SAYISAL ARAZİ MODELLERİNDE İNTERPOLASYON YÖNTEMLERİ

Yazan:Attilâ GÜLER
KTÜ - Trabzon

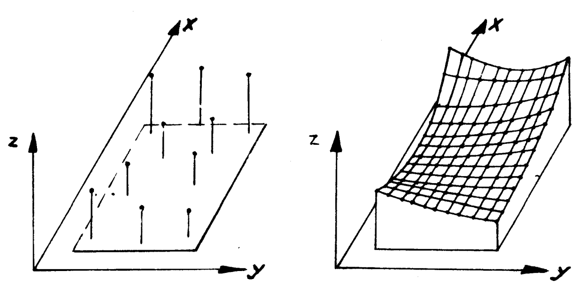
1. GİRİŞ

Sayısal arazi modelleri düşüncesi 1955 yıllarında karayolu projelerinin bazı evrelerini otomatikleştirmek için Massaschusetts Teknoloji Enstitüsünde ortaya atılmış, en ve boy kesitlerin otomatik hesabı için sınırlı bir uygulama alanı bulmuştur. /7/.

Sayısal arazi modeli uygulamaları son on yıl içinde giderek artmış, topoğrafik haritalarda eşyükseklik eğrilerinin otomatik çizimi, genelleştirilmesi ve mevcut haritaların sayısallaştırılması amacı ile Fotogrametri ve Kartoğrafyada yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır /7/, /8/, /10/, /11/.

Sayısal arazi modeli kısaca, elektronik bilgi işlemlerinden yararlanılarak yeryüzeyinin sayısal gösterimi olarak tanımlanabilir. Bir arazi parçası için sayısal arazi modelinin elde edilebilmesi, bu arazi parçası üzerinde dağılmış koordinatları (x,y,z) bilinen noktaların var olmasını gerektirir. Bu noktalara "dayanak noktası" adı verilir. Belirtilen arazinin bulunduğu koordinat sisteminin yatay düzleminde düzgün ve yeter sıklıkta bir ağ oluşturulur. Dayanak noktaları bu ağın içinde ve dışında dağılmış durumda bulunurlar. Daha sonra, ağın köşe noktalarının yükseklikleri çeşitli interpolasyon yöntemlerinin herhangi birinden yararlanılarak hesaplanır. Böylelikle arazi sayısal olarak belirlenmiş olur. (şekil 1).

Sayısal arazi modelleri, seçilmiş yüzey noktalarının x,y,z koordinatları ile birlikte uygun bilgisayar programlarını kapsar. Bu programlara interpolasyon, hacım ve gerekli diğer verilerin hesabı için gerekseme duyulur /11/.



Şekil : 1

Sayısal arazi modellerinde, dayanak noktalarının yatay konumları amaç ve olanaklara göre,

1) Rastlantısal olarak,

2) Arazinin karakteristik çizgi ve noktalarında,

3) Düzgün bir kareler veya dikdörtgenler ağının kesişme noktalarında seçilebilir.

2. SAYISAL ARAZİ MODELLERİNDE İNTERPOLASYON

İnterpolasyon problemi genel olarak, n boyutlu P_i noktalarındaki m boyutlu vektörleri kullanarak n boyutlu P_k noktalarındaki m boyutlu bilinmeyen vektörlerin bulunması şeklinde tanımlanabilir. n boyutlu P_i noktalarına "Dayanak Uzayı" adı verilir. Sayısal arazi modellerinin interpolasyonu probleminde dayanak uzayının iki boyutu, vektörlerin bir boyutu vardır. Dayanak uzayının iki boyutu x ve y, vektörlerin bir boyutu ise Z'dir.

İki boyutlu dayanak uzayı üzerinde tanımlanan bir boyutlu rastlantısal fonksiyonun interpolasyonu gerçekte bir yüzey yerleştirme problemidir.Bu problemi çözüm için üç farklı yaklaşım vardır:

1) Tüm araziyi kapsayan bir tek fonksiyonla interpolasyon,

2) Yerel olarak tanımlanmış parça parça fonksiyonlarla interpolasyon,

3) Nokta nokta interpolasyon.

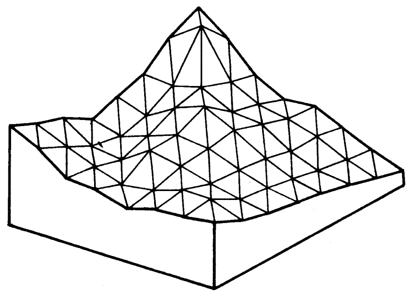
Birinci durumda, yani bir tek fonksiyonla interpolasyon probleminde bir tek $Z=f(x,y)$ fonksiyonunu belirlemek için bütün dayanak noktaları aynı anda kullanılır. Buna bir örnek olarak daha sonra görüşülecek olan Hardy' nin ikinci dereceden hiper yüzeyi gösterilebilir /1/, /2/.

Parça parça interpolasyonda bütün sayısal arazi modeli daha küçük parçalara bölünür ve her bir parça seçilen bir fonksiyonla gösterilir. Bu durumda parçaların sınırları boyunca çatlaklar ve süreksizlikler oluşabilir. Bundan kaçınmak için, parçalardaki fonksiyonları sınırlar boyunca çakıştırmak için etkileyen birleştirme fonksiyonları kullanılabilir. Bu birleşme koşullarının, bilinmeyen fonksiyon parametrelerinin hesabında açık olarak tanıtılması gerekli ise, problem bir tek fonksiyonla interpolasyon durumuna dönüşür.

Bu nedenle, birleştirme koşullarına gerek kalmayacak biçimde fonksiyonların bulunması gerekir. Böyle bir fonksiyona çok basit bir örnek olarak, daha ötede görüşülecek olan lineer interpolasyondaki "polihedron" gösterilebilir. (şekil 2).

Dayanak noktaları düzlem üçgen parçalarını tanımlamak için kullanılır.Bu durumda, fonksiyon sınırlar boyunca aynıdır.

Birleştirme koşullarına gereksinme göstermeyen fonksiyonlara başka bir örnek, Jaincaitis ve Junkins tarafından verilmiş olan 12 katsayılı bikübik polinomdur /3/.



Şekil 2

Düzlem üçgenlerle arazi yüzeyi

(Polihedron)

Nokta nokta interpolasyonda, yüksekliği bulunacak noktayı çevreleyen kritik daire (veya kare) nin iç tarafına düşecek biçimde ölçülmüş dayanak noktaları seçilir. Bu noktalar ağırlıklı ortalama, düşük dereceden polinom veya seçilecek diğer fonksiyon parametrelerini hesaplamak için kullanılır. Ölçüler düzgün ağ noktalarında yapılmış ise büyük ölçüde kolaylık sağlanır. Her bir yeni nokta çevresindeki dayanak noktaları alt kümesini kullanarak bağımsız interpole edildiğinden, nokta nokta interpolasyonda depolama işlemine gerek kalmaz. İnterpolasyon fonksiyonunun katsayıları noktadan noktaya değişir. Bu, daha fazla hesabı gerektirmesine karşılık esnekliği artırır.

Kare ağlı sayısal arazi modellerinde, üzerinde bir fonksiyon tanımlanan arazi parçasının büyüklüğü, ölçme ağlarının büyüklüğüne eşitse, nokta nokta interpolasyon ile parça parça interpolasyon aynıdır.

Nokta nokta veya parça parça interpolasyonda dört taneden fazla dayanak noktası kullanılacaksa, aşağıdaki interpolasyon şekillerinden birisi seçilebilir :

1) Ağırlıklı ortalama,

2) Kayan (hareketli) yüzey,

3) Lineer prediksiyon,

4) En küçük arazi parçalarındaki polinomlar.

Dayanak noktaları düzgün bir ağın kesişme noktaları olarak ölçülmüşse, dört köşe noktası kullanılarak aşağıdaki şekillerden birisine göre interpolasyon yapılabilir.

1) Ağırlıklı ortalama,

2) Lineer prediksiyon,

3) Bilineer polinomlar,

4) Lineer interpolasyon,

5) Çift lineer interpolasyon.

2.1. TÜM ARAZİYİ KAPSAYAN BİR TEK FONKSİYONLA İNTERPOLASYON

Bu durumda bütün dayanak noktaları aynı anda kullanılarak tüm arazi bir tek Z=f (x,y) fonksiyonu ile tanımlanır. Bunun için analitik bir çözüm Hardy tarafından verilmiştir. /1/, /2/. Topoğrafik yüzey, katsayıları tanımlanmış bir tek cins ikinci dereceden yüzey denklemlerinin toplamı olarak belirlenmektedir. Hardy bu yüzeye "Multikuadrik Yüzey" adını vermektedir.

Multikuadrik yüzey genel olarak,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \, q\,(x_j, y_j, x, y) = Z \qquad (1)$$

şeklindeki serilerle tanımlanabilir. Burada Z, tek bir cins ikinci dereceden yüzeylerin toplamı olarak x ve y' nin bir fonksiyonudur. Her bir ikinci dereceden yüzeyin düşey simetri ekseni dayanak noktalarının x_j, y_j yatay konumlarında yer almıştır. c_j katsayısı ikinci derece terimin cebrik işaretini ve eğimini belirler. (1) genel eşitliği şeklindeki multikuadrik yüzeye özel bir örnek,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left[(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + C \right]^{1/2} = Z \qquad (2)$$

iki yapraklı dairesel hiperboloid serilerinin toplamıdır. Başka bir örnek,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left[(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + C \right] = Z \qquad (3)$$

şeklinde dairesel paraboloid serilerinin toplamıdır.

C, isteğe bağlı bir katsayıdır. (2) eşitliğinde C=0 alınırsa multikuadrik yüzey,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left[(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 \right]^{1/2} = Z \qquad (4)$$

şeklinde dairesel dik konilerin toplamından oluşur. c_j katsayılarını belirlemek için dayanak noktalarından yararlanılır. n sayıdaki dayanak noktalarından,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2\right]^{1/2} = Z_i, \quad i=1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

şeklinde n sayıda lineer denklem sistemi oluşturulur. Burada nxn boyutlu $\underline{A}$ katsayılar matrisi,

$$\left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2\right]^{1/2} = a_{ij} \tag{6}$$

şeklinde bilinen elemanlardan oluşmuştur. n boyutlu bilinmeyenler vektörü

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

dir. Dayanak noktalarındaki yükseklikleri gösteren n boyutlu vektör ise,

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

dir. Bu durumda (5) eşitliği matris gösterimi ile,

$$\underline{A}\,\underline{c} = \underline{Z} \tag{9}$$

olur ve buradan c_j bilinmeyenleri,

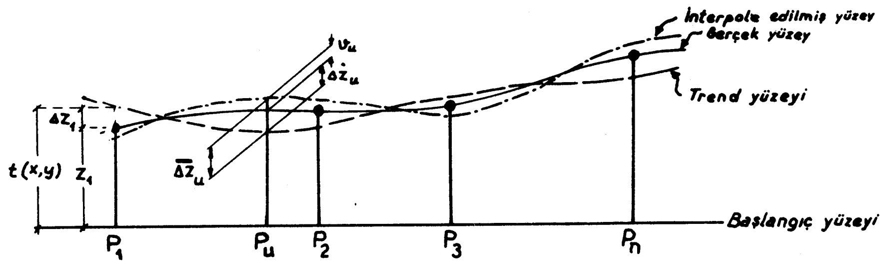
$$\underline{c} = \underline{A}^{-1}\underline{Z} \tag{10}$$

matris eşitliğinden elde edilir.

c_i katsayıları bulunduktan sonra, c_j katsayılarının hesaplandığı (2), (3), (4) eşitliklerinin birisi yardımı ile arazinin istenilen noktalarında yükseklik hesaplanabilir.

2.2. LİNEER PREDİKSİYONLA İNTERPOLASYON

Lineer prediksiyonla interpolasyon, ergodik istasyoner random fonksiyonların korelasyon teorisinden yararlanılarak geliştirilmiştir /5/, /7/, /8/. interpole edilecek bölgedeki dayanak noktalarına göre bir trend yüzeyi geçirildikten sonra, Δz artık yükseklik değerleri arasındaki korelasyon bir kovaryans fonksiyonu ile gösterilir.



Şekil 3

Bütün yüzeydeki Δz artık yükseklik değerleri artı ve eksi işaretlerle rastlantısal olarak dağılmışlardır. Tüm artık Δz yüksekliklerinin ortalaması,

$$\Delta z_{ort} = 1/n \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i = 0 \tag{11}$$

dir. Bu durumda, Δz değerleri izotrop[x)] ise, uzaklığa bağlı bir kovaryans fonksiyonu kullanılır.

Aralarındaki uzaklık s olan iki P_i ve P_j noktası için Δz_i ve Δz_j kovaryansı olarak $s \mp d$ aralığındaki bütün olasılı $\Delta z_i . \Delta z_j$ çarpım çiftlerinin ortalaması alınır. Böylece uzaklığın fonksiyonu olarak kovaryans,

$$w(s) = 1/n_{ij} \sum_{i<j} \Delta z_i \, \Delta z_j \tag{12}$$

dir. Bu değer,

$$V = 1/n \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i^2 \tag{13}$$

x) iki nokta arasındaki korelasyon, yalnızca bu iki noktanın arasındaki uzaklığa bağlı ise, Δz değerleri izotroptur. Korelasyon, hem uzaklığa ve hem de doğrultuya bağlı ise, Δz değerleri izotrop değildir.

varyansına bölünerek normalize edilir. Uygulamalarda, kovaryans fonksiyonu (12) eşitliğinden elde edilen bilgilerin, teorik olarak bilinen veya amprik olarak bulunmuş fonksiyonlara uydurulması ile belirlenir. Genel olarak kullanılan fonksiyonlar,

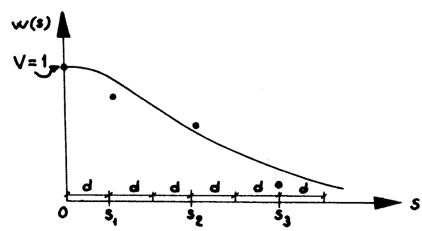
$$w(s) = (1+ s^2/k^2)^{-1} \tag{14}$$

şeklinde Hirvonen'in bulmuş olduğu fonksiyon ve

$$w(s) = e^{-s^2/k^2} \tag{15}$$

şeklindeki Gauss fonksiyonudur /6/,/8/.

Şekil 4 de gösterilen kovaryans fonksiyonu, Gauss fonksiyonunun (12) eşitliğinden elde edilen bilgilere uydurulması ile elde edilmiştir.



Şekil 4

Eğer Δz' ler izotrop değilse, hem uzaklık ve hem de doğrultuya bağlı bir kovaryans fonksiyonu belirlenerek anizotropluk dikkate alınmalıdır.

2.2.1. İNTERPOLASYON FORMÜLÜNÜN TÜRETİLMESİ

Herhangi bir P_u noktasında interpole edilecek $\bar{\Delta z}_u$ değeri, dayanak noktalarındaki Δz'lerin

$$\bar{\Delta z}_u = a_1.\Delta z_1 + a_2.\Delta z_2 + ...+ a_n.\Delta z_n \tag{16}$$

şeklinde lineer bir fonksiyonu olduğu düşünülür. (16) eşitliği matris yazılışı ile

$$\bar{\Delta z}_u = \underline{A}^T \underline{\Delta z} \tag{17}$$

şeklindedir. $\bar{\Delta z}_u$ değerinin gerçek Δz_u'dan sapması,

$$v_u = \Delta z_u - \overline{\Delta z}_u = \Delta z_u - \underline{A}^T \underline{\Delta z} = \begin{bmatrix} 1 - \underline{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_u \\ \underline{\Delta z} \end{bmatrix} \tag{18}$$

dir. Varyansı minimum yapan a_i katsayılarının bulunması için (16)eşitliğine kovaryansın yayılma yasası uygulanarak,

$$\sigma_{v_u}^2 = \begin{bmatrix} 1 - \underline{A}^T \end{bmatrix} \underline{C} \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{A} \end{bmatrix} \tag{19}$$

bulunur. Buradaki $\underline{C}$ matrisi,

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} V & \underline{q} \\ \underline{q} & \underline{Q} \end{bmatrix} \tag{20}$$

dir. V,$\bar{\Delta}$ z_u ' nun varyansı; $\underline{q}$, Δz_u ' nın $\underline{\Delta z}$ vektörünün elemanları ile ilişkisini gösteren nx1 elemanlı kovaryans vektörü; $\underline{Q}$, $\underline{\Delta z}$ vektörünün elemanları için kovaryans matrisidir. (20) eşitliği (19) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\sigma_{v_u}^2 = V - 2\,\underline{A}^T \underline{q} + \underline{A}^T \underline{Q}\,\underline{A} \tag{21}$$

olur ve (21) eşitliğinin türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\underline{Q}\,\underline{A} - \underline{q} = 0 \tag{22}$$

bulunur. Buradan,

$$\underline{A} = \underline{Q}^{-1} \underline{q} \tag{23}$$

elde edilir ve (23) eşitliği (17) eşitliğinde yerine konursa,

$$\overline{\Delta z}_u = \underline{q}^T \underline{Q}^{-1} \underline{\Delta z} \tag{24}$$

olur. Herhangi bir P_u noktasında (24) eşitliği ile bulunan $\overline{\Delta z}_u$ artık yükseklik değeri t(x,y) trend fonksiyonuna eklenirse,

$$Z_u = t(x,y) + \underline{q}^T \underline{Q}^{-1} \underline{\Delta z} \tag{25}$$

şeklinde P_u noktasının interpole edilmiş değeri elde edilmiş olur.

n sayıdaki dayanak noktası için nxn elemanlı kovaryans matrisi, seçilen w(s) kovaryans fonksiyonu kullanılarak,

$$
\underline{Q} = \begin{bmatrix}
1 & w(s_{12}) & w(s_{13}) & \dots\ w(s_{1n}) \\
w(s_{21}) & 1 & w(s_{23}) & \dots\ w(s_{2n}) \\
w(s_{31}) & w(s_{32}) & 1 & \dots\ w(s_{3n}) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
w(s_{n1}) & w(s_{n2}) & w(s_{n3}) & \dots\ 1
\end{bmatrix} \tag{26}
$$

biçiminde elde edilir. Burada s_{ij} i'nci ve j 'nci dayanak noktaları arasındaki uzaklıktır. İnterpole edilecek nokta ile dayanak noktaları ara - sındaki kovaryans vektörü,

$$
\underline{q} = \left[w(s_1),\ w(s_2),\ w(s_3),\ \dots,\ w(s_n) \right] \tag{27}
$$

dir Burada, s_i interpole edilecek nokta ile dayanak noktası arasındaki uzaklıktır.

2.3 EN KÜÇÜK PARÇALARDAKİ POLİNOMLARLA İNTERPOLASYON

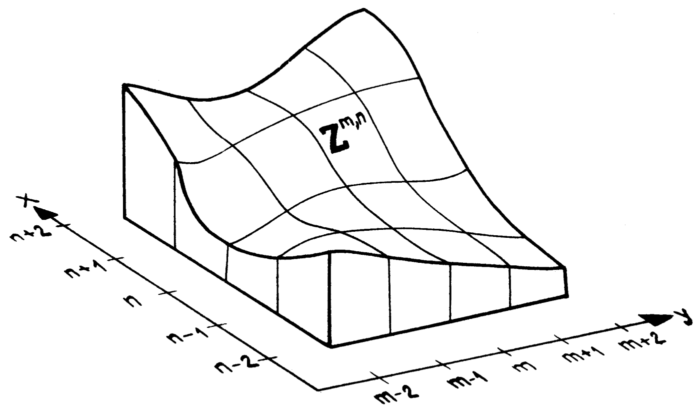
Dayanak noktaları düzlemi eşit kare veya dikdörtgen parçalara bölünür ve her bir kare veya dikdörtgen parçası üzerindeki yüzeyler tüm bölgede sürekli ve düzgün olacak şekilde düşük dereceden polinomlarla gösterilir. Parçaların sınırları boyunca süreklilik ve düzgünlük vardır. Bu yöntemin en genel karakteri, her bir yerel yüzeyin aynı anda hesaplanmasıdır.

Bu düşünceye uygun bir yöntem Jancaitis ve Junkins tarafından verilmiştir /3/.

Arazi şekil 5 de görüldüğü gibi eşit kare parçalara ayrılır. Bu eşit kare parçalarındaki yerel polinomlar,

$$
Z = \sum_{ij} C_{ij}\, x^i\, y^j \tag{28}
$$

şeklindedir. Kare kenarları birim uzunluk olarak seçilir. Her bir kare bölgesinin köşelerindeki yükseklik ve eğim değerleri, yerel dayanak noktaları alt kümesini kullanarak en küçük kareler yöntemine göre elde edilen düzlemlerden hesaplanır.



Şekil 5

$\bar{Z}$, $\bar{Z}_y$, $\bar{Z}_x$ birim kare bölgesinin bir köşesinde hesaplanacak yükseklik ve y ve x eksenleri doğrultusundaki eğimler; y_i ve x_i, i'nci dayanak noktasının koordinatları; w_i, i 'nci dayanak noktasının ağırlığı olduğuna göre,

$$v_i = \bar{Z} + \bar{Z}_y\, y_i + \bar{Z}_x\, x_i - Z_i \qquad w_i \tag{29}$$

şeklinde yazılan hata denklemlerinden, hataların karelerinin toplamı minimum yapan $\bar{Z}$, $\bar{Z}_y$, $\bar{Z}_x$ değerleri,

$$\begin{bmatrix} \bar{Z} \\ \bar{Z}_y \\ \bar{Z}_x \end{bmatrix} = (\underline{A}^T\ \underline{Q}\ \underline{A})^{-1}\ \underline{A}^T\ \underline{Q}\ \underline{Z} \tag{30}$$

matris eşitliğinden bulunur. $\bar{Z}$, nx1 elemanlı dayanak noktalarının yüksekliklerini içeren,

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{Z}_n \end{bmatrix}$$

şeklindeki vektör;

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & x_1 \\ 1 & y_2 & x_2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & y_n & x_n \end{bmatrix} \qquad (32)$$

nx3 elemanlı katsayılar matrisi ve

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \ldots. & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \ldots. & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \ldots. & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots. & w_n \end{bmatrix} \qquad (33)$$

nxn elemanlı ağırlık matrisidir. Burada w_i, i 'nci dayanak noktasının ağırlığını göstermektedir.

Her bir kare bölgesindeki yüzey (28) şeklindeki yüzey fonksiyonları ile gösterilir. Birim karelerin her bir köşe noktasında (30) eşitliği ile yüksekliğe ek olarak y ve x eksenleri doğrultusundaki eğimler de hesaplandığından her bir kare bölgesi için 12 değer bulunmuş olur (4 köşe noktası x 3 = 12). Bu değerlerle 12 katsayılı,

$$\begin{aligned} Z = {} & C_{00} + C_{01}\, y + C_{02}\, y^2 + C_{03}\, y^3 + C_{10}\, x \\ & + C_{11}\, x\, y + C_{12}\, x y^2 + C_{13}\, x\, y^3 + C_{20}\, x^2 \\ & + C_{21}\, x^2\, y + C_{30}\, x^3 + C_{31}\, x^3\, y \end{aligned} \qquad (34)$$

şeklinde bikübik bir polinom belirlenebilir. Bu polinom, birim karenin köşe noktalarındaki yükseklikler ve eğimlerden hesaplandığından, komşu karelerdeki polinomların fonksiyon değerleri sınırlar boyunca aynı olur. Verilen bir kare bölgesi için dört köşe noktasındaki yükseklik ve eğimlerden C_{ij} katsayılarının hesabı,

$$\underline{C} = \underline{A}^{-1}\,\bar{\underline{Z}} \tag{35}$$

ile yapılır. Burada $\underline{C}$, nx1 elemanlı,

$$\underline{C}^T = \left[C_{00}, C_{01}, C_{02}, C_{03}, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{20}, C_{21}, C_{30}, C_{31} \right] \tag{36}$$

şeklindeki katsayılar vektörü; $\underline{A}$, birim kare bölgesinin dört köşe noktasının y ve x konumlarına bağlı ve (34) eşitliğine karşılık gelen elemanları içeren,

$$\underline{A} = \begin{bmatrix}
1 & y_1 & y_1^2 & y_1^3 & x_1 & x_1y_1 & x_1y_1^2 & x_1y_1^3 & x_1^2 & x_1^2y_1 & x_1^3 & x_1^3y_1 \\
0 & 1 & 2y_1 & 3y_1^2 & 0 & x_1 & 2x_1y_1 & 3x_1y_1^2 & 0 & x_1^2 & 0 & x_1^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_1 & y_1^2 & y_1^3 & 2x_1 & 2x_1y_1 & 3x_1^2 & 3x_1^2y_1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & y_4 & y_4^2 & y_4^3 & x_4 & x_4y_4 & x_4y_4^2 & x_4y_4^3 & x_4^2 & x_4^2y_4 & x_4^3 & x_4^3y_4 \\
0 & 1 & 2y_4 & 3y_4^2 & 0 & x_4 & 2x_4y_4 & 3x_4y_4^2 & 0 & x_4^2 & 0 & x_4^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_4 & y_4^2 & y_4^3 & 2x_4 & 2x_4y_4 & 3x_4^2 & 3x_4^2y_4
\end{bmatrix} \tag{37}$$

12x12 elemanlı matris; $\bar{\underline{Z}}$, dört köşe noktasında (30) eşitliği ile bulunan,

$$\bar{\underline{Z}} = \begin{bmatrix}
\bar{z}_1 \\ \bar{z}_{1y} \\ \bar{z}_{1x} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{z}_4 \\ \bar{z}_{4y} \\ \bar{z}_{4x}
\end{bmatrix} \tag{38}$$

yükseklik ve eğim değerlerinin 12x1 elemanlı vektörüdür.

Orijini, birim kare bölgesinin sol alt köşesinde bulunan kayan bir yerel koordinat sistemi tanımlanırsa, $\underline{A}$ matrisi bütün birim kare bölgeler için aynı olur. Böylece $\underline{A}$ matrisinin yalnızca bir kez hesaplanarak tersinin alınması yeterlidir. Bu ters matrisin depolanması bilgisayar işlem zamanını kısaltır.

Kare bölgelerin büyüklüğünün saptanması için,

$$\left[1/n \sum_{i=1}^{n} \left[Z\,(y_i,x_i) - Z_i \right]^2 \right]^{1/2} < \sigma$$

eşitsizliğinden yararlanılabilir. Burada n, tüm arazideki toplam ölçü sayısı; $Z(y_i,x_i)$ i 'nci dayanak noktasının (34) eşitliğinden bulunmuş yüksekliği; Z_i, i 'nci dayanak noktasının ölçme sonucu bulunmuş yüksekliği; σ ise Z_i gözleminin ölçme hatasıdır. Yukarıdaki eşitsizlik, fonksiyonel modelin standart sapmasının, ölçülerin ölçme duyarlığı içinde kalmasını sağlar.

2.4 KAYAN YÜZEY YARDIMI İLE İNTERPOLASYON

İstenilen her bir noktanın yüksekliği, çevresinde bulunan dayanak noktalarından hesaplanan bir yüzeyden elde edilir. Bu yüzeyin konum ve şekli, bir noktadan diğer komşu noktaya değiştiğinden "Kayan Yüzey" olarak adlandırılmıştır. Koordinat sisteminin başlangıcı olarak yüksekliği hesaplanacak nokta alınırsa, bu yüzeye ait,

$$Z = \sum_{i=0}^{m} \sum_{i+j=k} a_{ij}\, x^i\, y^j \tag{39}$$

m 'nci dereceden polinomun sabit terimi a_{oo} interpole edilen noktanın yükseklik değeri olur.

(39) eşitliğindeki a_{ij}, katsayıları; m, yüzeyin derecesini göstermektedir. Yüzeyin a_{ij} katsayılarının hesabı için hata denklemleri,

$$v_i = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i+j=k} a_{ij}\, x_n^i\, y_n^j - Z_n \tag{40}$$

şeklindedir. Burada x_n, y_n, n 'nci dayanak noktasının koordunatları; Z_n, n 'nci dayanak noktasının yüksekliğidir. Ağırlık olarak,

$$w_n = \left((x_n - x_o)^2 \quad (y_n - y_o)^2 \right)^{-k} \tag{41}$$

eşitliği veya (15) eşitliği ile verilen Gauss fonksiyonu kullanılabilir/4/, /7/, /8/. Burada n indisi dayanak noktalarını, o indisi ise interpole edilecek noktayı göstermektedir.

Hata denklemleri matris gösterimi ile,

$$\underline{v} = \underline{A}\,\underline{X} - \underline{L} \tag{42}$$

şeklindedir. Burada $\underline{A}$, x_n ve y_n koordinatlarını içeren katsayılar matrisi; $\underline{X}$, a_{ij} katsayılarını içeren bilinmeyenler vektörü; $\underline{L}$ ise, dayanak noktalarının Z_n yükseklik değerlerini içeren ölçüler vektördür. Buradan,

$$\underline{A}^T\,\underline{Q}\,\underline{A}\,\underline{X} - \underline{A}^T\,\underline{Q}\,\underline{L} = 0 \tag{43}$$

olarak elde edilen normal denklemlerden, a_{ij} katsayılarını içeren $\underline{X}$ bilinmeyenler vektörü,

$$\underline{X} = (\underline{A}^T\,\underline{Q}\,\underline{A})^{-1}\,\underline{A}^T\,\underline{Q}\,\underline{L} \tag{44}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Burada $\underline{Q}$ kovaryans matrisi, (41) veya (15) eşitliklerinden elde edilen köşegen bir matristir.

Polinomun m derecesi, daha yüksek dereceden polinomlar interpolasyonu düzeltmediğinden ve ayrıca komşu ölçü noktalarının sınırlı bir sayısının interpolasyona alınması öngörülmüş olacağından, kötü şartlı normal denklemlerden kaçınmak ve hesap yükünü sınırlamak için genellikle 2 veya 3 alınır /4/, /7/.

2.5. AĞIRLIKLI ARİTMETİK ORTALAMA İLE İNTERPOLASYON

İstenilen noktanın yüksekliği çevrede bulunan dayanak noktalarının değerlerinden,

$$Z = \sum_{i=1}^{n} w_i\, Z_i \Big/ \sum_{i=j}^{n} w_i = \underline{w}\,\underline{Z}^T / \underline{w}\,\underline{u}^T \tag{45}$$

eşitliği ile bulunur. Burada,

$$\underline{w} = (w_1,\ w_2,\ w_3,\ \ldots.,\ w_n) \tag{46}$$

ağırlık vektörünü, $\underline{u}$ ise, birim vektörü gösterir. w_i ağırlıkları, interpole edilecek nokta ile i 'nci dayanak noktasının arasındaki s uzunluğunun bir fonksiyonudur. Ağırlık fonksiyonu olarak (41) eşitliği kullanılabilir.

k değerinin büyümesi, en yakın dayanak noktalarının etkisini çoğaltırken, diğer uzak noktaların etkisini azaltır.

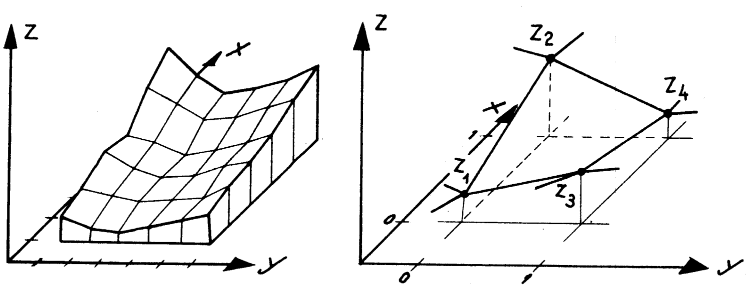
Sayısal arazi modellerinde bu interpolasyon şeklinin uygulanması Lauer/6/ tarafından önerilmiştir.

2.6 BİLİNEER POLİNOMLARLA İNTERPOLASYON

İnterpolasyonda en yakın 4 dayanak noktası kullanılarak,

$$Z = a_0 + a_1\ x\quad a_2\ y + a_3\ x\ y$$

şeklinde bilineer polinomlar kullanılabilir. Bu durumda yüzey, kesin olarak dayanak noktalarından geçer. Dayanak noktalarının, sayısal arazi modelini kapsayan arazi üzerinde oluşturulan bir kareler ağının her bir biriminin köşe noktalarında bulunması durumunda, sınırlar boyunca çatlaklar oluşmaz. Diğer bir deyişle, komşu kare birimlerinin sınırları boyunca süreklilik vardır.



Şekil 6

Kareler ağının her bir biriminin köşe noktalarında birer dayanak noktası olması durumunda polinomun katsayıları,

$$a_0 = Z_1,\quad a_1 = Z_2 - Z_1,\quad a_2 = Z_3 - Z_1,\quad a_3 = Z_1 + Z_4 - Z_2 - Z_3$$

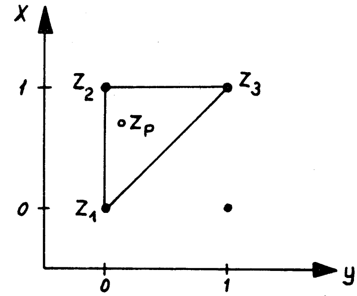
dir (şekil 6) Bu interpolasyon, parça parça veya nokta nokta interpolasyon yöntemi olarak kullanılabilir. Bu interpolasyon şeklinin sayısal arazi modellerinde kullanılması Schult /9/ tarafından önerilmiştir.

2.7. LİNEER İNTERPOLASYON

İstenilen noktaların yükzeklikleri en yakın 3 dayanak noktasını kullanarak,

$$Z_p = a_0 + a_1\ x + a_2\ y \qquad (48)$$

eşitliği yardımı ile hesaplanır. Dayanak noktaları düzgün bir kareler ağının birimlerinin köşe noktalarında ise polinomun katsayıları,



Şekil 7

$$a_0 = Z_1, \qquad a_1 = Z_2 - Z_1, \qquad a_2 = Z_3 - Z_2$$

olur (şekil 7). Şekil 2 lineer interpolasyan sonucu oluşmuş bir yüzeyi (polihedron) göstermektedir.

2.8. ÇİFT LİNEER İNTERPOLASYON

İstenilen noktaların yükseklikleri iki lineer interpolasyondan hesaplandıktan sonra ortalaması bulunabilir :

$$Z_p = 0.5\ (Z_{p1} + Z_{p2}) \tag{49}$$

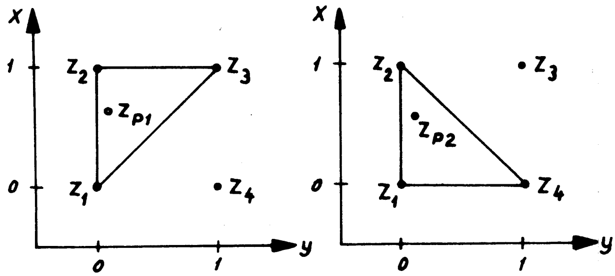
$$Z_{p1} = a_0 + a_1\, x + a_2\, y, \qquad Z_{p2} = b_0 + b_1\, x + b_2\, y$$

Dayanak noktaları düzgün bir ağın birimlerinin köşe noktalarında ise,

$$a_0 = Z_1, \qquad a_1 = Z_2 - Z_1, \qquad a_2 = Z_3 - Z_2$$

$$b_0 = Z_1, \qquad b_1 = Z_2 - Z_1, \qquad b_2 = Z_4 - Z_1$$

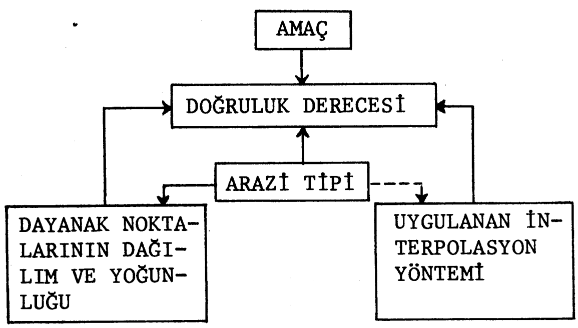
dir (şekil 8).



Şekil 8

3. SONUÇ

Sayısal arazi modellerinin doğruluk derecesi arazinin tipine, dayanak noktalarının dağılım ve yoğunluğuna ve, interpolasyon yöntemlerine bağlıdır. İstenilen doğruluk derecesini ise amaç belirler. Bu ilişkiler şekil 9 da görülmektedir.



Şekil 9

Ülkemizde yapılacak sayısal arazi modeli uygulamaları için, çeşitli tiplerdeki arazide, çeşitli nokta dağılım ve yoğunluklarına göre mevcut interpolasyon yöntemleri, çeşitli ağırlık ve kovaryans fonksiyonları ile bu fonksiyonlardaki sabit katsayılar değiştirilerek test edilmelidir. Test sonuçları doğruluk, maliyet ve zaman bakımından karşılaştırılıp analiz edilmeli ve amaçlar için optimum çözüm yolları bulunmalıdır.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

/ 1/ HARDY, R. "Geodetic Applications of Multiquadric Analysis", AVN (Allgemeine Vermessuns-Nachrichten), 1972/10

/ 2/ HARDY, R. "Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces", Journal of Geophysical Research, 76/8, 1971.

/ 3/ JAINCAITIS, J.E., JUNKINS, J.L "Modelling Irregular Surfaces", Photogrammetric Engineering, 1973/4.

/ 4/ KOCH, K.R. "Digitales Gelandemodell und Automatische Höhenlinienzeichnung", ZfV (Zeitschrift für Vermessunswesen), 1973/8.

/ 5/ KRAUS, K., MIKHAIL, E.M "Linear Least Squares Interpolation",Photogrammetric Engineering, 1972/10.

/ 6/ LAUER, S. "Anwendug derSkaleren Pradiktionen auf das Problem des Digitalen Gelandemodelles",Nachrichten aus dem Karten-und Vermessuns-wesen, Frankfurt, 1972.

/ 7/ LEBERL, F. "Interpolation in Square Grid DTM", ITC (International Training Center for Aerial Survey), 1973/5.

/ 8/ SCHUT, G.H. "Rewiew of Interpolation Methods for Digital Terrain Models", Canadian Surveyor, 1976/5.

/ 9/ SCHULT, R. "Ein System digitaler Gelandemodelle",AVN (Allgemeine Vermessuns-Nachrichten), 1974/8.

/ 10/ STEWARDSON, P.B., GSELL, D.C., KRAUS, K. "DACS-Digital Automatic Contouring System", Presented Paper, ISP-Conference, Ottawa,1972.

/ 11/ STEFANOVIC, P. RADWAN, M.M. TEMPFLI, K. "Digital Terrain Models: Data Acquisition, Processing and Applications", ITC (Internati- Center for Aerial Survey), 1977/1.