

# SAYISAL GÖRÜNTÜLERDE ANA BİLEŞENLER DÖNÜŞÜMÜ

## (THE PRINCIPAL COMPONENTS TRANSFORMATION ON DIGITAL IMAGES)

**M. Devrim AKÇA**  
**Sedat DOĞAN**

### ÖZET

Ana bileşenler dönüşümü (principal components transformation), aralarında yüksek korelasyon bulunan çok değişkenli verileri, aralarında korelasyon olmayan yeni bir koordinat sistemine dönüştüren istatistiksel bir veri dönüşümü yöntemidir. Bu dönüşüm, farklı disiplinlerce çok değişkenli (çok boyutlu) verilerin analizinde (multivariate analysis) kullanılmaktadır. Özellikle sinyallerin iletiminde sıkça kullanılan bu dönüşüm, sayısal görüntülerin de sinyal olarak yorumlanabilmesi sayesinde, görüntü işleme uygulamalarında da sıkça kullanılmaktadır. Bu çalışmada, sayısal görüntülerde ana bileşenler dönüşümü anlatılmış ve 24 bpp'lik bir test görüntüsü üzerinde yapılan uygulama sunulmuştur. Uygulama, makalenin yazarları tarafından Borland C++ Builder programlama dilinde yazılmış bir bilgisayar programı tarafından gerçekleştirilmiştir. Makalenin sonunda, programın temel fonksiyonlarının kaynak kodları verilmiştir. Orijinal program, <http://www.omu.edu.tr/akad/fklt/muh/jeodezi.html> adresinden edinilebilir..

### ABSTRACT

The principal components transformation is a statistical data transformation which maps the high correlated multivariate data to a new coordinate system where the data is uncorrelated. This transformation is used by various disciplines. The principal components transformation is especially used in the transmission theory of digital signals. Since digital images can also be interpreted as of special type digital signals, this transformation is also used in digital image processing frequently, for various purposes. In this paper, the principal components transformation has been explained and a sample application has been performed on 24 bpp test image, has been presented. This sample application has been performed with a computer program written by the authors, and has been coded in Borland C++ Builder programming language. At the end of the paper, source codes of the basic functions of the program have also been given. Whole of the original program can be downloaded from <http://www.omu.edu.tr/akad/fklt/muh/jeodezi.html> web address.

### 1. GİRİŞ

Çok değişkenli analiz konusu, iki veya daha çok boyutlu rasgele değişkenleri bir bütün olarak ele alan ve değişkenler arasındaki ilişkileri göz önünde tutarak bütünsel bir sonuç üreten istatistiksel tekniklerden meydana gelmektedir. Bu istatistiksel tekniklere örnek olarak; korelasyon ve regresyon analizi verilebilir. Bununla birlikte, çok değişkenli verilerin analizinde, bütüncül istatistiksel sonuçlar üretmenin ötesinde, çok değişkenli veri kümesinin yapısını tanımlamaya yönelik veri-çözümleme teknikleri de vardır. Ana bileşenler analizi böyle bir tekniktir. Ana bileşenler yöntemi, bazı kesin koşulları yerine getirerek, bir grup korelasyonlu değişkenlere doğrusal dönüşüm uygulayan bir veri-çözümleme tekniğidir. Bu

koşullardan en önemlisi, dönüşümden sonra değişkenler arasında korelasyon bulunmamasıdır /7/.

Ana bileşenler dönüşümü (Principal Components Transformation ); aralarında yüksek korelasyon bulunan çok değişkenli verileri, aralarında korelasyon olmayan yeni bir koordinat sistemine dönüştüren doğrusal bir dönüşümdür. Dönüşümden sonra, veriler arasında korelasyon ortadan kalkar. Sayısal görüntülerde ana bileşenler dönüşümü, görüntünün geometrik özellikleri üzerinde yapılan konumsal bir dönüşüm değil, görüntünün radyometrik (spektral ya da renk ) özellikleri üzerinde yapılan istatistiksel bir dönüşümdür.

Bu yöntem ilk defa, H. Hotelling tarafından geliştirilmiş ve “ana bileşenler yöntemi” adı verilmiştir. Daha sonra, K. Karhunen ve M. Loève iletim teorisinde bu yöntemi kullanmışlar, böylece m boyutlu bir dijital (ayrık) sinyali  $l < m$  olacak şekilde l boyutlu bir sinyal şeklinde optimum hata ile iletmeyi başarmışlardır /6/. Bu yaklaşım, ana bileşenler dönüşümünün ayrık bir görüntü dönüşümü olarak uygulanabilmesinin esin kaynağı olmuştur /4/. Ana bileşenler dönüşümü; Hotelling dönüşümü, Özvektör (eigenvektor) dönüşümü, ya da ayrık Karhunen-Loève dönüşümü olarak da bilinir.

Ana bileşenler dönüşümü, fotogrametri ve uzaktan algılamada; görüntü sıkıştırma (image compression), görüntü iyileştirmede (image enhancement), üçten fazla bandla algılanmış görüntülerin ekranda gösterilmesinde, değişim belirlemede (change detection), görüntü çakıştırılmasında (image merging), sınıflandırma öncesinde sınıflandırmaya sokulacak band sayısının azaltılmasında, yapay sinir ağlarında özellik çıkarımında vs. kullanılmaktadır.

Ana bileşenler dönüşümü ile ilgili yayımların büyük bir çoğunluğunda, gösterim kolaylığından dolayı, konunun anlatımı 2-bandlı görüntüler temel alınarak yapılmıştır. Ancak 2-bandlı bir görüntünün, normal yollarla ekranda görüntülenmesi mümkün değildir. Bu çalışmada, üç-bandlı (24-bitlik yani 24 bpp) görüntülerde ana bileşenler dönüşümü anlatılmıştır. Üç-bandlı bir test görüntüsüne, C++ Builder programlama dili kullanılarak makalenin yazarları tarafından hazırlanan Windows tabanlı bir programla ana bileşenler dönüşümü uygulanmış ve sonuçlar sunulmuştur. Konunun programcılık yönüyle ilgilenenler için, C dili ile yazılmış bir program parçası verilmiştir. Makalenin yazarları tarafından hazırlanan ve uygulamada kullanılan program, <http://www.omu.edu.tr/akad/fklt/muh/jeodezi.html> adlı Web adresinden edinilebilir.

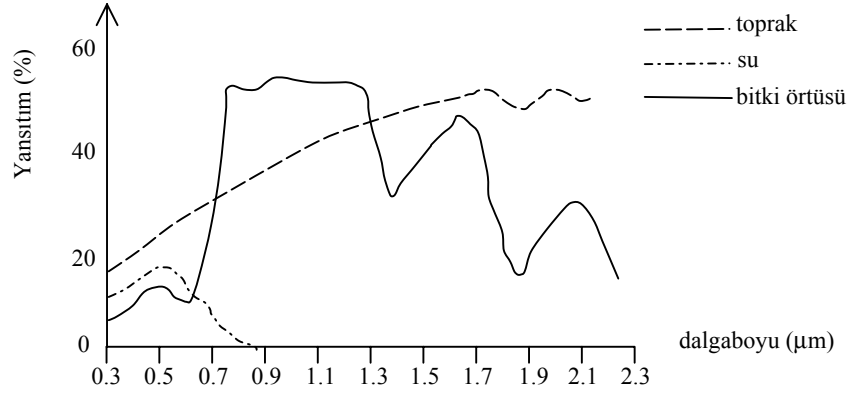
## 2. GÖRÜNTÜLERDE BANDLAR ARASI KORELASYON

Çok bandlı algılanmış bir görüntünün bandları arasında genellikle yüksek korelasyon bulunur. Bu durum, görüntülenen nesnelerin spektral yansıtma özelliklerinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, bitki örtüsünün yoğun olduğu bir bölgenin çok bandlı görüntüsünde, görünür kırmızı band ile yakın-kızılötesi band arasında negatif korelasyon olmasına karşı, görünür mavi band ile görünür yeşil band arasında pozitif korelasyon olacaktır. Bu örnekler değişik yeryüzü nesnelere için genişletilebilir (Şekil-1).

Bandlar arasında korelasyon olması durumunda, görüntü üzerindeki bir pikselin bir banddaki parlaklık değeri biliniyorken, diğer bir banddaki parlaklık değeri, belirli bir yaklaşıklıkla, kestirilebilir. Bandlar arasında korelasyon bulunması, veri kümesinde fazla bilgi

olduğu anlamına da gelir. Çünkü, bazı bilgiler tekrarlanmaktadır. Eğer veri kümesindeki bu fazlalık azaltılabilirse, çok bantlı görüntü sıkıştırılabilir /10/.

Çok değişkenli dağılımların değişkenleri arasındaki korelasyonun yok edilmesi konusunun daha iyi anlaşılabilmesi için, dağılımların bazı parametreleri hakkında kısa bir bilgi vermek yararlı olacaktır.



Şekil-1: Bitki örtüsü, toprak ve suyun spektral yansıtım eğrileri /8/.

Elimizde  $\mathbf{X}$  ve  $\mathbf{Y}$  gibi iki rasgele değişkeni bulunan  $n$  elemanlı bir dağılım olduğunu varsayalım. Herhangi bir rasgele değişkenin ümit değeri ( $E\{\}$ ) ortalama değeridir.

$$m_X = E\{\mathbf{X}\} = \frac{\sum \mathbf{x}_i}{n} \quad (1)$$

Varyans, bir rasgele değişkenin ortalama değeri çevresindeki yayılmasının büyüklüğü hakkında bilgi verir.

$$\sigma_X^2 = E\{(\mathbf{X} - m_X)^2\} = \frac{\sum (\mathbf{x}_i - m_X)^2}{n-1} \quad \text{ya da} \quad (2)$$

$$\sigma_X^2 = E\{\mathbf{X}^2 - 2 \cdot \mathbf{X} \cdot m_X + m_X^2\} = E\{\mathbf{X}^2\} - 2 \cdot E\{\mathbf{X}\} \cdot m_X + m_X^2 = \frac{\sum \mathbf{x}_i^2}{n-1} - m_X^2 \quad (3)$$

Kovaryans ise, iki rasgele değişken arasındaki bağımlılık hakkında bilgi verir.

$$\sigma_{X,Y} = E\{(\mathbf{X} - m_X)(\mathbf{Y} - m_Y)\} = \frac{\sum (\mathbf{x}_i - m_X)(\mathbf{y}_i - m_Y)}{n-1} \quad \text{ya da} \quad (4)$$

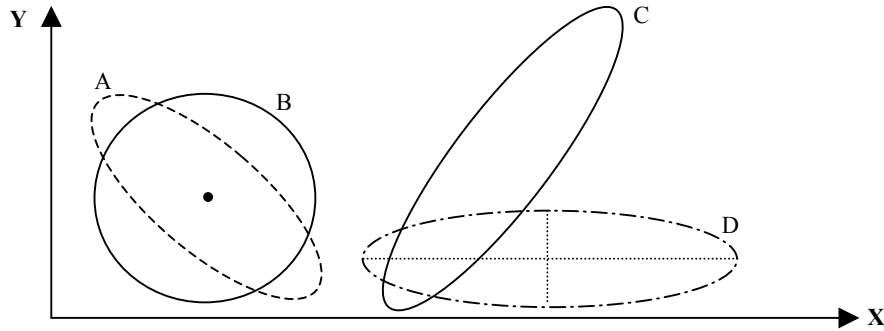
$$\sigma_{X,Y} = E\{\mathbf{XY} - \mathbf{X}m_Y - \mathbf{Y}m_X + m_X m_Y\} = E\{\mathbf{XY}\} - m_X m_Y = \frac{\sum \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i}{n-1} - m_X m_Y \quad (5)$$

Kovaryansın boyutu, **X** ve **Y** rasgele değişkenlerinin boyutlarının çarpımıdır. İki rasgele değişken arasındaki bağımlılık araştırılırken, boyutsuz bir katsayı olan korelasyon katsayısı daha sık kullanılır. Korelasyon katsayısı; iki rasgele değişken arasındaki kovaryansın, rasgele değişkenlerin standart sapmalarının çarpımı ile standartlaştırılması şeklinde de yorumlanabilir.

$$r_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (6)$$

Bu katsayının değeri -1 ile +1 arasında değişebilir. **X** ile **Y**'nin bağımsız olması halinde, korelasyon katsayısı sifıra yakın bir değer alır. Korelasyon katsayısının +1'e yakın değer alması, **X**'in ortalamadan büyük değerlerine genellikle **Y**'nin ortalamadan büyük değerlerinin, **X**'in ortalamadan küçük değerlerine de **Y**'nin ortalamadan küçük değerlerinin karşı geldiğini gösterir. Bu durumda **X** ile **Y** bağımsız olmayıp aralarında birbirine bağlı olarak değişen bir ilişki vardır. Korelasyon katsayısının -1'e yakın değer alması da rasgele değişkenlerin bağımlı olduğunu gösterir, ancak bu durumda değişkenlerden biri artarken diğeri azalmaktadır /3/.

Korelasyon katsayısının mutlak değerinin 1'e eşit olması, **X** ile **Y** arasında  $Y=a+bX$  şeklinde doğrusal fonksiyonel bir bağımlılık olduğunu gösterir. Bağımlılığın fonksiyonel olmasıyla birlikte doğrusal olmaması halinde ise korelasyon katsayısı 1'e eşit olmayabilir. Örneğin  $Y=aX^2$  fonksiyonel bağımlısı **X** ile **Y** arasında sifıra yakın bir korelasyon katsayısı verir. Buna göre kovaryans (ya da korelasyon katsayısı) iki rasgele değişken arasındaki doğrusal bağımlılığın bir ölçüsüdür /3/.



Şekil-2: İki rasgele değişkenli (**X** ve **Y**) dört örnek dağılımın gösterimi.

Elimizde 4 tane (A, B, C ve D) iki rasgele değişkenli (**X** ve **Y**) dağılım olsun ve bunların ortak dağılımı Şekil-2'de görüldüğü gibi olsun. Herhangi bir dağılımın rasgele değişkenlerinin sayısı, o dağılımın boyutunu ifade eder ve rasgele değişkenlerden her biri, dağılımın gösteriminin yapılacağı koordinat sisteminin eksenlerinden birini meydana getirir. Şekil-2'deki dağılımlar iki boyutludur. Dağılımların ağırlık merkezlerinin koordinatları, ilgili rasgele değişkenlerinin ortalama ( $m_X$  ve  $m_Y$ ) değerleridir. Dağılımların varyansları, ilgili rasgele değişkenlerin eksenleri boyunca olan yayılmalarını, kovaryansları ise bu yayılmanın şeklini ve yönünü ifade eder. Eğer dağılımın her rasgele değişkeni normal dağılımdaysa veya normal dağılıma yakınsa, yayılmanın şekli; iki boyutlu dağılımlar için elips, üç boyutlu dağılımlar için elipsoid ile gösterilebilir. Bu anlamda; çok boyutlu bir dağılımın ortalama

değer vektörü ve varyans-kovaryans matrisi, çok boyutlu uzayda dağılımın konumunu ve şeklini tanımlar.

Şekil-2’de gösterilen A ve B dağılımlarının **X** ve **Y** değişkenleri için ortalama değerleri ve varyansları aynıdır. Ancak A dağılımının değişkenleri arasında negatif korelasyon varken, B dağılımının değişkenleri arasında korelasyon yoktur. A dağılımının değişkenleri arasındaki doğrusal ilişkinin B dağılımında olmadığı, şekilden kolayca anlaşılmaktadır. Şekil-2’de görünen diğer iki dağılımdan C’nin değişkenleri arasında yüksek pozitif korelasyon olmasına karşın, D dağılımının değişkenleri arasındaki korelasyon sıfır veya sıfıra yakın bir değerdir. D dağılımının şekli olan elipsin büyük ekseninin **X** eksenine ve küçük ekseninin **Y** eksenine paralel olması, değişkenler arasında korelasyon olmamasının (sıfıra yakın bir korelasyonun olmasının) bir sonucudur. Öyleyse, C dağılımının değişkenleri arasındaki korelasyonu yok etmek için; ya dağılımı ifade eden elipsin eksenlerinin koordinat sisteminin eksenlerine paralel olana kadar dağılımın döndürülmesi ya da elipsin eksenlerine paralel ve ilk sisteme (**X-Y**) göre dönük yeni bir koordinat sisteminin (**X'-Y'**) tanımlanması gerekmektedir. Sonuç olarak yapılması gereken işlem, ötelemesi ve ölçek değişimi olmayan bir benzerlik dönüşümüdür. Ana bileşenler dönüşümü, çok değişkenli (boyutlu) dağılımlar arasındaki korelasyonu ortadan kaldırmak için benzer bir yaklaşım kullanılmaktadır.

### 3. ÖZDEĞERLER VE ÖZVEKTÖRLER

Ana bileşenler dönüşümünde temel bilinmeyen olan dönüşüm matrisinin hesabı, aslında bir lineer cebir problemidir. Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için, “özdeğerler” (eigenvalues) ve “özvektörler” (eigenvectors) kavramlarının kısaca açıklanmasında yarar vardır.

$$A \cdot \vec{x}_i = \lambda_i \cdot \vec{x}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

A matrisi  $n \times n$  boyutlu ve  $x$  vektörü  $n \times 1$  boyutlu olmak üzere; (7) eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı  $x$  vektörlerine, A matrisinin özvektörleri ve  $\lambda$  skalar değerlerine de A matrisinin özdeğerleri denir. (7) eşitliği aşağıdaki gibi de yazılabilir;

$$(A - \lambda_i \cdot I) \cdot \vec{x}_i = \vec{0} \quad I: \text{birim matris} \quad (8)$$

$\vec{x}_i$  bilinmeyenler vektörü olarak ele alınırsa, (8) eşitliğinin homojen bir denklem sistemi olduğu anlaşılacaktır. Bu durumda  $x$  vektörleri sıfır olamayacağından, homojen denklem sistemlerinin sıfırdan farklı bir çözümünün bulunabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\det|A - \lambda_i \cdot I| = 0 \quad (9)$$

(9) eşitliğine “karakteristik denklem” (characteristic equation) adı verilir. Verilen A matrisinin özdeğerleri, (9) eşitliğinden çıkarılan  $n$  dereceli polinomun kökleridir. Özdeğerler bulunduktan sonra, (8) eşitliği kullanılarak özvektörler de bulunabilir. Eğer A matrisi simetrik ve elemanları gerçek sayılar ise; özdeğerleri ve özvektörleri de gerçek sayılar olup, özvektörleri de ortogonal olur.

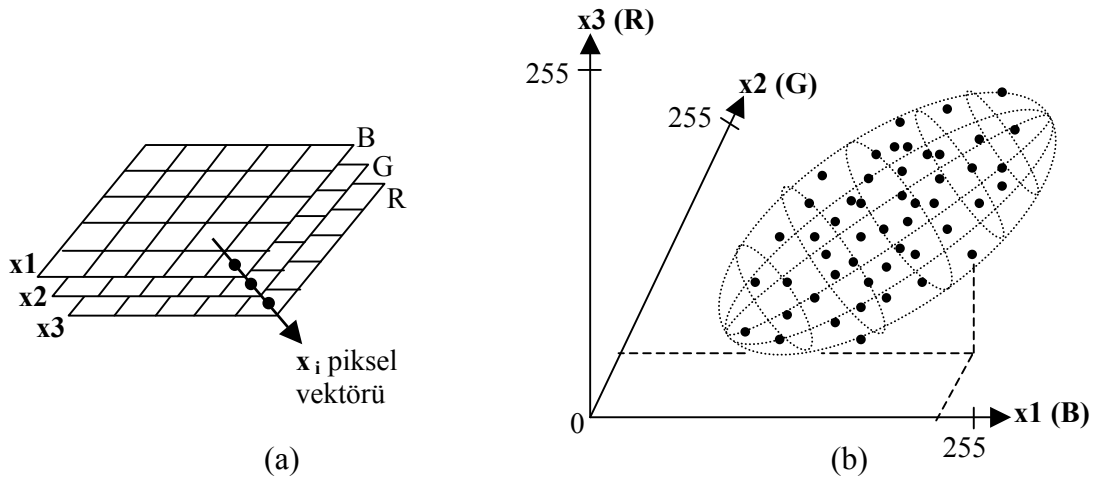
#### 4. ANA BİLEŞENLER DÖNÜŞÜMÜ

Şekil-3'de, üç bantlı bir görüntüdeki (24-bitlik) pikseller, ilgili bantlarındaki parlaklık değerleri koordinat değerleri olmak üzere çizilmiştir. Üç koordinat eksenini, görüntünün üç bantına karşılık gelmektedir (örneğin;  $x_1$ =mavi bant,  $x_2$ =yeşil bant,  $x_3$ =kırmızı bant). Her üç bantdaki piksellerin parlaklık değerlerinin normal dağılıma yakın olduğu kabulünden yola çıkılarak, piksellerin dağılımı elipsoid şeklinde gösterilmiştir. Şekildeki pikseller arasındaki uzaklık, geometrik anlamda bir uzaklık değil, radyometrik anlamda bir uzaklıktır. Şekil-3, üç rasgele değişkenli bir veri kümesinin ortak dağılımı şeklinde de yorumlanabilir.

Şekil-3'deki her piksel, ilgili bantlardaki parlaklık değerlerini içeren  $3 \times 1$  boyutlu vektörler ( $\mathbf{x}$ ) olarak ele alınırsa; herhangi bir  $\mathbf{x}$  vektörünün ümit değeri, ortalama değer vektörü olacaktır:

$$\mathbf{m}_x = E\{\mathbf{x}\} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{x}_i \quad (10)$$

Yukarıdaki eşitlikte;  $K$  görüntüdeki toplam piksel sayısını,  $\mathbf{x}_i$  herhangi bir piksel vektörünü ve  $\mathbf{m}_x$  ortalama değer vektörünü ( $3 \times 1$  boyutlu) ifade etmektedir.



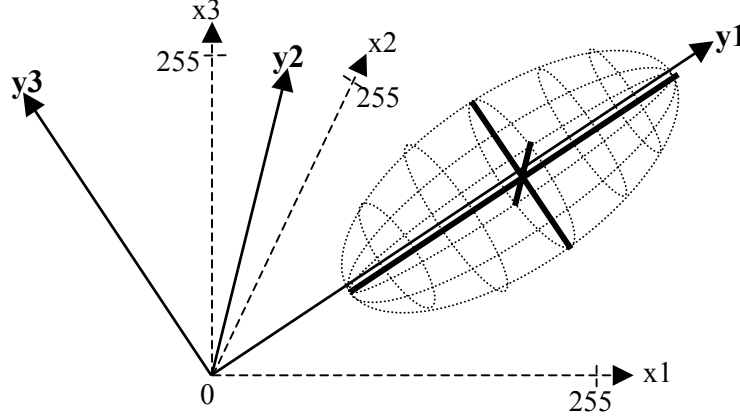
Şekil-3: (a) 24-bitlik görüntünün bantları ve (b) piksellerin üç boyutlu uzayda ortak dağılımı.

Şekil-3'deki üç boyutlu dağılımın kovaryans matrisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathbf{C}_x = E\left\{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T\right\} = \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_x) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_x)^T \quad (11)$$

Eğer bantlar arasında yüksek korelasyon varsa, dağılımın  $3 \times 3$  boyutlu kovaryans matrisinde ( $\mathbf{C}_x$ ) köşegen dışındaki terimlerin mutlak değerleri, köşegendeki terimlerden çok büyük olacaktır.

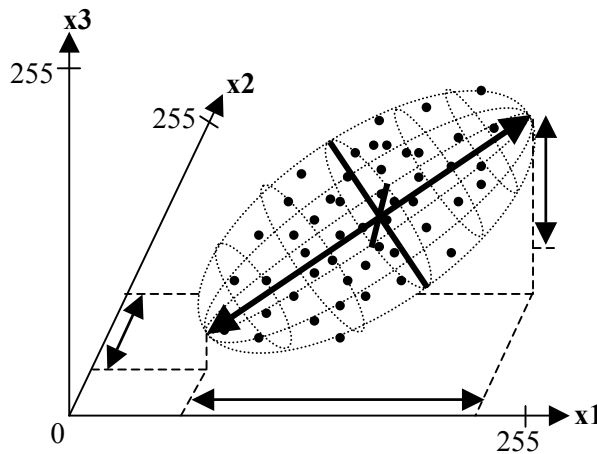
Ana bileşenler dönüşümünün temel ilkesi; multispektral vektör uzayında, verileri korelasyonsuz olarak ifade edebilen diğer bir deyişle yeni sistemde kovaryans matrisi köşegen olan, yeni bir koordinat sisteminin araştırılmasıdır /9/.



Şekil-4: Ana bileşenler dönüşümü.

Buradaki örneğimizde ana bileşenler dönüşümü;  $(x_1-x_2-x_3)$  koordinat sisteminin, üç uzaysal dönüklük açısıyla,  $(y_1-y_2-y_3)$  koordinat sistemine dönüştürülmesi problemidir. Söz konusu dönüşüm, eksenler arasındaki ölçek katsayısının bire eşit olduğu ve koordinat sistemlerinin merkezleri arasında ötelemenin olmadığı bir uzaysal benzerlik dönüşümüdür. Dönüşümden sonra eksenler arasındaki diklik koşulu korunacağından, dönüşüm matrisi ortogonal matris olacaktır. Veriler arasındaki korelasyonun yok edilmesi temel amaç olduğundan, dönüşümden sonra yeni koordinat sisteminin eksenleri, elipsoidin eksenlerine paralel olacaktır (Şekil-4). Elipsoidin en büyük eksenini, veri kümesinin “birinci ana bileşenidir”. Birinci ana bileşenin yönüne, “birinci özvektör” ve uzunluğuna da “birinci özdeğer” denir. Aynı bakış açısıyla, elipsoidin diğer eksenleri uzunluklarına göre sırasıyla, veri kümesinin “ikinci ana bileşeni” ve “üçüncü ana bileşeni” olacaklardır.

Birinci ana bileşen;  $x_1$ ,  $x_2$  ve  $x_3$  eksenlerine oranla veriyi daha geniş bir aralıkta temsil eder (Şekil-5). Çok bantlı görüntülerin ilk birkaç ana bileşeni, genellikle veri kümesindeki varyansın çok büyük bir kısmını içinde toplar. Bazı durumlarda bu oran %100’e yaklaşır.



Şekil-5: Birinci ana bileşen ekseninin,  $x_1, x_2$  ve  $x_3$  eksenlerine göre veriyi temsil etme aralığı.

Görüntüdeki pikselleri, yeni koordinat sisteminde (Şekil-4)  $3 \times 1$  boyutlu  $y$  vektörleri ile gösterelim. Dönüşüm matrisi ( $G$ )  $3 \times 3$  boyutunda olmak üzere, dönüşümün matris gösterimi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$y = G \cdot x \quad (12)$$

Dönüşümden sonra veriler arasındaki korelasyonun yok edilmesi temel amaç olduğundan;  $y_1$ - $y_2$ - $y_3$  koordinat sistemindeki kovaryans matrisi köşegen olmalıdır, diğer bir deyişle matrisin köşegen dışındaki elemanları (kovaryansları) sıfır olmalıdır.

$$C_y = E\{(y - m_y) \cdot (y - m_y)^T\} \quad (13)$$

$$m_y = E\{y\} = E\{G \cdot x\} = G \cdot E\{x\} = G \cdot \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_i = G \cdot m_x \quad (14)$$

(13) ve (14) denklemlerinde  $m_y$  yeni koordinat sisteminde ortalama değer vektörü ve  $C_y$  yeni koordinat sisteminde kovaryans matrisidir. (13) denklemi, (12) ve (14) denklemleri kullanılarak yeniden düzenlenirse;

$$C_y = E\{(G \cdot x - G \cdot m_x) \cdot (G \cdot x - G \cdot m_x)^T\}$$

$$C_y = E\{G \cdot (x - m_x) \cdot [G \cdot (x - m_x)]^T\}$$

$$C_y = E\{G \cdot (x - m_x) \cdot (x - m_x)^T \cdot G^T\}$$

$$C_y = G \cdot E\{(x - m_x) \cdot (x - m_x)^T\} \cdot G^T$$

$$C_y = G \cdot C_x \cdot G^T \quad (15)$$

eşitliği elde edilir.  $C_y$  matrisi, ana bileşenler dönüşümünün temel ilkesi gereği köşegen olmak zorundadır ve köşegen üzerindeki elemanları, verilerin dönüştürülmüş sistemdeki varyansları olacaktır.  $G$  dönüşüm matrisi, ortogonal bir matris olduğundan tersi, evriğine eşittir;  $G^{-1} = G^T$ . Öyleyse, (15) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C_x \cdot G^T = G^T \cdot C_y \quad (16)$$



(16) eşitliğindeki matrisleri açık olarak yazalım;

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1,x2} & \sigma_{x1,x3} \\ \sigma_{x2,x1} & \sigma_{x2}^2 & \sigma_{x2,x3} \\ \sigma_{x3,x1} & \sigma_{x3,x2} & \sigma_{x3}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_{y1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{y3}^2 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{yi}^2$  yerine  $\lambda_i$  sembolü kullanılıp eşitlik düzenlenirse;

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1,x2} & \sigma_{x1,x3} \\ \sigma_{x2,x1} & \sigma_{x2}^2 & \sigma_{x2,x3} \\ \sigma_{x3,x1} & \sigma_{x3,x2} & \sigma_{x3}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot g_{11} & \lambda_2 \cdot g_{21} & \lambda_3 \cdot g_{31} \\ \lambda_1 \cdot g_{12} & \lambda_2 \cdot g_{22} & \lambda_3 \cdot g_{32} \\ \lambda_1 \cdot g_{13} & \lambda_2 \cdot g_{23} & \lambda_3 \cdot g_{33} \end{bmatrix} \quad (17)$$

elde edilir. Denklem (17), (7) eşitliğinde verilen tanıma uymaktadır. Bu bağlamda, G dönüşüm matrisinin evriğinin ( $G^T$ ) sütunları,  $C_x$  matrisinin özvektörleridir ve  $C_y$  matrisinin köşegen elemanları ( $\lambda_i$ ),  $C_x$  matrisinin özdeğerleridir. Dönüşümden sonra, ana bileşenlerin varyanslarının büyüklüklerine göre sıralanabilmesi için; özdeğerlerin, büyüklüklerine göre sıralanması gerekmektedir:  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ .

Ana bileşenler dönüşümü, temelde bir lineer cebir problemidir. Problemin temel bilinmeyen olan G dönüşüm matrisi, simetrik  $C_x$  matrisinin özdeğerleri ve özvektörlerinin hesaplanmasıyla bulunur.

## 5. ÖRNEK UYGULAMA

Konunun hesap yönünü daha anlaşılır hale getirmek amacıyla bu bölümde, bir test görüntüsüne (Şekil-6(a)), makalenin yazarları tarafından hazırlanan program kullanılarak ana bileşenler dönüşümü uygulanmış ve işlem adımları sırasıyla sunulmuştur.

$$C_x = \begin{bmatrix} 4863 & 4956 & 4459 \\ 4956 & 5134 & 4607 \\ 4459 & 4607 & 4650 \end{bmatrix} \quad (18)$$

(18) eşitliği, Şekil-6(a)'da görülen 3-bandlı (24-bitlik) gerçek renkli görüntünün kovaryans matrisidir. Matrisin köşegen dışındaki elemanlarının büyük olmasından, üç band arasında yüksek korelasyon olduğu anlaşılmaktadır. Özdeğerler, bu matrisin karakteristik denkleminin çözümüyle bulunur:

$$\begin{vmatrix} 4863 - \lambda & 4956 & 4459 \\ 4956 & 5134 - \lambda & 4607 \\ 4459 & 4607 & 4650 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 14647 \cdot \lambda^2 + 5783626 \cdot \lambda - 208083215 = 0$$

Karakteristik denklemin kökleri özdeğerlerdir. Diğer bir deyişle yeni koordinat sistemindeki kovaryans matrisinin elemanlarıdır:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 14241.92733993 \\ \lambda_2 &= 365.04896697 \\ \lambda_3 &= 40.02369310 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad C_y \equiv \begin{bmatrix} 14241.93 & 0 & 0 \\ 0 & 365.05 & 0 \\ 0 & 0 & 40.02 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Denklem (19)'da, birinci ana bileşenin, toplam varyansın %97'sini ifade ettiği görülmektedir. Bir sonraki işlem adımı olan özvektörler hesabı, (20) eşitliğindeki homojen denklem sisteminin her üç özdeğer için ayrı ayrı çözümü ile yapılır.

$$[C_x - \lambda_1 \cdot I] \cdot \vec{g}_1 = 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} -9378.93 \cdot g_{11} + 4956.00 \cdot g_{12} + 4459.00 \cdot g_{13} &= 0 \\ 4956.00 \cdot g_{11} - 9107.93 \cdot g_{12} + 4607.00 \cdot g_{13} &= 0 \\ 4459.00 \cdot g_{11} + 4607.00 \cdot g_{12} - 9591.93 \cdot g_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$g_{11}^2 + g_{12}^2 + g_{13}^2 = 1 \quad (\text{ortogonallik koşulu}) \quad (22)$$

(21) eşitliğindeki homojen denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfır olduğundan, birden çok çözümü vardır. Çözümün tek anlamlı olabilmesi için, “ana bileşenler dönüşümünün ortogonal bir dönüşüm olduğu” ya da “simetrik matrislerin özvektörlerinin ortogonal olduğu” koşulundan yola çıkılarak, (22) koşulunun da işleme sokulması gerekir. (21) ve (22) eşitliklerinin ortak çözümü ile sonuca ulaşılr. Benzer şekilde diğer özvektörler de çözülrse aşağıdaki sonuçlar bulunur:

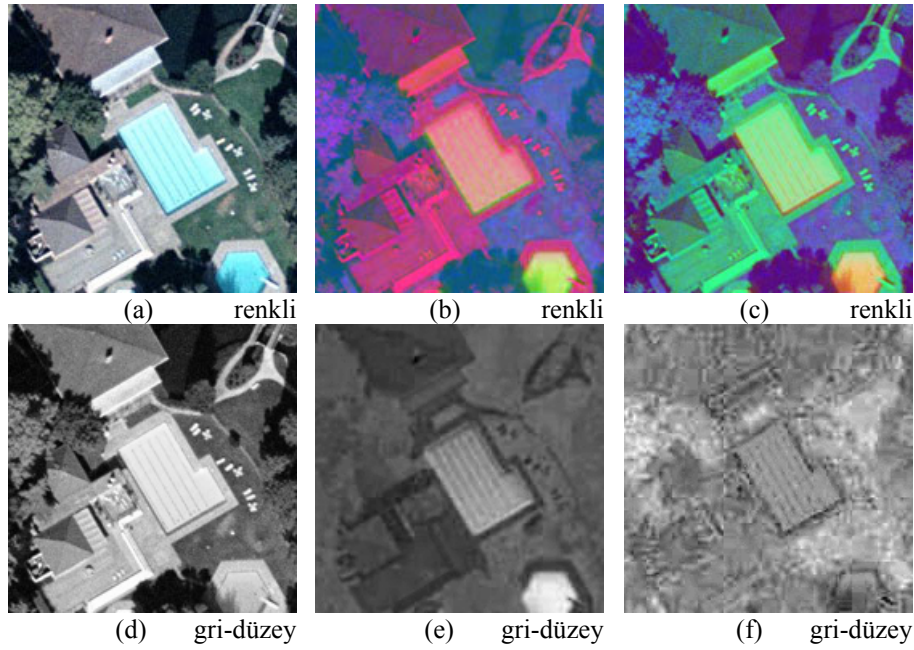
$$\vec{g}_1 = \begin{bmatrix} 0.579 \\ 0.596 \\ 0.556 \end{bmatrix} \quad \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} 0.418 \\ 0.368 \\ -0.831 \end{bmatrix} \quad \vec{g}_3 = \begin{bmatrix} -0.700 \\ 0.713 \\ -0.037 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Sonuç olarak; 3-bandlı test görüntüsündeki herhangi bir pikselin ana bileşenleri, aşağıdaki dönüşüm formülüyle hesaplanır. Şekil-6'da 3-bandlı test görüntüsü ve bu görüntünün ana bileşenleri görülmektedir.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.579 & 0.596 & 0.556 \\ 0.418 & 0.368 & -0.831 \\ -0.700 & 0.713 & -0.037 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Dönüşümden sonra, piksellerin parlaklık değerlerinin ana bileşenlerdeki karşılıkları, genellikle 0-255 aralığında olmaz. Bu aralığın altına ve üstüne taşmalarla karşılaşmaktadır. Örneğin; Şekil-6(a)'daki test görüntüsünün birinci ana bileşeni 4 ile 441 arasında, ikinci ana bileşeni -43 ile 113 arasında, üçüncü ana bileşeni -34 ile 18 arasında değerler almıştır. Ana

bileşenler bu halleriyle ekranda doğrudan görüntülenemezler. Her ana bileşenin ayrı ayrı 0-255 aralığına getirilmesi gerekir. Bu işlem, sayısal görüntü işlemede nicelleme (quantization) olarak bilinir /1/, /4/, /5/. Nicelleme, “doğrusal kontrast gemesi” (linear contrast stretching) ile karıştırılmaması gereken bir kavramdır. Her iki işlem de doğrusal bir transfer fonksiyonu kullanmasına rağmen (nicelleme işlemi zaman zaman doğrusal olmayan fonksiyonlar da kullanabilmektedir), ilk işlem 0-255 aralığı dışındaki sayısal değerlerle ilgilenirken, ikinci işlem 0-255 aralığı içindeki sayısal değerlerle ilgilenmektedir. Bu ayrıma ek olarak; nicelleme işlemi doğrudan görüntünün sayısallaştırılması (digitization) ile ilgili bir işlem olmasına karşın, doğrusal kontrast gemesi bir görüntü iyileştirme (image enhancement) yöntemidir. Şekil-6 (b), (c), (d), (e) ve (f)’de görülen ana bileşenler, nicelleme işlemi uygulanarak, bilgisayarda görüntülenebilir hale getirilmişlerdir.



Şekil-6: (a) 3-bandlı (24-bitlik) gerçek renkli test görüntüsü, (b) ana bileşenlerin sırasıyla 321=>BGR band kombinasyonu, (c) ana bileşenlerin sırasıyla 312=BGR band kombinasyonu, (d) birinci ana bileşen, (e) ikinci ana bileşen, (f) üçüncü ana bileşen.

## 6. ANA BİLEŞENLER DÖNÜŞÜMÜNÜN BAZI ÖZELLİKLERİ

- Tüm ana bileşenler birbirlerini dik (ortogonal) keserler. Ana bileşenler dönüşüm matrisi G ortogonallik koşullarını sağlar:

$$\sum_{i=1}^n g_{ij}^2 = \sum_{j=1}^n g_{ij}^2 = 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^n g_{ij} \cdot g_{ik} = 0 \quad , \quad G^{-1} = G^T \quad (25)$$

- n boyutlu bir veri kümesinde, birinci (1.) ana bileşen, varyansın en büyük olduğu eksenini ve n. ana bileşen, varyansın en küçük olduğu eksenini ifade eder. Her özvektörün elemanları, ilgili ana bileşen ekseninin x1-x2-x3 koordinat sistemindeki birim vektörlerini ifade eder.

- Veri kümesinin kovaryans matrisinin determinanı, özdeğerlerin çarpımına eşittir:

$$|C_x| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (26)$$

- Veri kümesinin varyanslarının toplamı, ana bileşenlerin varyanslarının (özdeğerlerinin) toplamına eşittir:

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{y_i}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{ya da} \quad \text{İz}(C_x) = \text{İz}(C_y) \quad (27)$$

- Ana bileşenler dönüşümünün tersi de tanımlıdır:

$$y = G \cdot x \Rightarrow x = G^{-1} \cdot y = G^T \cdot y \quad (28)$$

- Küçük özdeğerli özvektörlerden bazıları ihmal edilerek  $y$  vektörünün boyutu indirgenebilir. Bu özellik “veri sıkıştırma işlemlerinde” kullanılmaktadır. ( $m < n$ ) koşuluyla  $G$  matrisinin en alttan  $(n-m)$  tane satırının atılmasıyla,  $m \times n$  boyutlu indirgenmiş  $\tilde{G}$  matrisi elde edilebilir. Böyle bir  $\tilde{G}$  matrisiyle yapılacak dönüşümde, ana bileşenler vektörlerinin boyutu  $m \times 1$  olacaktır:

$$\tilde{y}_{m \times 1} = \tilde{G}_{m \times n} \cdot x_{n \times 1} \quad (29)$$

Böyle bir dönüşümden sonra,  $x$  vektörleri ters dönüşümle yaklaşık olarak elde edilebilir:

$$\tilde{x} = \tilde{G}^T \cdot \tilde{y} \quad (30)$$

Özdeğerler, özvektörlerin varyanslarını ifade ettiğinden, böyle bir yaklaşığın karesel ortalama hatası aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$\text{K.O.H} = \sum_{i=m+1}^n \lambda_i \quad (31)$$

Aşağıdaki örnek, bu özelliğın daha iyi anlaşılmasını sağlayacaktır:

$$\tilde{y} = \tilde{G} \cdot x = \begin{bmatrix} 0.579 & 0.596 & 0.556 \\ 0.418 & 0.368 & -0.831 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228.7 \\ -87.6 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \tilde{G}^T \cdot \tilde{y} = \begin{bmatrix} 0.579 & 0.418 \\ 0.596 & 0.368 \\ 0.556 & -0.831 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 228.7 \\ -87.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95.8 \\ 104.1 \\ 200.0 \end{bmatrix}$$

## 7. ÇALIŞMA için YAZILAN C PROGRAMI

Makalenin bu bölümünde, sayısal görüntü işleme uygulamalarının programcılık yönüyle ilgilenenler için; Borland C++ Builder ile yazılmış ancak kolay anlaşılabilirliği için sınıf tasarımlarından arındırılmış çıplak C kodları verilmiştir. Verilen program parçası, ana bileşenler dönüşümü matrisini hesaplayan bir fonksiyon ve onun alt fonksiyonlarını içermektedir.

```
//          // unsigned char **BGR; //3-bandlı görüntü
// global  // float CX[3][3];      //görüntünün kovaryans matrisi
// değişkenler // double L[3];      //özdeğerler vektörü
//          // float G[3][3];      //dönüşüm matrisi

void FindRootOf3rdPolynom(double p, double q, double r)
{ long double a, b, disk, A, B, teta;
  int i;
  a= q-((p/3)*p);
  b= (p/3)*(2*(p/3)*(p/3)-q) + r;
  disk= (b*b/4) + (a*a*a/27);   if(disk<0.000001 && disk>-0.000001) disk=0.0;
  if(disk==0) { L[0]= (b>0) ? -2*sqrt(-a/3) : 2*sqrt(-a/3) ;
                L[1]= (b>0) ?  sqrt(-a/3) : - sqrt(-a/3) ;   L[2]= L[1];           }
  if(disk<0) { teta= (b>0) ? acos(-(b/2)*(3/a)*sqrt(3/-a) ) : acos( (b/2)*(3/a)*sqrt(3/-a) );
                for(i=0;i<3;i++) L[i] = 2*sqrt(-a/3)*cos((teta/3)+(i*2*M_PI/3));
  }
  for(i=0;i<3;i++) L[i] = L[i]-(p/3.0);      //3.dereceden denklemin kökleri..
} //fonksiyon sonu..

void CalculateEigenVectors(double Ozd,int j)
{ double w1,w2,w3,w4;
  w1= CX[1][0] * CX[0][1] - (CX[0][0]-Ozd)*(CX[1][1]-Ozd);
  w2= CX[1][0] * CX[0][2] - (CX[0][0]-Ozd)* CX[1][2];
  w3= (CX[2][2]-Ozd)* CX[1][0] - CX[1][2] * CX[2][0];
  w4= (CX[2][2]-Ozd)*(CX[1][1]-Ozd) - CX[1][2] * CX[2][1];
  G[1][j]=(float)(sqrt(1/(1+pow(w4/w3,2)+pow(w1/w2,2))));
  G[0][j]=(float)(-(G[1][j]*w4)/w3);
  G[2][j]=(float)(-(G[1][j]*w1)/w2);
} //fonksiyon sonu..

void TransposeOfTransformationMatrix()
{ float swap;
  swap=G[0][1]; G[0][1]=G[1][0]; G[1][0]=swap;
  swap=G[0][2]; G[0][2]=G[2][0]; G[2][0]=swap;
  swap=G[1][2]; G[1][2]=G[2][1]; G[2][1]=swap;
} //fonksiyon sonu..

void PrincipalComponentsTransformation()
{ float MX[3] = {0.0,0.0,0.0}; //ortalama değer vektörü
  float n=BMPInfo.biWidth*BMPInfo.biHeight; //toplam piksel sayısı
  double p,q,r,swp;
  int i,j,k;

  for(j=0; j<n; j++) //görüntünün ortalama değer vektörü hesaplanıyor
```

```

for(i=0; i<3; i++) MX[i]=MX[i]+(((float)BGR[i][j])/n);

for(j=0; j<3; j++) //görüntünün kovaryans matrisi hesaplanıyor
for(i=0; i<3; i++)
for(k=0;k<n;k++)
CX[j][i]=CX[j][i]+((((float)BGR[i][k]-MX[i])*((float)BGR[j][k]-MX[j]))/(n-1.0));
p = -CX[0][0]-CX[1][1]-CX[2][2];
q = -CX[2][1]*CX[1][2] - CX[0][1]*CX[1][0] - CX[0][2]*CX[2][0] +
CX[2][2]*CX[1][1] +CX[0][0]*CX[1][1] +CX[0][0]*CX[2][2];
r = CX[2][0]*CX[0][2]*CX[1][1] + CX[0][0]*CX[2][1]*CX[1][2] +
CX[0][1]*CX[2][2]*CX[1][0] - CX[0][0]*CX[1][1]*CX[2][2] -
CX[0][2]*CX[2][1]*CX[1][0] - CX[0][1]*CX[2][0]*CX[1][2];
//karakteristik denklemin katsayıları belirlendi
FindRootOf3rdPolynom(p,q,r); //karakteristik denklemin kökleri bulundu..
for(i=0;i<2;i++)
for(j=i+1;j<3;j++) if(L[i]<L[j]) { swp=L[i]; L[i]=L[j]; L[j]=swp; }
for(i=0;i<3;i++) CalculateEigenVectors(L[i],i);
TransposeOfTransformationMatrix( );
printf("\n Ana Bilesenler Donusum Matrisi _____: \n");
for(j=0;j<3;j++)
{ for(i=0;i<3;i++) printf(" G[%d][%d]=%f ",j,i,G[j][i]); printf("\n"); } //döngünün sonu
} // fonksiyon sonu..

```

Yukarda verilen program parçasındaki temel fonksiyon, *PrincipalComponentsTransformation( )* fonksiyonudur. Diğer fonksiyonlar, bu fonksiyon içerisinde çağrılmaktadır. Üç bantlı görüntü  $BGR[i][j]$  dizisinde saklanmaktadır. Buradaki  $i$  indisi, band numarasını ve  $j$  indisi görüntünün piksellerini ifade etmektedir.  $i$  indisinin eleman sayısı 3 ve  $j$  indisinin eleman sayısı  $\text{yükseklik} \times \text{genişlik} = \text{toplam piksel sayısı}$  kadardır. Fonksiyonun çalışabilmesi için,  $BGR[ ][ ]$  dizisine, görüntünün aktarılması gerekmektedir (daha fazla bilgi için bakınız /1/ ).

*PrincipalComponentsTransformation( )* fonksiyonu, önce görüntünün ortalama değer vektörünü  $MX[ ]$  ve kovaryans matrisini  $CX[ ][ ]$  hesaplamaktadır. Daha sonra karakteristik denklemin elemanlarını hesaplayarak, *FindRootOf3rdPolynom(double,double,double)* fonksiyonunu çağırılmaktadır. Bu fonksiyon, verilen 3. dereceden polinomun köklerini hesaplayarak, bulduğu sonuçları  $L[ ]$  dizisine yerleştirmektedir. Kovaryans matrisi simetrik olduğu için sanal kök olmayacağından, bu durum fonksiyon içerisinde irdelenmemiştir. Daha sonra, özdeğerler  $L[ ]$  büyüklüklerine göre sıralanarak, her özdeğerin özvektörü *CalculateEigenVectors(double,int)* fonksiyonu çağrılarak hesaplanmaktadır. Bulunan sonuçlar  $G[ ][ ]$  matrisinin sütunlarına yerleştirilmektedir. Son olarak *TransposeOfTransformation Matrix( )* fonksiyonu çağrılarak,  $G[ ][ ]$  matrisinin evriği hesaplanmakta ve ekrana yazdırılmaktadır.

Görüntünün kovaryans matrisinin değerlerinin büyük olması durumunda, karakteristik denklemin köklerinin hesaplanmasında kullanılan değişkenler çok büyük değerler alabilmektedir. Değişken alanının uzunluğu, ifadenin sonuç değerini alamayacak büyüklükte ise, sonuç değerinin bazı byte'ları atılmaktadır. Bu tür taşmaların önüne geçebilmek için, değişkenlerin tip tanımlamalarının dikkatli yapılması gerekmektedir.

## 8. SONUÇ

Ana bileşenler dönüşümü temelinde bir istatistiksel analiz yöntemi olmasına karşın, sayısal görüntü işlemede, görüntünün gri-düzeyleri (ya da renkleri) üzerinde yapılan bir dönüşüm olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu yöntem, veri kümesindeki korelasyonu ortadan kaldırarak, veri kümesine farklı bir uzaydan bakış sağlaması açısından önemlidir. Esas görüntüde görülemeyen bazı ayrıntılar, ana bileşenlerde ortaya çıkabilmektedir.

Bu çalışmada, 3-bandlı görüntülerde ana bileşenler dönüşümü anlatılmış, yöntemin temel ilkeleri sunulmaya çalışılmıştır. Ana bileşenler dönüşümü, üçten çok bandlı görüntülerde uygulanırken, karakteristik denklemin derecesi üçten büyük olacağından, özel durumlar dışında özdeğerler doğrudan çözülemeyecektir. Bu sorunun çözümü için değişik iteratif yöntemler (kuvvet yöntemi, Jacobi yöntemi, Q-R algoritması, Givens yöntemi, vs.) kullanılabilir.

## KAYNAKLAR

- /1/ Açıkgöz (Doğan), R., Doğan, S., Banger, G. : Raster Görüntülerinin Yapısı, Görüntüleme Tekniklerinin Temelleri ve Bitmap Formatı, Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi, Sayı 86, 1999.
- /2/ Aktaş, Z., Öncül, H., Ural, S. : Sayısal Çözümleme, ODTÜ Yay., Ankara, 1984.
- /3/ Bayazıt, M., Oğuz, B. : Mühendisler İçin İstatistik, Birsen Yayınevi, İstanbul, 1998.
- /4/ Castleman, K.,R. : Digital Image Processing, Prentice Hall Inc., USA, 1996.
- /5/ Gonzalez, R.,C. : Digital Image Processing, Addison-Wesley Publ. Comp., Canada, 1987.
- /6/ Hakin, S : Neural Networks a Comprehensive Foundation, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1999.
- /7/ Jackson, J.,E. : A User's Guide To Principal Components, John Wiley&Sons Inc., Canada, 1991.
- /8/ Mather, P.,M. : Computer Processing of Remotely-Sensed Images, John Wiley&Sons Inc., England, 1999.
- /9/ Richards, J.,A. : Remote Sensing Digital Image Analysis, Springer-Verlag, Germany, 1993.
- /10/ Sabins, F.,F. : Remote Sensing Principles and Interpretation, W.H. Freeman and Company, USA, 1987.