımı için olasılık fonksiyonu

$$P(F|f_1,f_2) = \frac{\Gamma\,(f_1/2)\;\Gamma(f_2/2)\; f_1^{(1/2)f_1}\; f_2^{(1/2)f_2}}{\Gamma\,(\frac{f_1+f_2}{2})} \cdot \int_0^F \frac{t^{\frac{1}{2}(f_1-2)}}{(f_2+f_1 t)^{\frac{1}{2}(f_1+f_2)}}\,dt \qquad (6)$$

olarak verilmektedir (Γ = Gama fonksiyonu). Aynı zamanda F-dağılımı'nda

$$F_{f_1,f_2,1-\alpha} = \frac{1}{F_{f_2,f_1,\alpha}} \qquad (7)$$

yazılabilir (Spiegel 1980).

$P(F|f_1,f_2)$, daha doğrusu $Q(F|f_1,f_2)$ değerini (6)'dan hesaplamak için önce

$$x = \frac{f_2}{f_2+f_1F}$$

dönüşümü yapılır ve sonra seriye açılır. Bu seri, f_1 çift ise

$$Q = 1-P = x^{\frac{f_1+f_2-2}{2}} \{ 1+ \frac{f_1+f_2-2}{2} (\frac{1-x}{x}) + \frac{(f_1+f_2-2)(f_1+f_2-4)}{2.4} (\frac{1-x}{x})^2 + $$

$$+. . .+ \frac{(f_1+f_2-2)(f_1+f_2-4)\ldots(f_2+2)}{2.4\ldots(f_1-2)} (\frac{1-x}{x})^{\frac{f_1-2}{2}} \}, \quad (8)$$

$$x \neq 0, \; f_1 \neq 2$$

f_2 çift ise

$$Q = 1-P = 1-(1-x)^{\frac{f_1+f_2-2}{2}} \{ 1 + \frac{(f_1+f_2-2)}{2} (\frac{x}{1-x}) + ... +$$

$$+ \frac{(f_1+f_2-2)\ldots(f_1+2)}{2.4\ldots(f_2-2)} (\frac{x}{1-x})^{\frac{f_1-2}{2}} \} \quad (9)$$

$$f_2 \neq 2, \; x \neq 1$$

şeklinde verilir (Abramowitz ve Stegun 1968). Üslü ifadelerde üs 1'den$(f_1-2)/2$'ye ya da $(f_2-2)/2$'ye kadar sürmektedir (Olasılık fonksiyonları için Aksoy 1987, Mikhail ve Ackermann 1976, Cooper 1987'ye, bunların seri açınımları için ise Abramowitz-Stegun 1968 ve Roschlaub 1992'ye başvurulabilir).

Yanılma olasılığı Q, yukarıda verilen seri açınımları yardımıyla hesaplandığında, serbestlik derecesi büyüdükçe sayısal güçlükler ortaya çıkmakta ve bunun sonucu olarak, çözüm istenilen doğrulukta elde edilememektedir. Örneğin; (8) ve (9) dizilerinde

$$\frac{(f_1+f_2-2)(f_1+f_2-4)\ldots(f_2+2)}{2.4\ldots(f_1-2)}$$

kesrinin pay ve paydası büyüdükçe değerinin küçüldüğü,

$$\left(\frac{1-x}{x}\right),\ \left(\frac{1-x}{x}\right)^2,\ \ldots,\ \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{f_1-2}{2}}$$

terimlerinin ise monoton olarak arttığı gözlenmektedir.

Sözü edilen güçlükleri azaltmak amacıyla ortak terimler parantez dışına alınarak seriler çarpanlarına ayrılmıştır (Roschlaub 1992). Böylece (8) ve (9) serileri; f_1 tek ise

$$Q = x^{\frac{f_1+f_2-2}{2}} \{ 1 + \frac{f_1+f_2-2}{2} \left(\frac{1-x}{x}\right) [1 + \frac{f_1+f_2-4}{4} \left(\frac{1-x}{x}\right) [\ldots$$

$$\ldots [1+ \frac{f_2+2}{f_1-2} \left(\frac{1-x}{x}\right) [1]] \ \ldots\ ]] \} ,\ f_1 \neq 2,\ x \neq 0 \qquad (10)$$

f_2 çift ise

$$Q = 1-(1-x)^{\frac{f_1+f_2-2}{2}} \{1 + \frac{f_1+f_2-2}{2} \left(\frac{x}{1-x}\right) [1 + \frac{f_1+f_2-4}{4} \left(\frac{x}{1-x}\right) [\ldots$$

$$\ldots [1 + \frac{f_1+2}{f_2-2} \left(\frac{x}{1-x}\right) [1]] \ \ldots\ ]] \} \quad f_2 \neq 2,\ x \neq 1 \qquad (11)$$

şeklinde yazılabilir. F_1 ve aynı zamanda f_2 de tek ise o zaman yanılma olasılığı

$$Q = 1 - A + \beta$$

bağıntısıyla hesaplanır. Bu yazıda kullanılan P(x), Q(x) ve A(x) değerlerinin daha iyi anlaşılması açısından normal dağılım için şu tanımlar verilebilir:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} Z(t)\, dt$$

$$Q(x) = \int_{x}^{\infty} Z(t)\, dt$$

$$A(x) = \int_{-x}^{x} Z(t)\, dt$$

($Z(t)$ = olasılık yoğunluk fonksiyonu, Abramowitz ve Stegun 1968). A için önerilen seri, çarpanlara ayrılmış şekliyle

$$A = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\Theta + \sin\Theta \cos\left\{1 + \frac{2}{3}\cos^2\Theta\left[1+\frac{4}{5}\cos^2\Theta\left[\ldots\right.\right.\right.\right. \\ \qquad \left.\left.\left.\left.\ldots\left[1 + \frac{f_2-3}{f_2-2}\cos^2\Theta\,[1]\right]\ \ldots\right]\right]\right\} & f_2>1 \text{ ve } f_2\neq 2 \text{ ise} \\ \frac{2\,\Theta}{\pi} & f_2=1 \text{ ise} \end{cases} \quad (12)$$

olarak ve aynı şekilde β da

$$\beta = \begin{cases} c.\sin\Theta \cos^{f_2}\Theta\left\{1 + \frac{f_2+1}{3}\sin^2\Theta\left[1 + \frac{f_2+3}{5}\sin^2\Theta\left[\ldots\right.\right.\right. \\ \qquad \left.\left.\left.\ldots\left[1 + \frac{f_1+f_2-4}{f_1-2}\sin^2\Theta\,[1]\right]\ldots\right]\right]\right\} & f_2>1 \text{ ve } f_1\neq 2 \text{ ise} \\ 0 & f_2 = 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (13)$$

olarak verilir (Roschlaub 1992). Burada x ile F arasındaki dönüşüm göz önüne alınarak

$$\Theta = \arctan\sqrt{\frac{f_1}{f_2}F} = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} \qquad x\neq 0, f_2\neq 0$$

yazılabilir. (13)'deki c, n cift ise

$$c = \frac{2}{\pi}\prod_{i=1}^{m}\frac{2i.4}{2m-1+2i},$$

n tek ise

$$c = \frac{4}{\pi} \prod_{i=1}^{m} \frac{2i.4}{2m+1+2i} \qquad (14)$$

olur (Roschlaub 1992). Yine burada

$$n = \frac{f_2-1}{2} \quad \text{ve } m = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ çif ise} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir. (14) eşitliği $f_2 \geqslant 5$ için geçerlidir (f_2 tek olmak koşulu ile). $f_1 = 1$ ve $f_2 = 3$ için sırasıyla $c = 2/\pi$ ve $c = 4/\pi$ değerlerini alır.

Bu şekilde çarpanlara ayrılan serilerde sayısal sorunlar daha sınırlıdır ve hesap adımı sayısı minimuma inmiştir. Çünkü, kesirler adım adım geliştirilmiştir (Roschlaub 1992).

Newton yöntemi'nin uygulanabilmesi için (10), (11), (12), (13) denklemlerinin birinci derece türevleri alınırsa, f_1 çift ise

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{f_1+f_2-2}{2} \, \frac{1}{x} \, (Q - x^{\frac{f_1+f_2-2}{2}} \{ 1 + \frac{f_1+f_2-4}{4} (\frac{1-x}{x})$$

$$.[2 + \frac{f_1+f_2-6}{6} (\frac{1-x}{x}) \; [\ldots [\frac{f_1-4}{2} + \frac{f_2+2}{f_1-2} (\frac{1-x}{x}) [\frac{f_1-2}{2}]] \ldots]] \}), \qquad (15)$$

$$x \neq 0, \; f_1 \neq 2$$

f_2 çift ise

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{f_1+f_2-2}{2} \, \frac{1}{1-x} \, (1-Q-(1-x)^{\frac{f_1+f_2-4}{2}} \{1 + \frac{f_1+f_2-4}{4} (\frac{x}{1-x})$$

$$. [2 + \frac{f_1+f_2-6}{6} (\frac{x}{1-x}) [\ldots [\frac{f_2-4}{2} + \frac{f_1+2}{f_2-2} (\frac{x}{1-x}) [\frac{f_2-2}{2}]] \ldots]] \}) \qquad (16)$$

$$f_2 \neq 2, \; x \neq 1$$

elde edilir. f_1 ve f_2 tek ise

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

olacak şekilde

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

zincir kuralı uygulanarak

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\dot{\Theta}\,(1+(\frac{\pi}{2}A-\Theta)\cot\Theta - \sin^2\Theta\{1+\frac{2}{3}\cos^2\Theta\,[3+\frac{4}{5}\cos^2\Theta \\ \qquad [\,(f_2-4)+\frac{f_2-3}{f_2-2}\cos^2\Theta\,[(f_2-2)\,]\;\ldots\,]\,]\,\}) & f_2 > 1 \text{ ve } f_2 \neq 2 \text{ ise} \\ \frac{2}{\pi}\,\Theta & f_2 = 1 \text{ ise} \end{cases} \qquad (17)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \begin{cases} \Theta(\beta(\cot\Theta - f_2\tan\Theta) + c\sin(2\Theta)\cos^{f_2}\Theta\,\frac{f_2+1}{3}\{\sin\Theta + \frac{f_2+3}{5}\sin^2\Theta \\ \qquad [2\sin\Theta + \frac{f_2+5}{7}\sin^2\Theta[\ldots \\ \qquad \ldots[\frac{f_1-5}{2}\sin\Theta + \frac{f_1+f_2-4}{f_1-2}\sin^2\Theta[\frac{f_1-3}{2}\sin\Theta]] \\ \qquad \ldots\,]\,]\,\}) & f_2 > 1 \text{ ve } f_1 \neq 2 \text{ ise} \\ 0 & f_2 = 1 \text{ ise} \end{cases} \qquad (18)$$

yazılabilir. Burada

$$\dot{\Theta} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-1}{2x\sqrt{\frac{1-x}{x}}}$$

dir (Roschlaub 1992).

Yukarıdaki polinomsal serilerin kökleri F sınır değerleridir ve x yardımıyla elde edilmektedir. Sıfır yerlerinin Newton yöntemi ile çözülebilmesi için, daha önce de belirtildiği gibi. F_o ilk yaklaşımı ve iterasyon kesme koşulu yeterli doğrulukta bilinmelidir (Bronstein and Semendjajew 1987). F_o yaklaşık değeri

$$F_o = e^{2w}$$

olarak verilebilir (Abramowitz ve Stegun 1968). Burada

$$w = \frac{u_p\sqrt{h+\lambda}}{h} - \left(\frac{1}{f_1-1} - \frac{1}{f_2-1}\right)\left(\lambda + \frac{5}{6} - \frac{3}{3h}\right),$$

$$h = 2\left(\frac{1}{f_1-1} + \frac{1}{f_2-1}\right)^{-1}, \quad \lambda = \frac{u_p^2-3}{6} \tag{19}$$

ve u_p normal dağılım sınır değerini göstermektedir. F sınır değeri $dF<0{,}005$ doğrulukla belirlenmek isteniyorsa kesme koşulu

$$\delta x < \min \left| \frac{f_1(x_o \pm dx_o)^2}{f_2} dF \right| = \frac{f_1(x_o-dx_o)^2}{f_2} 0{,}005 \tag{20}$$

olmalıdır (bölüm 7). (19) eşitlikleri $f_1 = 1$ ve $f_2 = 1$ serbestlik dereceleri için tanımlı değildir. Bu serbestlik dereceleri için F sınır değeri aşağıdaki özel durumlar yardımıyla hesaplanmalıdır:

$$F_{f_1=1,f_2,1-\alpha} = t^2_{f_2,\frac{1-\alpha}{2}+\alpha} \quad \text{veya} \quad F_{f_2=1,f_1,\alpha} = t^2_{f_1,\frac{\alpha}{2}+1-\alpha}$$

$$F_{f_1=1,f_2=\infty,1-\alpha} = u^2_{p_{f_1,\frac{1-\alpha}{2}+\alpha}} \quad \text{veya} \quad F_{f_2=1,f_1=\infty,\alpha} = u^2_{p_{f_2,\frac{\alpha}{2}+1-\alpha}}$$

$$F_{f_1>2,f_2=\infty,1-\alpha} = \frac{\chi^2_{f_1,1-\alpha}}{f_1} \quad \text{veya} \quad F_{f_2>2,f_1=\infty,\alpha} = \frac{\chi^2_{f_2,\alpha}}{f_2} \tag{21}$$

(Abramowitz ve Stegun 1968).

Burada $f_1=1$ veya $f_2=1$ olması durumunda sınır değeri, (21)'in birinci bağıntıları yardımıyla hesaplanmaktadır.

Aynı şekilde $f_1=2$ veya $f_2=2$ olduğu zaman

$$F_{f_1=2,f_2,1-\alpha}=\frac{f_2}{2}\left[\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{\frac{2}{f_2}}-1\right] \qquad (21.a)$$

ya da

$$F_{f_2=2,f_1,\alpha}=\frac{f_1}{2}\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{f_1}}-1\right] \qquad (21.b)$$

formülleri kullanılır (Koch 1987). Bunlar için F_o yaklaşık değerine ve iterasyon yöntemiyle hesap yapmaya gerek yoktur (Graf vd. 1987).

x köklerinin hesaplanmasında her iterasyon adımı için r_i hesap adımı sayısı

$$r_i = \begin{cases} \dfrac{f_1-2}{2} & f_1 \text{ çift ise} \\[2ex] \dfrac{f_2-2}{2} & f_2 \text{ çift ise} \end{cases} \qquad i = \text{iterasyon sayısı}$$

olarak verilebilir. Aynı şekilde, tek serbestlik dereceleri için c'nin hesaplanması da göz önünde tutularak

$$r_i = r_c + r_A + r_\beta = r_c + \frac{f_2-3}{2} + \frac{f_1-3}{2}$$

$$r_c = m + 1$$

yazılabilir (r_c için (14)'ü gözden geçiriniz).

5. χ^2 DAĞILIMI SINIR DEĞERLERİ

χ^2-dağılımı f serbestlik derecesi ve α yanılma olasılığı parametrelerinin bir fonksiyonudur. Bu dağılım varyanslarla ilgili hipotez testlerinde ve bir kümenin normal dağılımlı olup olmadığının test edilmesinde kullanılır. Q yanılma olasılığı F-dağılımında olduğu gibi bir seriye açınım biçiminde verilebilir. f çift ise

$$Q(\chi^2) = e^{-\frac{\chi^2}{2}} \{1 + \frac{\chi^2}{2} [1 + \frac{\chi^2}{4} [\ldots [1 + \frac{\chi^2}{f-2}]] \ldots] \}, \qquad (22)$$

$$f \neq 2$$

f tek ise

$$Q(\chi^2) = 2Q(\chi)_{up} + 2Z(\chi)\chi \{1 + \frac{\chi^2}{3} [1 + \frac{\chi^2}{5} [\ldots [1 + \frac{\chi^2}{f-2}]] \ldots] \} \qquad (23)$$

$$f \neq 2$$

dir. Son formülde yer alan $Q(\chi)_{up}$, $|\varepsilon Q| < 1{,}5E-7$'lik bir hata ve

$$t = \sqrt{\chi^2}$$

dönüşümü ile

$$Q(\chi)_{up} = \frac{1}{2} (1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4 + d_5 t^5 + d_6 t^6)^{-16} \qquad (24)$$

olarak hesaplanabilir (Abramowitz ve Stegun 1968). d katsayıları daha önce (3) eşitliğinde geçen katsayılardır. Aynı şekilde

$$Z(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

dir. χ^2-dağılımı sınır değerlerinin hesaplanmasında r_i hesap adımı sayısı

$$r_i = \begin{cases} \frac{f-2}{2} & \text{f çift ise} \\ \frac{f-3}{2} & \text{f tek ise} \end{cases} \qquad i = \text{iterasyon sayısı}$$

olarak verilebilir (Roschlaub 1992), χ^2 sınır değerlerinin Newton yöntemi ile belirlenebilmesi için başlangıç değeri χ_o^2, f ≤ 30 için (21) eşitliklerinin üçüncü satırından bulunan F_o değeri ile

$$\chi_o^2 = f.F_o$$

olarak, f > 30 için ise normal dağılım sınır değeri yardımıyla

$$\chi_o^2 = f(1 - \frac{2}{9f} + u_p\sqrt{\frac{2}{9f}})^3$$

formülünden hesaplanır (Graf vd,1987, Abramowitz ve Stegun 1968). $Q(\chi)_{up}$' nin hesaplanması için polinomsal bir yaklaşım kullanıldığından kesme koşulu δx, $|\varepsilon Q|$ hatasından daha doğru belinlenemez, yani

$$\delta x = |\varepsilon Q| \leq 1{,}5E-7$$

olmalıdır. (22) ve (23) denklemlerinin türevleri (Abramowitz ve Stegun 1968' de verilen formülde m=1 alınarak) f çift ise

$$\frac{\partial Q(\chi^2|f)}{\partial(\chi^2)} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{\chi^2}{2}} \{\frac{\chi^2}{2}\,\frac{\chi^2}{4}\ldots\frac{\chi^2}{f-2}\}\,, \quad f_2\neq 2 \qquad (25)$$

ve f tek ise

$$\frac{\partial Q(\chi^2|f)}{\partial(\chi^2)} = -\frac{1}{2}\, e^{-\frac{\chi^2}{2}}\, \frac{\chi}{1}\{\frac{\chi^2}{3}\,\frac{\chi^2}{5}\ldots\frac{\chi^2}{f-2}\}\,, \quad f\neq 2 \qquad (26)$$

olarak elde edilir. f = 1 ve f = 2 özel durumları için (21) ve (21.a,b)eşitliklerinden yararlanılır:

$$\chi^2_{1-\alpha} = up^2_{\frac{1-\alpha}{2}} + \alpha \qquad f = 1 \text{ ise}$$

$$\chi^2_{1-\alpha} = -2\ln(1-\alpha) \qquad f = 2 \text{ ise}$$

Bu şekilde hesaplanan sınır değerleri $|\varepsilon\chi^2| < 4,5E-4$'lük bir hata ile yüklüdür ve basılı sınır değerlerinden (Abramowitz ve Stegun 1968'de verilen) daha doğrudur (Roschlaub 1992).

6. t DAĞILIMI SINIR DEĞERLERİ

t-dağılımı, serbestlik derecesi ile u_p normal dağılımın sınır değerlerine bağımlı bir fonksiyondur. Genellikle, normal dağılımlı rastgele değişkenlerin ortalama değerlerinin test edilmesinde ve uyuşumsuz ölçü testlerinde kullanılır. F-dağılımı'nın ($f_1 = 1$ ve f_2'nin herhangi bir değer aldığı) özel bir halidir. Eğer F sınır değerleri bu özel hal için elde edilecekse (bk.(21) eşitlikleri), o zaman t sınır değeri belirlenmelidir.

t_o başlangıç değeri için

$$t_o = u_p + \frac{g_1}{f_2} + \frac{g_2}{f_2^2} + \frac{g_3}{f_2^3} + \frac{g_4}{f_2^4}$$

formülü önerilmektedir (Abramowitz ve Stegun 1968). Formüldeki katsayılar

$$g_1 = \frac{1}{4}(u_p^3 + u_p),$$

$$g_2 = \frac{1}{96}(5u_p^5 + 16u_p^3 + 3u_p),$$

$$g_3 = \frac{1}{384}(3u_p^7 + 19u_p^5 + 17u_p^3 - 15u_p) \text{ ve}$$

$$g_4 = \frac{1}{92160}(79u_p^9 + 776u_p^7 + 1482u_p^5 - 1920u_p^3 - 945u_p)$$

dir. Newton yöntemi için gerekli denklemler, t-dağılımının simetrik olması nedeniyle A = 1-2Q ilişkisi ve

$$\Theta = \arctan\frac{t}{\sqrt{f_2}}, \qquad f_2 \neq 0$$

dönüşümü göz önünde bulundurularak, f_2 çift ise

$$A=\sin\Theta\{1+\frac{1}{2}\cos^2\Theta\,[1+\frac{3}{4}\cos^2\Theta[\ldots[1+\frac{f_2-3}{f_2-2}\cos^2\Theta[1]]\ldots]]\}, \quad f_2 \neq 2 \qquad (27)$$

şeklinde verilir. f_2 tek ise (12) bağıntısı kullanılır, Buradan türevler, f_2 çift ise

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \dot{\Theta}\,(A\cot\Theta - \cos\Theta\ \sin^2\Theta\{1+\frac{3}{2}\cos^2\Theta\,[1+\frac{5}{4}\cos^2\Theta\ [\ldots[1+\frac{f_2-3}{f_2-4}\cos^2\Theta[1]]\ldots]]\})$$

$$f_2 \neq 4 \qquad (28)$$

ve f_2 tek ise

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\dot{\Theta}\ \ (1+(\frac{\pi}{2}A-\Theta)\cot\Theta - \sin^2\Theta\{1+\frac{2}{3}\cos^2\Theta\ [3+\frac{4}{5}\cos^2\Theta \\ \quad .[\ldots[\ (f_2-4)+\frac{f_2-3}{f_2-2}\cos^2\Theta[1]]\ldots]]\}) & f_2 > 1,\ f_2 \neq 2 \\ \frac{2}{\pi}\dot{\Theta} & f_2 = 1 \end{cases} \qquad (29)$$

olarak verilir (Roschlaub 1992). Burada

$$\dot{\Theta} = \frac{1}{\sqrt{f_2}}\ \frac{1}{1+\frac{t^2}{f_2}}$$

dir, Her bir iterasyon için hesap adımı (27) yardımıyla

$$r_i = \begin{cases} \frac{f_2-3}{2} & f_2 \text{ tek ise} \\ \frac{f_2-2}{2} & f_2 \text{ çift ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir (Roschlaub 1992),

7. NEWTON İTERASYON YÖNTEMİ İÇİN KESME KOŞULLARININ BELİRLENMESİ

Diğer bütün iteratif yöntemlerde olduğu gibi Newton yönteminde de hesaba başlamak için bir yaklaşık değer seçilir. Bu yaklaşık değer yardımıyla bir sonraki adımda gerçek değere daha yakın bir değer bulunur. Her adımda bulunan yeni değer, bir sonraki değeri bulmada altlık oluşturur. İşlem istenilen doğruluğa, yani son bulunan değer ile bir önceki değer arasındaki δx farkı belli bir miktara ulaşıncaya kadar sürdürülür. (21) eşitlikleri incelenirse, $f_1 = 1$ veya $f_2 = 1$ olduğu durumlarda, F-dağılımının diğer bütün dağılımlar ile ilişkisi olduğu görülmektedir. Bu yüzden, kesme koşullarının belirlenmesinde F-dağılımı sınır değerlerinin doğruluğu (χ^2-dağılımı, t-dağılımı ve normal dağılımın, F-dağılımının özel hali olduğu düşünülerek) göz önünde bulundurulmuştur.

a. F-Dağılımı İçin Kesme Koşullarının Belirlenmesi :

4. Bölümde F-dağılımı sınır değerlerinin bulunması için verilen polinomsal seriler incelendiğinde, x'in kök olduğu görülür((8), (9), (10),(11) eşitlikleri) İterasyon işlemine başlamak için gerekli olan F_o yaklaşık değeri, $dF_o < 0{,}5$ hata ile yüklüdür (Roschlaub 1992) x kökünün hesaplanmasında kullanılacak olan kesme koşulunun belirlenmesi için x ile F arasındaki dönüşümde (bölüm 4) toplam diferansiyel alınırsa,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial F} dF \leqslant \left| \frac{-f_2 f_1}{(f_2+f_1F)^2} dF \right| = \frac{x^2 f_1}{f_2} dF$$

türetilebilir. Böylece x_o başlangıç değerinin hatası

$$dx_o = \frac{x_o^2 f_1}{f_2} dF_o = \frac{x_o^2 f_1}{f_2} 0{,}5$$

olarak elde edilir. İstatistik kitaplarındaki F-dağılımı tablolarını incelersek, eksen değerlerinin 0,5E-3 doğruluk ile verildiği gözlenir. Bu doğruluğa ulaşmak için kesme koşulu

$$\delta x < \min \left| \frac{f_1(x_o \pm dx_o)^2}{f_2} dF \right| = \frac{f_1(x_o - dx_o)^2}{f_2} 0{,}005$$

şeklinde verilir. Serbestlik derecesi küçüldükçe, F_o, kesin F sınır değeri ile karşılaştırılırsa dx_o'ın büyüdüğü görülür. Dolayısıyla bu durumda X'in daha doğru bulunması gerekir.

b. t-Dağılımı İçin Kesme Koşulunun Belirlenmesi :

$f_1 = 1$ veya $f_2 = 1$ olduğu zaman F-dağılımı değeri (21)'nin birinci denklemleri yardımıyla hesaplanabilir. Eğer F-dağılımı sınır değerleri bu eşitlikler yardımıyla hesaplanacaksa, t sınır değerlerinin hesaplanması için yapılan doğruluk araştırmasında $dF < 0{,}005$ koşulu göz önünde bulundurulmalıdır. Aşağıdaki

$$F_{1-\alpha} = t^2_{\frac{1-\alpha}{2}} + \alpha$$

ilişkisinde tam diferansiyeli alındığında

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}\, dt \leq \left| 2.t.dt \right|$$

elde edilir. $dF < 0{,}005$ koşulu dikkate alınarak

$$0{,}005 > 2.t_o.dt$$

yazılabilir (t_o = başlangıç değeridir, bk.bölüm 6). Buradan t sınır değerinin mutlak hatası

$$dt < \frac{0{,}005}{2t_o}$$

olarak belirlenir. Newton yöntemi için kesme hatası ise

$$\delta x < \min\left| \frac{0{,}005}{2(t_o \pm dt)} \right| = \frac{0{,}005}{2(t_o - dt)} \qquad (29)$$

olmalıdır (Roschlaub 1992).

c. χ^2-Dağılımı İçin Kesme Koşulunun Belirlenmesi :

$Q(\chi^2|f)$ fonksiyonunun hesaplanmasında kullanılan $Q(\chi^2)_{up}$, $|\varepsilon_Q| < 1{,}5E-7$ lik bir hata ile hesaplanabilir (Abramowitz ve Stegun 1968). χ^2 sınır değerlerinin bulunması için gerekli olan δx kesme koşulu bu $|\varepsilon_Q|$ hatasından daha doğru belirlenemez. Bu yüzden

$$\delta x = |\varepsilon_Q| < 1{,}5E-7$$

olmalıdır.

d. Normal Dağılım İçin Kesme Koşulunun Belirlenmesi :

Normal dağılım sınır değerlerinin belirlenebilmesi için bir ilk yaklaşım 4,5E-4 doğrulukla hesaplanabilir (Abramowitz ve Stegun 1968). F sınır değerini dF < 0,005'lik bir hata ile belirlemek için 4,5E-4'lük bir doğruluk önce yeterli görülebilir. $\alpha = 0{,}001$ için $u_p = 3{,}09$ değeri ile doğruluk (21)denklemlerinden

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u_p} du_p \leqslant \left| 2u_p du_p \right| = 2.3{,}09.4{,}5 \times 10^{-4} = 2{,}7 \times 10^{-3}$$

çıkar. Eğer F (7)'ye göre hesaplanırsa

$$F_{(f_1=\infty, f_2=1, \%99)} = \frac{1}{F_{(f_2=1, f_1=\infty, \%1)}} = \frac{1}{u_p} = \%\ 50{,}5$$

ve

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u_p} du_p \leqslant \left| \frac{-2}{u_p} du_p \right| = \frac{2}{(0{,}01253)^3} \times 4{,}5 \times 10^{-4} = 457{,}5$$

bulunur, bu da istenilen doğruluğa uygun düşmez. Pratik deneyimler göz önünde bulundurularak kesme koşulu için $\delta x = 0{,}5E-8$ önerilmektedir (Roschlaub 1992).

8. PROGRAM

Giriş bölümünde de belirtildiği gibi öngörülen bir hipotezin kabul edilebilirliği, o hipotez için geçerli olan T test büyüklüğünün ilgili test dağılımının q sınır (eksen) değerinden küçük çıkmasına ya da T test büyüklüğü ile hesaplanan α_T yanılma olasılığının öngörülen α'dan küçük olmasına bağlıdır. Bu durum göz önünde bulundurularak alt programlar; her bir test dağılımının yanılma olasılığını hesaplayan alt programlar (QFDag, QNormal, QShikar, qtdag), Newton İterasyon Yöntemi ile eksen değerlerini bulan alt programlar (NorDag, FDag, ShiDag, tDag) olmak üzere iki aşamalı olarak düşünülmüştür. F-dağılımı hariç, sınır değerlerini hesaplayan diğer alt programlar aynı zamanda yanılma olasılığını hesaplayan alt programları çağırırlar.Normal dağılım için hazırlanan alt program diğer tüm alt programlarca çağırılır.

F-dağılımı alt programı F_o değeri için normal dağılım, $f_1=1$ veya $f_2=1$ olduğunda t-dağılımı alt programlarını (bk.(21) eşitlikleri) çağırmaktadır. $f_1=3$ ve $f_1=5$ serbestlik dereceleri için (18) eşitliğinin seri kısmının aldığı değer programın akışını engellemektedir. Bu yüzden sadece bu serbestlik dereceleri için eşitliğin ilk terimi, yani

$$\dot{\Theta} \; (\; \beta \; (\cot\Theta \; - \; f_2\tan\Theta) \;)$$

dışındaki terimleri gözardı edilmiştir. Hesaplar bu şekilde yaklaşık yapılmasına karşın öngörülen doğruluğun (bk.bölüm 7) sağlandığı görülmüştür.

t-dağılımı alt programı t_o yaklaşık değeri için normal dağılım, sınır değerlerinin hesaplanması için qtdag yanılma olasılığı alt programını kullanmaktadır. F Dağılımında olduğu gibi, $f = 4$ için $\partial A/\partial t$ (28) eşitliğinin seri kısmı sonsuz değerini almakta, dolayısı ile bu da programın akışını engellemektedir. Aynı şekilde, bu serbestlik değeri için de hesaplanır.

$$\dot{\Theta} \; A \; \cot\Theta$$

dışındaki terimler ihmal edilerek yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar Abramowitz ve Stegun 1968'deki tablolarla karşılaştırıldığında, % 55 ile % 95 istatistiksel güvenleri arasında sonuçların istenilen doğrulukta olduğu,% 95' ten sonra ise $f < 5$ için sapmalar gösterdiği görülmüştür. Bu durumda kesme koşulu δx = 1E-7 alınarak, (yani iterasyon sayısı arttırılarak) yeterli doğruluktaki sonuçlara ulaşılmıştır.

χ^2-dağılımı OShiDag yanılma olasılığı alt programı ile, yaklaşık değerin hesaplanmasında, normal dağılım alt programlarını çağırmaktadır.

Yanılma olasılığını hesaplayan alt programların da birbirleriyle ilişkisi vardır. Örneğin, QShikar QNormal'i, QFdag qtdag dağılımını çağırmaktadır. qtdag alt programı A olasılığını (bölüm 4) hesapladığından, yanılma olasılığı için $Q = (1-A)/2$ dönüşümü yapılmalıdır.

Ayrıca, π sayısını hesaplayan pisayı # fonksiyonu hazırlanan tüm alt programlarca çağırılmaktadır. Alt programları çağırma işlemi CALL komutu kullanılmadan, alt program adı yazılıp boşluk bırakılarak ve ilgili parametreler virgül ayrımı ile yazılarak gerçekleştirilmiştir. Burada adı geçen tüm alt programlar ve bunlar arasındaki ilişkileri gösteren akış diyagramı EK-A'da sunulmuştur.

9. SONUÇ

Uygulamada kullanılan test dağılımlarının sınır değerleri ve yanılma olasılıklarını hesaplayan alt programlar QUICK BASIC programlama dilinde hazırlanmıştır. Bu alt programlar diğer bir dile kolayca dönüştürülebilir, istenilen programa monte edilebilirler. Böylece, değerlendirme anında sınır değerleri bilgisayarda üretilebilecek, istatistik dağılım çizelgelerine bakma ve enterpolasyon yapma gereği ortadan kalkacaktır. Dolayısıyla bilgisayarda değerlendirme işleminin tam otomasyonu sağlanmış olacaktır.

Bu programlarla elde edilen sınır değerleri, Abramowitz ve Stegun 1968' de verilen değerler ile karşılaştırılmış ve özellikle pratikte sıkça kullanılan %95 ve %99 güven düzeyleri için sonuçların yeterli doğrulukta olduğu görülmüştür. Yalnız, Roschlaub tarafından önerilen formüllerin F-dağılımında $f_1 = 3$ veya $f_1 = 5$, t-dağılımında $f = 4$ serbestlik dereceleri için elverişli sonuçlar vermediği, yani yakınsamayı önleyerek programları kesintiye uğrattığı saptanmıştır. Sorun, sadece bu serbestlik dereceleri için serilerin ilk terimleri alınarak çözülmüş ve elde edilen sonuçların yeterli doğrulukta olduğu görülmüştür.

TEŞEKKÜR: Bu çalışmanın oluşmasındaki değerli katkılarından dolayı sayın hocam Prof.Dr.Şerif HEKİMOĞLU'na teşekkür ederim.

K A Y N A K L A R

/1/ Abramowitz,M., Stegun,I.A. : Hand Book Of Mathematical Functions. With Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publicacions, Inc., New York, May 1968.

/2/ Aksoy,A. : Jeodezik Değerlerin Matematik-İstatistik Testlerle İrdelenmesi, Türkiye I.Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı, S.559, 23-27 Şubat 1987,Ankara.

/3/ Aktaş,Z.,Öncül,H., Ural,S. : Sayısal Çözümleme, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, 1984.

/4/ Ayan,T. : Uyuşumsuz Ölçüler Testi, Harita Mühendisleri Odası Dergisi, Sayı 72, 1992.

/5/ Bronstein,I., Semendjajew,K. : Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Thun 1987.

/6/ Conte,S.D., De Boor,C. : Elementary Numerical Analysis, An Algorithmic Approach, International Student Addition, Tokyo, 1980.

/7/ Cooper,M.A.R. : Control Surveys In Civil Engineering, Department of Civil Engineering, The City University,London, 1987.

/8/ Demirel,H. : Jeodezik Ağlarda Datum Tanımları ve Bağlantı Noktalarının Test Edilmesi, Harita Mühendisleri Odası Dergisi, Sayı 72, 1992.

/9/ Graf,U., Henning,H., Stange,K., Wilrich,P. : Formeln und Tabellen der Angewandten Mathematischen Statistik. Springer Verlag, Berlin,1987.

/10/ Mkhail,E.M., Ackerman,F. : Observations and Least Squares, IEP-Dun-Donnelley, Harper & Row, Publishers, New York, Hagerstown, San Fransisco, London, 1976.

/11/ Koch,K.R. : Parameterschatzung und Hypothesentests in Linearen Modellen, Dümmlers Verlag, Bonn, Zweite Aufl., 1987.

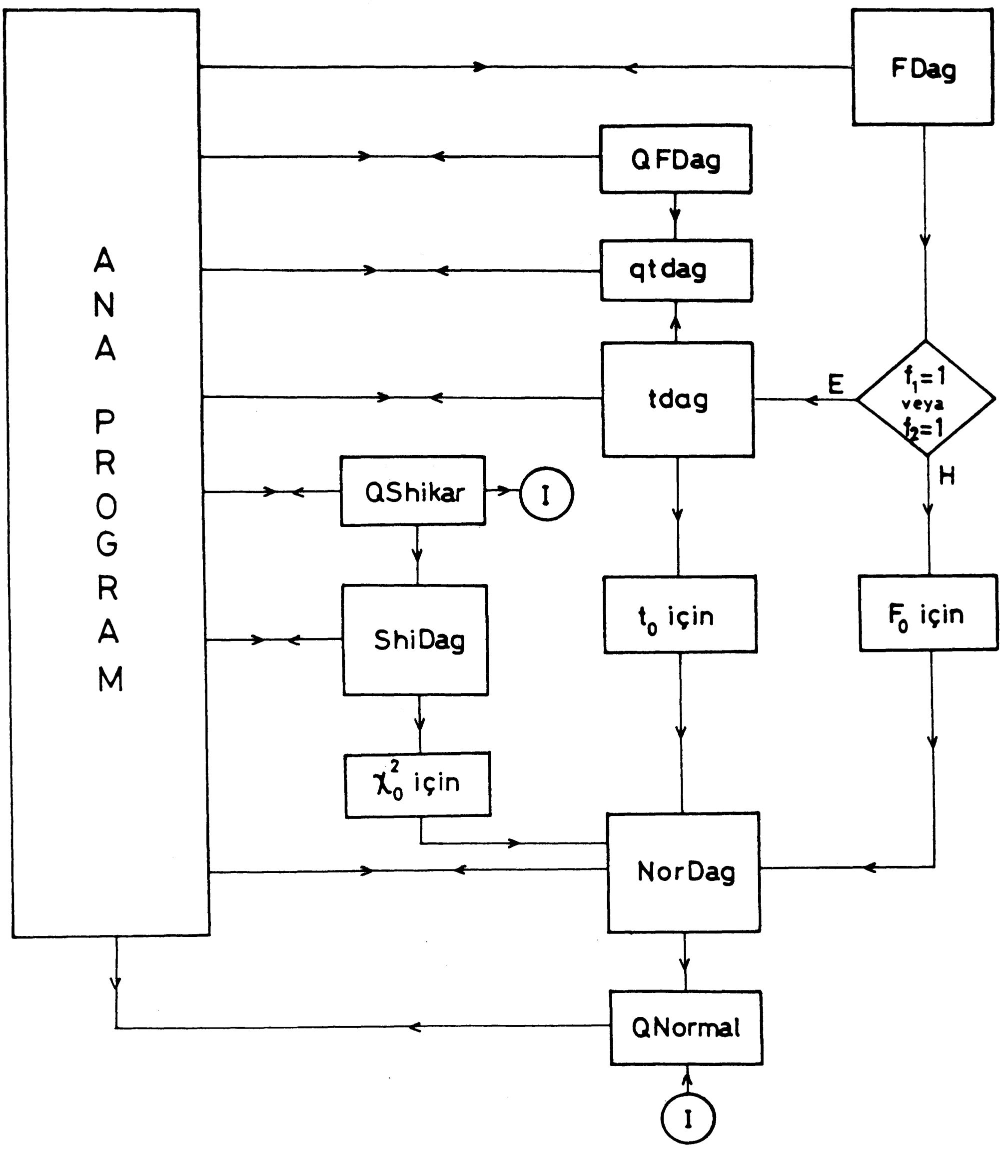
/12/ Öztürk,E., Şerbetçi,M. : Dengeleme Hesabı Cilt II.K.T.Ü.Yayınları, Trabzon, 1989.

/13/ Roschlaub,R. : Berechnung von Quantilen Verschiedener Statistischer Verteilungen, ZVF, Heft 6, Seite 323-335, Juni, 1992.

/14/ Spiegel,M.R. : Theory and Problems of Probability and Statistics. Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, New York, 1980.

/15/ Thomas,G.B., Finney,R.L. : Calculus And Analytic Geometry, 7th Edition, 1988.

/16/ : Açıklamalı-Örnekli Büyük Ölçekli Haritaların Yapım Yönetmeliği, TMMOB Harita ve Kadastro Mühendisleri Odası, İstanbul 1989.



Ana ve alt programlar arasındaki ilişkiler

1. SINIR DEĞERLERİNİ HESAPLAYAN ALT PROGRAMLAR

a. Normal Dağılım Sınır Değerlerini Hesaplayan Alt Program

```
SUB NorDag (alf, nordeg#)

IF alf = .5 THEN            ' alf istatistiksel güveni ifade ediyor
   nordeg# = 0
ELSEIF alf <> .5 THEN
   IF alf < .5 THEN
      alf = 1 - alf
      parametre = 1
   END IF
      CONST c0# = 2.515517
      CONST c1# = .802853
      CONST c2# = .010328
      CONST b1# = 1.432788
      CONST b2# = .189269
      CONST b3# = .001308
      a# = SQR(LOG(1 / (1 - alf) ^ 2))
      p = 1 - alf
      nordeg# = a# - (c0# + a# * c1# + a# ^ 2 * c2#) / (1 + a# * b1# + a# ^ 2 * b2# + a# ^ 3 * b3#)
   DO                                        ' iterasyon işlemi başlıyor
      QNormal nordeg#, qup#, katn#, t#      ' yanılma olasılığı hesaplanıyor
      dt1# = .049867347#
      dt2# = .0211410061#
      dt3# = .0032776263#
      dt4# = .0000380036#
      dt5# = .0000488906#
      dt6# = .000005383#                    ' türev hesaplanıyor
      dqdup# = (-16 / 2) * katn# ^ -17 * (dt1# + 2 * dt2# * t# + 3 * dt3# * t# ^ 2 + 4 * dt4# * t# ^ 3 + 5 *
              dt5# * t# ^ 4 + 6 * dt6# * t# ^ 5)
      nordeg# = nordeg# + (p - qup#) / dqdup#     ' normal dağılım tablo değeri
      dup# = 5E-09
   LOOP UNTIL (p - qup#) < dup#
END IF
   IF parametre = 1 THEN     'normal dağılım simetrik bir dağılım olduğundan
      nordeg# = -nordeg#     '%50 den küçük olasılıklar için bulunan değerin
   END IF                    'önüne (-) işareti konuyor
END SUB
```

b. F-Dağılımı Sınır Değerlerini Hesaplayan Alt Program

```
SUB FDag (f1 AS INTEGER, f2 AS INTEGER, alfa, f AS DOUBLE)

DIM h  AS DOUBLE, lam AS DOUBLE, up AS DOUBLE
DIM w AS DOUBLE, f0 AS DOUBLE, x AS DOUBLE
DIM k1 AS DOUBLE, dx0 AS DOUBLE, delx AS DOUBLE
DIM n AS INTEGER, us AS INTEGER, top AS DOUBLE
DIM hesad AS DOUBLE, q AS DOUBLE, dqdx AS DOUBLE
DIM s AS INTEGER, i  AS INTEGER, tdeg AS DOUBLE
DIM kat AS DOUBLE, teta AS DOUBLE, aterim AS DOUBLE
DIM fonk AS DOUBLE, terim AS DOUBLE, m AS INTEGER
DIM carpim AS DOUBLE, c AS DOUBLE, beta AS DOUBLE
```

```
DIM tetanok AS DOUBLE, dadx AS DOUBLE, pi AS DOUBLE
DIM terim1 AS DOUBLE, terim2 AS DOUBLE, terimtop AS DOUBLE
DIM dbdx AS DOUBLE
    p = 1 - alfa        'alfa istatistiksel güveni ifade ediyor
    pi = pisayi#
    NorDag alfa, up
IF f1 = 1 OR f2 = 1 THEN GOTO hesap:
    lam = (up ^ 2 - 3) / 6
    h = 2 * (1 / (f1 - 1) + 1 / (f2 - 1)) ^ -1
    w = (up * SQR(h + lam)) / h - (1 / (f1 - 1) - 1 / (f2 - 1)) * (lam + 5 / 6 - 2 / (3 * h))
    f0 = EXP(2 * w)                  ' yaklaşık Fo
    x = f2 / (f2 + f1 * f0)          ' x dönüşümü
    dx0 = (x ^ 2 * f1 * .5) / f2           'kesme koşulu
    delx = (f1 * (x - dx0) ^ 2 * .005) / f2
hesap:
DO
  IF f1 = 1 OR f2 = 1 THEN
     IF f1 = 1 THEN
        alfa = (1 - alfa) / 2 + alfa
        tDag f2, alfa, tdeg          ' f1=1 olduğundan t-Dağılımı çağırılıyor
        f = tdeg ^ 2
        EXIT DO
     ELSEIF f2 = 1 THEN
        alfa = (alfa / 2) + 1 - alfa
        f2 = f1
        tDag f2, alfa, tdeg          ' f2=1 olduğundan t-Dağılımı çağırılıyor
        f = 1 / tdeg ^ 2
        EXIT DO
     END IF
  ELSEIF f1 = 2 THEN
     f = (f2 / 2) * ((1 / (1 - alfa)) ^ (2 / f2) - 1)
     EXIT DO
  ELSEIF f2 = 2 THEN
     f = 1 / ((f1 / 2) * ((1 / alfa) ^ (2 / f1) - 1))
     EXIT DO
  ELSEIF f1 MOD 2 = 0 THEN              ' f1 çift ise yanılma olasılığı
     k1 = (1 - x) / x
     us = (f1 - 2) / 2
     n = us * 2: top = 1
        DO WHILE n > 0
           hesad = ((f1 + f2 - n) / n) * k1
           top = top * hesad
           top = top + 1
           n = n - 2
        LOOP
           q = x ^ ((f1 + f2 - 2) / 2) * top
           n = us * 2:  top = 1: hesad = 0
        DO WHILE n > 2                        ' f1 çift ise yanılma olasılığının türevi
           hesad = ((f1 + f2 - n) / n) * k1
           IF n = us * 2 THEN hesad = hesad * ((f1 - 2) / 2)
           top = top * hesad
           s = (f1 - 4) / 2
           top = top + s
           s = s - 1
           n = n - 2
        LOOP
```

```
        dqdx = ((f1 + f2 - 2) / (2 * x)) * (q - x ^ ((f1 + f2 - 4) / 2) * top)
ELSEIF f2 MOD 2 = 0 AND f1 MOD 2 <> 0 THEN     ' f2 çift ve f1 tek ise yanılma olasılığı
   us = (f2 - 2) / 2
   n = us * 2: top = 1
   k1 = x / (1 - x)
      DO WHILE n > 0
         hesad = ((f1 + f2 - n) / n) * k1
         top = top * hesad
         top = top + 1
         n = n - 2
      LOOP
         q = 1 - (1 - x) ^ ((f1 + f2 - 2) / 2) * top
         n = us * 2: top = 1: hesad = 0: s = (f2 - 4) / 2
      DO WHILE n > 2                                      ' türev
         hesad = ((f1 + f2 - n) / n) * k1
         IF n = us * 2 THEN hesad = hesad * ((f2 - 2) / 2)
         top = top * hesad
         top = top + s
         s = s - 1
         n = n - 2
      LOOP
   dqdx = ((f1 + f2 - 2) / (2 * (1 - x))) * (1 - q - (1 - x) ^ ((f1 + f2 - 4) / 2) * top)
ELSEIF f1 MOD 2 <> 0 AND f2 MOD 2 <> 0 THEN       ' f1 tek ve f2 tek ise yanılma olasılığı
   IF f2 > 1 THEN
      i = f2 - 2: kat = 1: top = 0: n = 0
      teta = ATN(SQR((1 - x) / x))
         DO WHILE i > 1
            n = n + 1
            kat = kat * (2 * n) / (2 * n + 1)
            fonk = COS(teta) ^ (2 * n + 1)
            terim = kat * fonk
            top = top + terim
            i = i - 2
         LOOP
      aterim = (2 / pi) * (teta + SIN(teta) * (COS(teta) + top))
   ELSEIF f2 = 1 THEN
      aterim = (2 / pi) * teta
   END IF                                  ' c'nin hesaplanması
      kat = 0: n = 0
      n = (f2 - 1) / 2
         IF n MOD 2 <> 0 THEN
            m = (n - 1) / 2
            kat = 4 / pi
            i = 1: carpim = 1: fonk = 0
               DO UNTIL i > m
                  fonk = (2 * i * 4) / (2 * m + 1 + 2 * i)
                  carpim = carpim * fonk
                  i = i + 1
               LOOP
            c = kat * carpim
         ELSEIF n MOD 2 = 0 THEN
            m = n / 2
            kat = 2 / pi: carpim = 1: i = 1
               DO UNTIL i > m
                  fonk = (2 * i * 4) / (2 * m - 1 + 2 * i)
                  carpim = carpim * fonk
```

```
            i = i + 1
          LOOP
        c = kat * carpim
      END IF
    IF f2 > 1 THEN
      n = f1 - 4: top = 1: terim = 0
        DO UNTIL n < 1
          terim = ((f2 + n) / (n + 2)) * SIN(teta) ^ 2
          top = top * terim
          top = top + 1
          n = n - 2
        LOOP
      beta = c * SIN(teta) * COS(teta) ^ f2 * top
    ELSEIF f2 = 1 THEN
      beta = 0
    END IF
      q = 1 - aterim + beta
      tetanok = -1 / (2 * x * SQR((1 - x) / x))          ' türev
      n = f2 - 4: m = f2 - 3: top = 1: fonk = 0
       DO UNTIL n < 1
          fonk = (m / (n + 2)) * COS(teta) ^ 2
          IF n = f2 - 4 THEN fonk = fonk * (f2 - 2)
          top = top * fonk
          top = top + n
          n = n - 2: m = m - 2
       LOOP
    dadx = (2 / pi) * tetanok * (1 + ((pi / 2) * aterim - teta) * (1 / TAN(teta)) - SIN(teta) ^ 2 * top)
    n = (f1 - 5) / 2: m = f1 - 4: terim = 0: terimtop = 1
      IF f2 > 1 THEN
        DO UNTIL n < 1
          terim = ((f2 + m) / (m + 2)) * SIN(teta) ^ 2
          IF n = (f1 - 5) / 2 THEN terim = terim * ((f1 - 3) / 2) * SIN(teta)
          terimtop = terimtop * terim
          terimtop = terimtop + n * SIN(teta)
          n = n - 1: m = m - 2
        LOOP
          IF f1 = 3 OR f1 = 5 THEN
            dbdx = tetanok * (beta * ((1 / TAN(teta)) - f2 * TAN(teta)))
          ELSEIF f1 > 5 THEN
            dbdx = tetanok * (beta * ((1 / TAN(teta)) - f2 * TAN(teta)) + c * SIN(2 * teta) * COS(teta)
            ^ f2 * ((f2 + 1) / 3) * terimtop) END IF
      ELSEIF f2 = 1 THEN
        dbdx = 0
      END IF
    dqdx = -dadx + dbdx
  END IF
    x = x + (p - q) / ABS(dqdx)          ' Newton Yöntemi için kullanılan formül
    f = (f2 / x - f2) / f1
LOOP UNTIL ABS(p - q) < delx
END SUB
```

c. χ^2-Dağılımı Sınır Değerlerini Hesaplayan Alt Program

```
SUB ShiDag (f AS INTEGER, alfa, shikare AS DOUBLE)
   DIM up AS DOUBLE, zx AS DOUBLE
   DIM pi AS DOUBLE, tshi AS DOUBLE
```

```
    DIM qxup AS DOUBLE, qshi AS DOUBLE
    DIM terim AS DOUBLE, top AS DOUBLE
    DIM n AS INTEGER, dqdshi AS DOUBLE
    DIM lamda AS DOUBLE, h AS DOUBLE
    DIM w AS DOUBLE
IF alfa < .5 THEN
   parametre = 1
END IF
   pi = pisayi#
   p = 1 - alfa: epsshi = 1.5E-07  ' p = öngörülen yanılma olasılığı için
   NorDag alfa, up                 '     kullanılan parametre
IF parametre = 1 THEN              ' epsshi = kesme koşulu
   alfa = 1 - alfa
END IF
IF f > 2 AND f <= 30 THEN         ' yaklaşık χ² değerinin hesaplanması
   lamda = (up ^ 2 - 3) / 6
   h = 2 * (1 / (f - 1)) ^ -1
   w = (up * SQR(h + lamda)) / h - (1 / (f - 1)) * (lamda + 5 / 6 - 2 / (3 * h))
   f0# = EXP(2 * w)
   shikare = f0# * f
ELSEIF f > 30 THEN
   shikare = f * (1 - (2 / (9 * f)) + up * SQR(2 / (9 * f))) ^ 3  ' yaklaşık
END IF                                                           ' shikare
DO
  IF f = 1 THEN
     up = 0
     alfa = ((1 - alfa) / 2) + alfa
     NorDag alfa, up
     shikare = up ^ 2
     EXIT DO
  ELSEIF f = 2 THEN
     shikare = -2 * LOG(1 - alfa)
     EXIT DO
  END IF
     QShikar qshi, shikare, f
  IF f MOD 2 = 0 THEN
     n = f - 2: top = 1            ' f cift ise q'nun türevi
         DO UNTIL n < 2
            top = top * (shikare / n)
            n = n - 2
         LOOP
     dqdshi = -SQR(pi / 2) * EXP(-shikare / 2) * top
  ELSEIF f MOD 2 <> 0 THEN
     n = f - 2: top = 1            ' f tek ise q'nun türevi
         DO UNTIL n < 3
            top = top * (shikare / n)
            n = n - 2
         LOOP
     dqdshi = -(1 / 2) * EXP(-shikare / 2) * SQR(shikare) * top
  END IF
     shikare = shikare + (p - qshi) / dqdshi
LOOP UNTIL ABS(p - qshi) < epsshi
END SUB
```

d. t-Dağılımı Sınır Değerlerini Hesaplayan Alt Program

```
SUB tDag (f2 AS INTEGER, alfa, t AS DOUBLE)
    DIM g1  AS DOUBLE
    DIM g2  AS DOUBLE, g3 AS DOUBLE
    DIM g4  AS DOUBLE
    DIM teta AS DOUBLE, terim AS DOUBLE
    DIM n AS INTEGER, a AS DOUBLE
    DIM top AS DOUBLE, pi AS DOUBLE
    DIM up AS DOUBLE, dadt AS DOUBLE
    DIM tetanok AS DOUBLE, dt AS DOUBLE
    DIM epst AS DOUBLE
    pi = pisayi#
    p = 1 - alfa
    r = 1 - 2 * p           ' r = A   olarak kullanılıyor
IF alfa = .5 THEN
    t = 0
ELSEIF alfa > .5 THEN
    NorDag alfa, up
    g1 = (1 / 4) * (up ^ 3 + up)
    g2 = (1 / 96) * (5 * up ^ 5 + 16 * up ^ 3 + 3 * up)
    g3 = (1 / 384) * (3 * up ^ 7 + 19 * up ^ 5 + 17 * up ^ 3 - 15 * up)
    g4 = (1 / 92160) * (79 * up ^ 9 + 776 * up ^ 7 + 1482 * up ^ 5 - 1920 * up ^ 3 - 945 * up)
    t = up + g1 / f2 + g2 / f2 ^ 2 + g3 / f2 ^ 3 + g4 / f2 ^ 4  ' to = yaklaşık tablo degeri
       IF alfa > .95 AND f <= 5 THEN
          epst = .0000001                'kesme koşulunun belirlenmesi
       ELSE
          dt = (.005 / (2 * t)) - 1E-10
          epst = .005 / (2 * (t - dt))
       END IF
DO
   qtdag t, f2, a, teta#
   tetanok = (1 / SQR(f2)) * (1 / (1 + t ^ 2 / f2))
      IF f2 MOD 2 <> 0 THEN              ' dA / dt' nin hesaplanması
         n = f2 - 4: top = 1             ' f2 tek ise
            IF f2 > 1 THEN
               DO UNTIL n < 1
                  terim = ((n + 1) / (n + 2)) * COS(teta) ^ 2
                     IF n = f2 - 4 THEN terim = terim * (f2 - 2)
                  top = top * terim
                  top = top + n
                  n = n - 2
               LOOP
                  dadt = (2 / pi) * tetanok * (1 + ((pi / 2) * a - teta) * (1 / TAN(teta)) - SIN(teta) ^ 2 *
                         top)
            ELSEIF f2 = 1 THEN
                  dadt = (2 / pi) * tetanok
            END IF
      ELSEIF f2 MOD 2 = 0 THEN               ' dA / dt' nin hesaplanması
         n = f2 - 3: top = 1                 ' f2 çift ise
            DO UNTIL n \ 3
               terim = (n / (n - 1)) * COS(teta) ^ 2
               top = top * terim
               top = top + 1
               n = n - 2
            LOOP
```

```
        IF f <= 4 THEN
          dadt = tetanok * a * (1 / TAN(teta))
        ELSEIF f > 4 THEN
          dadt = tetanok * (a * (1 / TAN(teta)) - COS(teta) * SIN(teta) ^ 2 * top)
        END IF
      END IF
   t = t + (r - a) / ABS(dadt)
LOOP UNTIL (r - a) < ABS(epst)
END IF
END SUB
```

2. YANILMA OLASILIKLARINI HESAPLAYAN ALT PROGRAMLAR

a. Normal Dağılım Yanılma Olasılığını Hesaplayan Alt Program

```
SUB QNormal (nordeg#, qup#, katn#, t#)

   t# = SQR(nordeg# ^ 2)
   d1# = .049867347# * t#
   d2# = .0211410061# * t# ^ 2
   d3# = .0032776263# * t# ^ 3
   d4# = .0000380036# * t# ^ 4
   d5# = .0000488906# * t# ^ 5
   d6# = .000005383# * t# ^ 6
   katn# = (1 + d1# + d2# + d3# + d4# + d5# + d6#)
   qup# = (1 / 2) * katn# ^ -16
END SUB
```

b. F-Dağılımı Yanılma Olasılığını Hesaplayan Alt Program

```
SUB QFDag (f1 AS INTEGER, f2 AS INTEGER, f AS DOUBLE, q AS DOUBLE)

DIM k1 AS DOUBLE, tdeg AS DOUBLE
DIM us AS INTEGER, n AS INTEGER
DIM top AS DOUBLE, hesad AS DOUBLE
DIM teta AS DOUBLE, kat AS DOUBLE
DIM i AS INTEGER, fonk AS DOUBLE
DIM terim AS DOUBLE, aterim AS DOUBLE
DIM carpim AS DOUBLE, c AS DOUBLE
DIM m AS INTEGER, beta AS DOUBLE
DIM x AS DOUBLE
    pi = pisayi#
    x = f2 / (f2 + f1 * f)
IF f1 = 1 OR f2 = 1 THEN
   IF f1 = 1 THEN
      tdeg = SQR(f)
      qtdag tdeg, f2, q, teta#
      q = 1 - q
   ELSEIF f2 = 1 THEN
      tdeg = SQR(1 / f)
      f2 = f1
      qtdag tdeg, f2%, q, teta#
   END IF
ELSEIF f1 MOD 2 = 0 THEN
   k1 = (1 - x) / x
   us = (f1 - 2) / 2
```

```
   n = us * 2: top = 1
      DO WHILE n > 0
         hesad = ((f1 + f2 - n) / n) * k1
         top = top * hesad
         top = top + 1
         n = n - 2
      LOOP
   q = x ^ ((f1 + f2 - 2) / 2) * top
ELSEIF f2 MOD 2 = 0 AND f1 MOD 2 <> 0 THEN
   us = (f2 - 2) / 2
   n = us * 2: top = 1
   k1 = x / (1 - x)
      DO WHILE n > 0
         hesad = ((f1 + f2 - n) / n) * k1
         top = top * hesad
         top = top + 1
         n = n - 2
      LOOP
   q = 1 - (1 - x) ^ ((f1 + f2 - 2) / 2) * top
ELSEIF f1 MOD 2 <> 0 AND f2 MOD 2 <> 0 THEN
   IF f2 > 1 THEN
      i = f2 - 2: kat = 1: top = 0: n = 0
      teta = ATN(SQR((1 - x) / x))
         DO WHILE i > 1
            n = n + 1
            kat = kat * (2 * n) / (2 * n + 1)
            fonk = COS(teta) ^ (2 * n + 1)
            terim = kat * fonk
            top = top + terim
            i = i - 2
         LOOP
      aterim = (2 / pi) * (teta + SIN(teta) * (COS(teta) + top))
   ELSEIF f2 = 1 THEN
      aterim = (2 / pi) * teta
   END IF
      kat = 0: n = 0
      n = (f2 - 1) / 2
         IF n MOD 2 <> 0 THEN
            m = (n - 1) / 2
            kat = 4 / pi
            i = 1: carpim = 1: fonk = 0
             DO UNTIL i > m
                fonk = (2 * i * 4) / (2 * m + 1 + 2 * i)
                carpim = carpim * fonk
                i = i + 1
             LOOP
            c = kat * carpim
         ELSEIF n MOD 2 = 0 THEN
            m = n / 2
            kat = 2 / pi: carpim = 1: i = 1
             DO UNTIL i > m
                fonk = (2 * i * 4) / (2 * m - 1 + 2 * i)
                carpim = carpim * fonk
                i = i + 1
             LOOP
            c = kat * carpim
```

```
        END IF
        IF f2 > 1 THEN
           n = f1 - 4: top = 1: terim = 0
             DO UNTIL n < 1
                terim = ((f2 + n) / (n + 2)) * SIN(teta) ^ 2
                top = top * terim
                top = top + 1
                n = n - 2
             LOOP
           beta = c * SIN(teta) * COS(teta) ^ f2 * top
        ELSEIF f2 = 1 THEN
           beta = 0
        END IF
   q = 1 - aterim + beta
END IF
END SUB
```

c. χ^2-Dağılımı Yanılma Olasılığını Hesaplayan Alt Program

```
SUB QShikar (qsh AS DOUBLE, shikare AS DOUBLE, f AS INTEGER)

DIM up  AS DOUBLE
DIM n AS INTEGER, zx AS DOUBLE
DIM top AS DOUBLE, terim AS DOUBLE
DIM tshi AS DOUBLE, qxup AS DOUBLE
DIM pi AS DOUBLE
   pi = pisayi#
IF f = 1 THEN
   up = SQR(shikare)
   QNormal up, qsh, katn#, t#
   qsh = 1 + 2 * qsh - 1
ELSEIF f MOD 2 = 0 THEN
   n = f - 2: top = 1                 ' f çift ise q yanılma olasılığı
      DO UNTIL n < 2
         terim = shikare / n
         top = top * terim
         top = top + 1
         n = n - 2
      LOOP
   qsh = EXP(-shikare / 2) * top
ELSEIF f MOD 2 <> 0 THEN
   zx = (1 / SQR(2 * pi)) * EXP(-shikare / 2)
   tshi = SQR(shikare)
   d1# = .049867347# * tshi
   d2# = .0211410061# * tshi ^ 2
   d3# = .0032776263# * tshi ^ 3
   d4# = .0000380036# * tshi ^ 4
   d5# = .0000488906# * tshi ^ 5
   d6# = .000005383# * tshi ^ 6
   qxup = (1 / 2) * (1 + d1# + d2# + d3# + d4# + d5# + d6#) ^ -16
   n = f - 2: top = 1
       DO UNTIL n < 3                 ' f tek ise q yanılma olasılığı
          terim = shikare / n
          top = top * terim
          top = top + 1
          n = n - 2
```

```
      LOOP
   qsh = 2 * qxup + 2 * zx * SQR(shikare) * top
END IF
END SUB
```

d. t-Dağılımı Yanılma Olasılığını Hesaplayan Alt Program

```
SUB qtdag (t AS DOUBLE, f2 AS INTEGER, a AS DOUBLE, teta AS DOUBLE)
    DIM n  AS INTEGER
    DIM terim AS DOUBLE, top AS DOUBLE
    DIM pi AS DOUBLE, tetanok AS DOUBLE
pi = pisayi#

    teta = ATN(t / SQR(f2))
IF f2 MOD 2 <> 0 THEN          ' olasılığın hesaplanması   A = 1 - 2Q
   IF f2 > 1 THEN
      n = f2 - 3: top = 1
         DO UNTIL n < 2
            terim = (n / (n + 1)) * COS(teta) ^ 2
            top = top * terim
            top = top + 1
            n = n - 2
         LOOP
      a = (2 / pi) * (teta + SIN(teta) * COS(teta) * top)
   ELSEIF f2 = 1 THEN
      a = (2 * teta) / pi
   END IF
ELSEIF f2 MOD 2 = 0 THEN
   n = f2 - 3: top = 1
      DO UNTIL n < 1
         terim = (n / (n + 1)) * COS(teta) ^ 2
         top = top * terim
         top = top + 1
         n = n - 2
      LOOP
   a = SIN(teta) * top
END IF
END SUB
```

3. Pİ SAYISINI HESAPLAYAN FONKSİYON

```
FUNCTION pisayi#
  pisayi# = 4 * ATN(1)
END FUNCTION
```

YAZAR ADRESLERİ

Prof.Dr.Şerif HEKİMOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi
İnşaat Fakültesi
Jeodezi ve Fotogrametri Müh.Bölümü
80750 Yıldız/İSTANBUL

Doç.Dr.Müh.Bnb.M.Emin AYHAN
Yük.Müh.Yzb.Mustafa ŞİMŞEK
Harita Genel Komutanlığı
06100 ANKARA

Yük.Müh.Bnb.İbrahim KINIK
Müh.Ütğm.Ulvi KOCAİLİK
Harita Genel Komutanlığı
06100 ANKARA

Doç.Dr.Aykut BARKA
İstanbul Teknik Üniversitesi
Maden Fakültesi
Jeoloji Mühendisliği Bölümü
80626 Ayazağa/İSTANBUL

Yük.Müh.Bnb.Mustafa ÖNDER
Harita Genel Komutanlığı
06100 ANKARA

Yük.Müh.D.Uğur ŞANLI
Yıldız Teknik Üniversitesi
İnşaat Fakültesi
Jeodezi ve Fotogrametri Müh.Bölümü
80750 Yıldız/İSTANBUL