Şart muadelelerine göre, ve Bolz usulü ile yapılan jeodezik şebeke muvazenelerine Laplace muadelelerinin idhali

Yazan:
W.Jenne

Çeviren: Yk. Mühendis
Muhiddin Aran

Uzun bir zamandan beri memleket nirengisinin jeodezik rasadları, bilfiil ölçülen müteaddit bazlar ve bunların büyültme şebekeleri ianesile kontrol edilmektedir. Halbuki laplace noktalarının rasad kıymetleri ianesile elde edilen kontrollar nadiren, doğrudan doğruya jeodezik şebeke muvazenelerine idhal olunmaktadır. Zikr edilen kontrol muadeleleri kale alındığı zamanlarda ekseriya, Helmert usulü üzere, rasad edilmiş nirengi şebekesi yerine jeodezik hatlardan mürekkep ideal bir şebeke kullanılmıştır. Hemen hemen her noktası aynı zamanda laplac noktası olan cenubî Fin zincirinde, Ölander jeodezik ve astronomik rasadları, beraberce şart muadelelerine göre muvazene etti. Fakat laplac muadelelerinin idhali dolayısile, şart muadeleleri adedi 79 dan 126 ya çıktı ve bu sebeple, muvazene kısım kısım yapıldı. Netice itibarile, rabıt şartı tamamile izale edilmiş olmadı.

Cenubî Fin şebekesinin bir kısmının, jeodezik ve astronomik rasadlarını Weiken koordine usulile kat'i olarak muvazene etti; muvazenesi yapılan bu şebekede 30 nirengi noktasından 16 sı ayni zamanda laplace noktasıdir.

Her nirengi noktası üzerinde aynı zamanda astronomi rasadı yapmak her zaman mümkün değildir. Bu sebeple, muhtelif memleketlerde jeodezik rasadlar, bir birlerinden uzakta bulunan laplac noktalarına istinad ettirildi.

Astronomik rasadların muhtemel sistematik hatalarile jeodezik rasadları bozmamak ve bu hataları şebekeye nakletmemek için, izole laplac noktaları yerine Kohlşütter, 3 ile 4 noktadan müteşekkil grupların rasadını tavsiye etti. (Prusya jeodezi enstitüsü senelerdenberi astronomik rasadları bir esasa göre tanzim etmiştir.)

Eğer işin büyümesi dolayısile gruplara dahil bütün noktalar hep birden umumi muvazeneye idhal edilmezlerse, bu takdirde mevzii bir kontrolu müteakip bu noktaların içinden en kat'i görüneni maksadı temin edebilir.

Bu düşünce ile hesap tarzı yine izole laplace noktalarındakinin aynına irca edilmiş olur. Zikredilen şartların şebekeye idhalinde eksriya (hep birden) kat'i umumi muvazene prensibi kale alınmıyarak (meselâ Ussk de olduğu gibi) muvazene muhtelif kısımlara ayrılmaktadır.

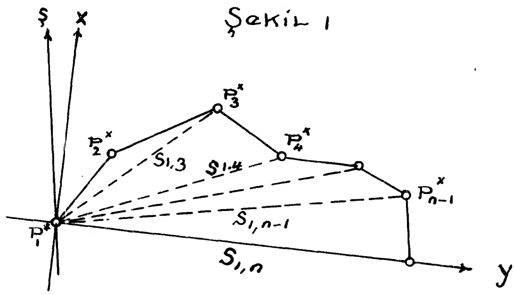
Tabiatile astronomik ve jeodezik ölçüleri beraberce ve kat'i olarak şart muadelelerine göre muvazene etmek mümkündür.

Bolz muvazene usulünden istifade ile fazla hesap yapmadan, zikrolunan muvazene tarzını bir misal ile göstereceğiz. Ayni zamanda astronomik rasadlara verilen muhtelif vezinler ve keza baz ve laplace şartlarının tesirile, muvazene edilmiş şebekenin bir kaç noktasındaki mevzii tahavvülleri mütalaa edeceğiz.

Bir birlerinden uzakta bulunan laplace noktalarının astronomik rasadlarından, rasad edilen istikamet veya zaviye tashih miktarlarını istihraç için, şakuli inhiraf veya laplace muadelelerinin teşkiline yarayan poligonun tahavvülü ile münasebettar hadlerin, istikamet veya zaviye tashih mıktarlarına ircaı lâzımdır. Bu meseleyi Krüger «Beitrage zur Brechnung der Lotabweichungssystemen» adlı eserinde çok güzel hal etmiştir.

Asıl meselemizin kolaylıkla anlaşılmasını temin için' krügerin usulü hakkında bir az izahat verelim. (Şekil 1)

p_1 ve p_n laplace noktalarını bağlayan $p_1, p_2 ...., p_n$, jeodezik poligonu, p_1^*, p_2^*.... p_n^* müstevi poligona kalbolunur; bu meyanda w köşe zaviyelerinin, W müstevi poligon zaviyelerine irca için görecekleri Exes (fazlı kürrevi) tashih mıktarları; (malûm eski



usul ile) dılıların hesabına yarayan zincirde, uzun jeodezik müselleslerle bulunan $p_1 p_n$ jeodezik hattının hesabında kullanılan exes mıktarı tash'hlerinin aynıdır.

Meselâ p_1, p_i, p_{i+1} müsellesinin exesini ε_{i+1} ile gösterirsek, bu takdirde; $W_4 = w_4 - \frac{1}{3} (\varepsilon_{3,4} + \varepsilon_{4,5})$ olur.

Krüger, p_1^*, p_n^* istikametini $+y$ mihveri ve bu mihvere p_1^* noktasında amud olan istikameti de $+x$ mihveri kabul ediyor. Ve bu suetle de $+x$ mihverinden $+y$ mihverine doğru tezayüt eden semtlerle (semtler şimalden, şarka doğru müsbettir) poligon noktalarının, intihap etmiş olduğu koordine sistemine nazaran x,y müstevi koordinelerini hesap ediyor. Elde olunan koordineler ianesile, yukarıda zikredilen zaviye veya istikamet miktarı tashihlerine irca ameliyesi yapıldığı gibi, aynı zamanda şakuli inhiraf mürekkipleri de hesap edilebilir.

Bu suretle p_1 ve p_n noktaları arasındaki laplac muadelesi (Helmert in tarzı ifadesine göre) $q_4 - r_4 = \text{cosec } B_n \left(1 - \frac{S^2_{1.n}}{2\varrho^2}\right)$ takribiyeti kabul olunduğuna göre, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\operatorname{cosec} B_n \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{2\varepsilon_{i,i+1}}{s_{i,i+1}} + \frac{\rho'' S_{1,n}}{\rho^2} \cos a_{i,i+1} \right) \delta s_{i,i+1} + \left(1 - \frac{S_{1,n}^2}{2\rho^2}\right) \delta T'_{1,2} \right.$$

$$\left. - \delta T'_{n,n-1} - \sum_{i=2}^{n-1} \left(1 - \frac{S^2_{n,i}}{2\rho^2}\right) (\delta T'_{i,i-1} - \delta T'_{i,i+1}) \right\} \quad (1)$$

$$+ L'_n - L'_1 - \overline{L}_n + \overline{L}_1 + \delta L'_n - \delta L'_1 + (q_1 - r_1)(B'_1 - \overline{B}_1 + \delta B'_1 - \xi_1)$$

$$- (q_2 - r_2)\lambda_1 + \operatorname{cosec} B_n \left\{ \left(1 - \frac{S_{1,n}^2}{2\rho^2}\right) (T'_{1,n} - \overline{T}_{1,n}) - (T'_{n,1} - \overline{T}_{n,1}) \right\}$$

$$+ (q_6 - r_6)\, da = 0$$

Yukarıki düsturda;

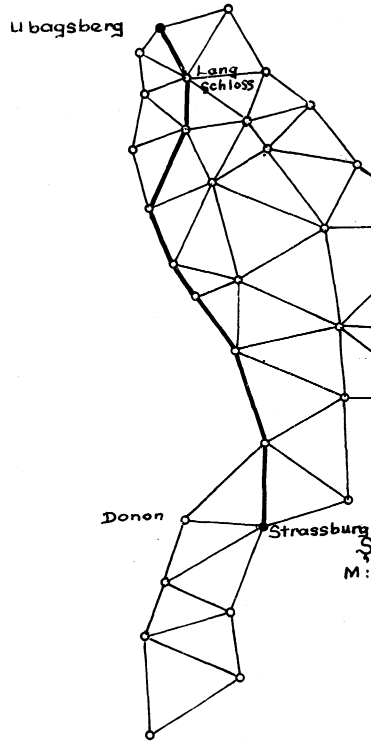
$S_{i,i+1}$ ile p_i, p_{i+1} poligon dılı, $S_{i,n}$ ile p_i, p_n jeodezi hattının $a_{i,i+1}$ ile $s_{i,i+1}$ dılının x mihverine nazaran semt zaviyesi ve ϱ ilede jeodezi hattının ait olduğu satıh parçasının vasati nısıfı kutru inhinası gösterilmiştir. $\varrho'' = 206265$ dir.

Jeodezik şebeke muvazenesile astronomik kontrolun birleştirilmesinini bir misal ile bilhesap tetkik etmek' fakat ayni zamanda hesap ameliyesini kısaltmak maksadile; harita dairesi tarafından yapılmış olan şebekenin, Bolz sun eserindeki, muvazene edilmiş olan bir parçasını intihap ettik. Mezkûr şebekede, bir birinden 283 kilometre mesafede bulunan iki loplace noktası vardır. (Strassburg ve Ubagsberg noktaları.) (Şekil 2)

Zikrolunanan şebekede, 48 jeodezik şebeke şartı, ve bu meyanda bir de baz şartı vardır. Bu şartları temin eden 48 korelat tevsii, yukarda adı gecen Bolz sun eserinde mevcuttur. Eğer biz (Ubagsberg-Strassburg) laplace muadelesini dė 49 uncu şart olarak muvazeneye idhal edersek, bu takdirde laplace muadelesinin muvazene neticesine olan tesirini görebiliriz.

(Birkhof-Michelsberg) ve (Ballon-Belchen) büyütme dılıları arasındaki baz şartı muvazenede son şart olarak hesaba konmuştur.

Baz şartlarının da muvazene edilmiş şebeke vaziyetindeki tesirlerini mütalaa etmek maksadile; son şart olarak muvazeneye idhal edilmiş olan baz şartı dolayısile, korelat tevsilerine ilâve edilen tashih miktarlarını nazarı itibara almamak lâzımdır.



Şekil 2
M: 1:4 000 000

Nokta, istikamet ve müselles numaralarını Bolz sun kitabından aynen alıyoruz. Mezkûr şebekede, Harita dairesinin muhtelif şebeke kısımlarına ait bulunan noktaların kat'ı istasyon muvazeneleri yeniden yapılmış olduğundan, biz de hesabımızı bu suretle katileşmiş olan nihaî zaviyelerle yapacağız. Fakat Bolz sun kullanmış olduğu kıymetlerle yeni kıymetler arasında o kadar az fark varki, Bolz un eserindeki 142 korelat muadeleleri hemen hemen hiç değiştirilmeden, aynen kullanılabilir. Bu hazırlıktan sonra (Ubagsberg-Strassburg) laplace muadelesinin kuruluşuna geçelim.

(Ubagsberg) 52 derece arzındaki kavis mesahasına ait bir nokta olup, «Lotabweichung» 5 inci cildinde birinci derece jeodezik ve astronomik şebeke muvazenesi hesabında kullanılmıştı. Mezûr eserde bu noktaya ait kıymetler şunlardır:

$B'_2 = 50^\circ\ 50'\ 53''.20$

$L'_2 = \ 5\ \ 57\ \ 07.\ 10$

$T'_{2,5} = 130\ \ 04\ \ 16.\ 87$ (Langschoss a giden semt)

48 derece arz dairesindeki kavis mesahasına ait naktalardan biri olan «Strassburg» un kıymetleri şunlardır.

$B'_{27} = 48^\circ\ 34'\ 56{,}18$

$L'_{27} = \ 7\ \ 45\ \ 00.51$

$T'_{27.28} = 260\ \ 07\ \ 37.75$ (Donon a giden semt.)

«Ubagsberg» ile «Strassburg» noktaları arasında doğrudan doğruya, şimdiye kadar rabıt hesabı yapılmadığından, evvelâ bu iki noktanın «Elipsoid» üzerindeki $\overline{S}$, $\overline{T}$, $\overline{L}$, $\overline{B}$ takribi kıymetlerini hesap etmek lâzımdır. Kolaylık olsun diye, rasad edilen arz ve tulü takribi kıymet olarak kabul, ve bu kıymetler ianesile de «Bessel» kürei arz eb'adını kullanarak «Gauss-Helmert» formülü ile $\overline{T}$ ve S kıymetlerini, 8 haneli lugaritma ile hesap edelim.

Bulanan kıymetler şunlardır:

$\overline{T}_{2.27} = 152^\circ\ 04'\ 53''.270$; $\overline{T}_{27.2} = 333^\circ\ 27'\ 12''.582$, $\overline{S} = 283368.86$ m.

Şimdi astronomik ve jeodezik rasadlarla T' ve S' yi hesap edelim Hesap için (şekilde kalın çizgi ile gösterilmiş olan) Ubagsberg, Langschose, Weisser Stein, Muxerath, Loeberg, Hochwald, Höcherberg, Wintersberg, Strassburg, poligon hattını intihap edelim. Jeodezik rabıt hattının malûm usul üzere hesabında fazla münferice zaviyelerden ictinap edilir. Jeodezik rabıt hattının hesabı evvelce, mezkûr usule göre yapılmak istenildiğinden, hesap için intihap edilmiş olan poligon hattı da, iki laplace noktasını müstakimen bağlayan hattan bir az inhiraf etmektedir. Krüger in koordine usulü kullanıldığı takdirde, poligon hattının intihabı hiç bir şarta tabi değildir.

Birkhof-Michelsberg büyütme dılından başlayarak, muvazenede kullanılmamış olan, yani istasyon muvazenesinden çıkan istikamet kıymetlerini kullanarak, lüzumlu olan müselles dılılarını hesap etmelidir.

Rabıt temin eden zincir şebekesile semt rasatlarından, Ubagsberg-Strassburg jeodezi hattının hesabı için icabeden dılı ve poligon zaviyeleri aşağıda yazılmıştır.

Nokta No.	Mevkifler	log s	$T_{i,i-1} - T_{i,i+1}$	Tashih miktarları
2	Ubagsberg		° ′ ″	
		4.49165382		
5	Langchoss		141 51 20.91	— (17) + (20)
		4.46704731		
9	Weisser Stein		159 16 10.87	+ (35) — (38)
		4.66805365		
11	Muxerath		227 46 10.66	+ (45) — (47)
		4.54407305		
17	Loeberg		185 43 07.73	+ (76) — (79)
		4.39043223		
18	Hochwald		193 39 41.95	+ (80) — (82)
		4.59744778		
19	Höcherberg		151 33 46.30	+ (83) — (87)
		4.72473315		
25	Wintersberg		164 17 18.60	+ (110) — (113)
		4.65566618		
27	Strassburg			

Keza laplace muadelesini kurma için 34 numaralı müsellesde Strassburg noktasındaki zaviyeye ihtiyaç vardır. Bu zaviye ise Strassburg noktasının istasyon muvazenesinden 87° 11′ 18″.19 — (20) + (121) olarak bulunmuştur. Krüger in usulile $\overline{T}_{2,27}$ istikametini y mihveri olarak kabul ile Ubagsberg den itibaren, düz koordine hesabile aşağıda yazılı kıymetler bulunmuştur:

$$T''_{2,27} - \overline{T}_{2,27} = -19'',74 \qquad T'_{27,2} - \overline{T}_{27,2} = -21'',264$$

p, q, r emsalleride malûm usul üzere hesap edildikten sonra bulunan kiymetlerle jeodezik şebekenin istikamet miktarı tashihlerini (1) numaralı muadeleye koyarız.

Bu meyanda üç haneli elarak alınan miktarı tashihler maksada tamamile kâfidirler. Bu münasebetle de (1) numaralı muadelede δs nin mazrubu olan hadlerden sarfı nazar edilebilir, bu suretle de laplace şart muadelesinde yalnız (hesaba yarayan poligonda) poligon zaviyeleri miktarı tashihlerile rasad edilmiş olan semt zaviyesine rabit için kullanılan müselles zaviyesi tashih miktarı mevcut olabilir. Binaenaleyh sin B_n ile zarb edildikleri takdirde, istikamet tashih miktarları emsallerinin (1) mazrubunu almaları ihtimali fazlalaşır. Eğer laplace noktaları aralarındaki mesafe takriben 200 kilometre ise, zarb ameliyesinden sonra, hakikaten tashih miktarları 1 ile zarb edilmiş olurlar. Çünki bizim arzımızda daima $\frac{S^2_{n,i}}{2\rho^2} < 0,0005$ dir. Bu suretle Ubagsberğ-Strasburg laplace muadelesi;

$$+0,999(17) - 0,999(20) - 0,999(35) + 0,999(38) - (45) + (47) - (76) + (79) - (80) + (82)$$
$$(83) + (87) - (110) + (113) + (120) - (121) - 0,750\,\delta L'_2$$
$$+ 0,750\,\delta L'_{27} + 0,999\,\delta T'_{2,5} - \delta T'_{27,28} + 1'',54 + 0,0208\,(\delta B'_2 - \xi_2)$$
$$- 0,0248\,\lambda_2 - 67\,da = 0 \quad .... \ (2)$$

Yukarıdaki muadelede yazılı son üç had (misalimize göre) hiç bir ehemmiyeti haiz olmayup, yalnız muadelenin esasısını muhafaza maksadile yazılmıştır. Görülüyorki laplace muadelesinin (Wiederspruch) kapanma hatası büyük değildir. Eğer jeodezik muvazeneden sonra elde edilen zaviye ve dılı kıymetlerile hesabımızı yaparsak, bu takdirde kapanma hatası 0,67″ saniyeye iniyor. Jeodezi enstitüsünün evvelce yapmış olduğu şakuli inhiraf hesaplarındaki kapanma hatasile mukayese mevzubahs olursa, bu takdirde yukarıda zikr olunan kapanma hatasını cos $B_{27} = 1,3335$

ile zarbetmek lâzımdır. Bu ameliyeyi yaparsak $0'',89$ buluruz. Hesaba konan astronomi rasadları senelerce evvel yapılmıştır. Bu sebeple mezkûr kapanma hatası hakikaten fazla değildir. Yukarıda yazılı şart muadelesine ait normal muadeleyi teşkil için evvelâ astronomi rasadları, miktarı tashihlerine verilecek vezinleri tesbit etmemiz lâzımdır.

İşte bu vezin hususundaki tereddüt dolayısiledirki, şimdiye kadar, astronomik rasadlar, jeodezik şebeke muvazenelerine idhal olunmamıştur. (Bu hususa dair Helmert in yüksek jeodezi kitabının birinci cildinde izahat vardır. Biz evvelâ astronomi rasadlarına namütenahi vezin vereceğiz, yani ait oldukları tashih miktarlarını sıfır kabul edeceğiz. Nasılki baz büyütme şebekeleri muvazenesile malûm olan dılılar hatasız olarak kabul ediliyor, ve bu dılılar aralarındaki baz şartları muvazeneye idhal olunuyorsa, yan inhiraf hatasınıda mümkün mertebe bertaraf için, astronomik rasadlara namütenahi vezin vermenin lâzım geldiğini Förster iddia ediyor. Astronomik rasadları hatasız olarak kabul edersek, laplac normal muadelesi aşağıda yazılı şekli alır:

Normal muadelesi 49

$$+0{,}999\,K_1 - 0{,}999\,K_2 - 1{,}998\,K_4 - 1{,}999\,K_6 + 1{,}999\,K_7 + 1{,}998\,K_{14} + 2{,}000\,K_{18}$$
$$+2{,}000\,K_{19} + 2{,}000\,K_{30} + 2{,}000\,K_{31} + 2{,}000\,K_{33} - 3{,}000\,K_{34} + 1{,}000\,K_{35} + 1{,}033\,K_{40} \quad \ldots\ldots (3)$$
$$+0{,}759\,K_{41} + 0{,}562\,K_{42} - 0{,}783\,K_{44} + 0{,}285\,K_{46} + 0{,}986\,K_{48} + 15{,}992\,K_{49} + 1{,}54$$
$$+0{,}0208\,(\delta B'_2 - \xi_2) - 0{,}0248\,\lambda_2 - 67\ da = 0$$

ξ_2, λ_2, da, ya tabi olan hadlerden bundan böyle sarfı nazar edeceğiz, yani bu suretle mebde noktası olan Ubagsberg e ait şakuli inhirafı sıfır kabul ediyoruz. Misalimizde (Abplattung) basıklık noktasının tashih edilmiş kıymetini hesap edecek değiliz.

(Bolz ın kitabında sahife 94- 7 de yazılı) korelat silsileleri ianesile 3 numaralı muadeleye ait ara korelatlarını teşkil edersek, A muaddel murabba had emsalile, Wmuaddel kapanma hadlerin-den müteşekkil, 49 $(AK + W) = 0$ muaddel normal muadelesini hesap edebiliriz.

$$4{,}33045\ K_{49} + 0{,}66554 = 0 \quad .... \quad (4)$$

Yukarıda yazılı W evvelce yapılmış muvazene kıymetlerile hesap edilen laplace muadelesi kapanma hatasının aynıdır. Zaten koordine hesabı ianesile, mezkûr kapanma hatasını 0,"67 saniye olarak bulmuştuk. Bu suretle 4 numaralı muadeleden:

$K_{49} = -0{,}15369$ bulunur.

Bu suretle hesap edilen korelatlar, istikamet ve zaviye tashih miktarları, 49 numaralı şart muadelesini tashih ederler, ve Ubagsberg e nazaran Strassburg un şakulî inhiraf mürekkipleri:

$$\xi_{27} = -4{,}''08 \qquad \lambda_{27} = \pm 1{,}''92$$

(Lotabweichung II) risalesindeki (52 arz dairesindeki Avrupa tul kavsi mesahası, cenubî jeodezik hattı kıymetlerile) bulduğumuz kıymetleri mukayese edemiyeceğiz. Çünki bu risalede, Strassburg-Ubagsberg raptı hesap edilmemiştir.

Fakat, takriben bizim hatta tekabül eden Teldberg in Bonn na nazaran, arzdaki şakuli inhirafı, (38 inci sahifede yazılı) $\xi_7 = -4{,}''03 +$ miktarı tashih.

Görülüyorki iki kıymet arasında çok az fark vardır. Tuldeki şakulî inhiraf için, kontrol imkânı mevcut değildir. Yalnız jeodezik şartları ihtiva eden 48muadeleyi tahkik eden tashih miktarlarının murabbaları mecmuu 3,697 dir.

Laplace muadelesinin idhalile, gerek (v) lerin murabbaları mecmuîle, gerekse, $[-wk] = [vv]$ formülüne göre hesap edilen $[vv] = 3{,}799$ dır. Bulunan iki kıymetle, $\mu_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n}}$ düsturuna göre, hesap edilen, bir mevkifde muvazene edilmiş bir istikametin vasatî hatası, veya vezin vahidi kıyasisi vasatî hatası $\mu_0 = \pm 0'',28$ bulunur. Astronomik rasatlar, hatasız olarak muvazeneye idhal olunmalarına rağmen, jeodezik rasadlarda fazla bir tahavvülü mucip olmadılar.

Şimdi, laplace muadelesinin kale alınmasile, jeodezik şebekede hasıl olan tahavvülleri tetkik edelim.

Şebekede mevcut baz şartlarını nazarı itibare almazsak, bu suretle, zikrolunan tahavvülâtı daha doğru bir şekilde elde etmiş oluruz. 48 inci muadele baz şartını ihtiva ettiğinden, yukarıda da zikr olunduğu veçhile, 48 inci korelat dolayısile tashih görmüş olan 47 korelatdan, bu tashih miktarı çıkarılırsa, tetkikatımıza yarayacak olan 47 korelat tevsiini bulmuş oluruz. Baz ve laplace şartı dolayısile, bütün noktaların tahavvüllerini tedkik etmek hayli güç olacak. Halbuki Ubagsberg ve Strassburg arasındaki poligona ait noktalarla, bu poligonun cenuba doğru imtidadındaki istasyonların tahavvülleri, aşağıda izah edileceği şekilde kolaylıkla hesap edilebilir. Zikr olunan noktaların koordineleri (Krüger) usulile üç kerre hesap edildi.

a) 47 şarta göre; yalnız jeodezik şebeke şartlarına göre nokta vaziyetleri.

b) 48 şarta göre; baz şartları kale alındığına göre nokta vaziyetleri.

c) 49 şarta göre; laplace muadelesi kale alındığına göre nokta vaziyetleri.

Binaenaleyh a, ve b nokta vaziyetleri arasında farklar yalnız baz şartları dolayısile hasıl olan nokta kaymasını, ve b, c arasındaki farklar, yalnız laplace muadelesi şartı neticesindeki tahavvülü gösterirler.

Her ne kadar, kayma vektörlerinin tulleri doğru bulunabilirse de, poligonun müsteviye irca edilmesinden dolayi, semtleri ancak takribiyetle hesap olunabilir. Ubagsberg sabit farz edilerek, yapılan hesabat neticesinde, aşağıda yazılı kayma vektörleri bulunmuştur.

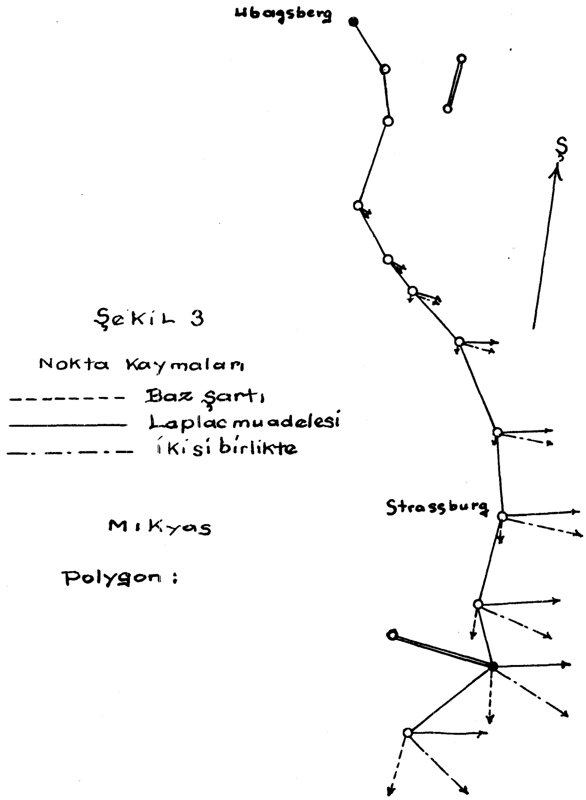
Istasyon	Yflnız baz şartı		Yalnız laplac şartı		İki şart birlikte	
	Tulen cm.	Semt	Tulen cm.	Semt	Tulen cm.	Semt
Ubagsberg	0	—	0	—	0	—
Langshoss	0,3	134°	1,0	128°	1,3	129°
Weisser stein	0,6	162	3,0	107	3,4	116
Muxerath	1,6	192	7,3	118	7,8	129
Loeberg	2,3	183	10,8	103	11,5	115
Hochwald	3,0	180	13,9	96	14,5	107
Höcherberg	4,0	174	19,1	82	19,3	94
Wintersberg	7,0	178	30,5	77	30,0	91
Strassburg	12,0	174	42,1	76	42,2	93
Kaiserstuhl	20,6	177	41,9	77	43,6	105
Belchen	27,6	172	42,0	78	48,6	113
Glaserberg	35,6	186	41,5	78	45,7	127

Aynızamanda Ubagsberg-Strassburg poligonunu teşkil eden zaviye ve dılıların muhtelif şartlar dolayısile tahavvülleri aşağıdaki tabelede görülebilir.

Istasyon	$\delta T_{i,i-1} - \delta T_{i,i+1}$			Dılı	δs cm.		
	geom. şart	Baz şartı	Lapl. şartı		geom. şart	Baz şartı	Lapl. şartı
	″	″	″				
Langschoss	+ 0,40	— 0,01	+ 0,14	Ub.—La.	— 0,6	+ 0.4	+ 1,0
Weisser stein	+ 0,11	— 0,01	+ 0,04	La.—W.Rt.	— 3,6	+ 0,3	+ 0,7
Muxerath	— 0,09	± 0,00	+ 0,04	W.St.—Mu.	— 20,8	+ 1,1	+ 1,9
Loeberg	+ 0,10	— 0,01	+ 0,05	Mu.—Loe.	— 19,0	+ 0,8	+ 1,9
Hochwald	+ 0,10	± 0,00	+ 0,05	Loe.—Ho.	— 11,9	+ 0,5	+ 1,5
Höcherberg	± 0,00	— 0,03	+ 0,12	Ho.—Hö.	— 20,6	+ 0,8	+ 2,1
Wintersberg	+ 0,01	+ 0,05	+ 0,09	Hö.—Wi.	— 25,5	+ 2,6	+ 2,0
				Wi.—Stra.	— 12,2	+ 5,0	— 0,4

Laplace muadelesinin nazarı itibare alınmasile Ubagsberg-Strassburg jeodezi hattı, Ubagsberg noktası etrafında şarka doğru 0″,30 saniye kadar dönmüştür.

İntihap edilen mıkyas dahilinde kabili tersim, kayma vaktorları (Şekil 3) de mubalağa ile gösterilmiştir. Ümid edildiği gibi, baz şartı şebekeyi, baz büyütmeler imtidadı buyunca uzattı, ve



laplace şartı da Ubagsberg noktası etrafında döndürdü. Bazı hususî ahvaldeki tahavvülleri tetkik etmek her halde faideli olacaktır. Ayni zamanda şunu da işaret etmek isterizki; diğer jeodezik şartların tahakkukundan sonra, baz şartı muadelesinin kapanma hatası, yedinci logaritma hanesinde ancak 7 logaritmedir. İkiden fazla baz ve laplace noktası ölçülür, ve kapanma hatalarıda misalimizdekinden fazla bulunursa, tabiatile kaygınlık, daha fazla olacaktır. (4) numaralı muadelede; K_{49} = sabit miktar. W_{49}

Yani laplace korelatı K_{49}, jeodezik şartların tahakkukundan sonra elde edilen laplace kapanma hatasile mebsuten mütenasip artar.

Netice itibarile anlaşılıyorki; Ubagsberg-Strassburg jeodezi hattının dönüklüğü, kale alınan laplace muadelesi (laplace noktaları aralarındaki poligon istenildiği gibi intihap edilebilir) kapanma hatasile mebsuten mütenasiptir. Zira baş tarafda kullanmış olduğumuz rumuzlarla, Krügerin (Beitrage sahife 11) deki

$$\delta T_{1,n} = \delta T_{1,2} + \Sigma a \delta s + \Sigma b v$$

formülünde, a, ve b muayyen bir poligon hattındaki şabit kıymetleri gösteriyor.

1-2 (Ubagsberg-Langschoss) semti doğrudan doğruya, astronomik olarak tayin edilmiştir. Astronomik rasadlara ise miktarı tashih vermediğimiz için $\delta T_{1,2}$ sıfırdır. Kezalik;

$$v = \Sigma c_v K_v \quad (c_v \text{ sabit})$$

$$\log s = \log s_0 + \Sigma (\log \sin \alpha - \log \sin \alpha')$$

Binaenaleyh:

$$\delta s = \frac{s}{\rho''} \Sigma (v \cot \alpha - v' \cot \alpha')$$

$$K_v = K v_0 + z_{49,v} K_{49}$$

$v = 1, 2, \ldots . 49$
$z_{49,}$, ara korelatları
α ve α' de s lerin hesabinda kullanılan müselles zaviyeleri
$K v_0$, 48 ze göre korrelat kıymeti.

δ ve v yalnız laplac muadelesi idhalile hasıl olan tahavvülleri gösteriyor. Binaenaleyh $K v_0 = 0$ dır.

v lar tefazuli olarak nazarı itibara alınırsa bu takdirde $\delta T_{1,n}$, laplace korelatı K_{49} la mebsuten mütenasiptir. Eğer astronomik rasatlara mıktarı tashih verilmezse, bu takdirde $\delta T_{1,n}$ jeodezik şartların tahakkukundan sonraki, laplace muadelesi kapanma hatasile mebsuten mütenasiptir. Şimdi astronomik rasatlara, derecei sıhhatlerinin, jeodezik rasatların derecei sıhhatlerile izafi nisbetlerine göre vezin verildiğini kabul edelim. Ubagsbergin tul ve semt tashih miktarlarını g_L ve g_T ile Strassburg kini de g'_L ve g'_T ile gösterelim.

μ'_T, μ'_L, μ_L, μ_T de mezkûr rasatlara ait vasati hatalar olsun. Şebeke muvazenesinden sonra, muvazene edilmiş bir istikametin vasati hatasını vezin vahidi kıyasisi olarak kabul, ve μ_0 ile gösterelim. Binaenaleyh:

$$g_L = \frac{\mu_0^2}{\mu_L^2} \cdot \qquad g_T = \frac{\mu_0^2}{\mu_T^2}$$

Keza ayni şekilde üslü kıymetlerin vezinleri ifade edilebilir. Evvelcede zikr olunduğu veçhile, yalnız jeodezik şebeke muvazenelerinden sonra v ların murabbaları mecmuu 3.607 dir; bu suretle $\mu_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{48}}$ formülüne göre:

$$\mu_0^2 = 0{,}077 \qquad \mu_0 = \pm\, 0'',28 \qquad \text{bulunur.}$$

Astronomik rasatların vasati hatalarını (H. v. şakuli inhiraf) esasına müsteniden hesap edelim.

Derecei sıhhatleri şüpheli oldukları için vezinleri onda hanesile gösterirsek:

$$\mu_L^2 = 0{,}13 \qquad \mu_L'^2 = 0{,}24$$

Binaenaleyh:

$$g_L = 0{,}6 \qquad g'_L = 0{,}3 \qquad \text{olur.}$$

Ubagsberg-Langschoss semti vasati hata murabbaını (H. v. Lotabweichung sahife 64) den alalım.

$$\mu_T^2 = 0{,}64 + 0{,}28 = 0{,}92$$

Strassburg semti çok eskiden rasat edildiği için (1863), keza bu semtin vasati hata murabbaı için de yukarıda yazılı kıymeti kabul edelim, yani:

$$\mu_T'^2 = 0{,}92 \qquad \text{bu ruretle:}$$

$$g_T = 0{,}1 \qquad g'_T = 0{,}1 \qquad \text{bulunmuş olur.}$$

Şimdi malûm olan vezinlerle yapacağımız hesabı, ancak laplace muadelelerile hasıl olacak nokta kaygınlıkları hususunda umumi bir fikir edinecek şekilde yürütelim.

Kabul edilen vezinler dolayısile, dört yeni korelat muadelesi meydana çıkar, bu muadeleleri evvelkilere ilâve etmek lâzımdır.

$$g_L \ \delta L'_2 = -\ 0{,}750\ K_{49}$$
$$g'_L \ \delta L'_{27} = +\ 0{,}750\ K_{49}$$
$$g_T \ \delta T'_{2.5} = +\ 0{,}999\ K_{49}$$
$$g'_T \ \delta T'_{27.28} = -\ 1{,}000\ K_{49}$$

Bu muadelelerde vezinler yerlerine, yukarda hesap edilmiş olan kıymetlerini koyarsak:

$$\delta L'_2 = -\ 1{,}250\ K_{49}$$
$$\delta L'_{27} = +\ 2{,}500\ K_{49}$$
$$\delta T'_{2.5} = +\ 9{,}990\ K_{49}$$
$$\delta T'_{27.28} = -\ 10{,}000\ K_{49}$$

Korelat muadelelerile, laplace şart muadelesini tahvil suretile bulunan normal muadelede «Formül 3», yalnız murabba haddinin emsali değişiyor. Çünki ilâve edilen korelat muadelelerinde yalnız 49 korelatı mevcuttur. Bu suretle yeni emsal 22,79251 olur. $Z_{49.v}$ ve W_{49} hiç değişmez. Bolz e göre irae tarzile 4 numaralı $AK + W = 0$ müsavatı;

$$27{,}12296\ K_{49} + 0{,}66554 = 0 \qquad \text{buradan da;}$$
$$K_{49} = -\ 0{,}02454 \qquad \text{ve (8) ze göre de;}$$
$$\delta L'_2 = +\ 0'',03 \qquad \delta T'_{2.5} = -\ 0'',25$$
$$\delta L'_{27} = -\ 0'',06 \qquad \delta T'_{27.28} = +\ 0'',25$$

Şimdi astronomik rasadlara bir defa namütenahi, ve bir de yukarıda yazılı vezinler verildiğine göre, nazarı itibara alınan laplac muadelesinin tesirlerini mukayese edelim. Fazla hesap yapmamak için yalnız Ubagsberg-Strassburg jeodezi hattının dönüklüğünü mukayese ile iktifa edelim.

(5) ve (6) ya nazaran, yalnız laplace müsavatına göre $T'_{2.27}$ semtinin tahavvülü;

$$\delta T'_{2.27} = \delta T'_{2.5} + \text{sabit miktar. } K_{49} \quad . \; . \; . \; . \; (10)$$

Nihai gL ... ilâh vezinleri nazarı itibara alındıkları takdirde; 10 numaralı müsavattaki ikinci haddin azalma nisbeti, K_{49} azalmasile mütenasiptir. Misalimizde azalma nisbeti $\frac{1}{6,3}$ dir. Astronomik rasatlar hatasız olarak kabul edildiğine göre, jeodezik hattın semt tahavvülü — 0",30 saniye olarak bulunmuştur. Halbuki şimdi;

$$\delta T'_{2.27} = -0'',25 - \frac{0'',30}{6,3} = -0'',30$$

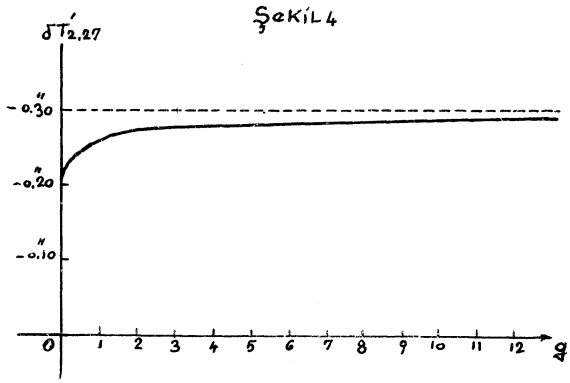
Binaenaleyh Ubagsberg-Strassburg jeodezi hattının dönüklüğü evvelce hesap edilmiş olan dönüklüğün aynıdır. Yalnız bu sefer miktarı tashihlerin dağılışı değişmiştir. Astronomik rasatlara muayyen vezin verildiği takdirde, jeodezik rabıt hattının dönüklüğü, umumiyetle ilk semtin tahavvülüne tabi olacaktır. Bu suretle de şebeke heyeti umumiyesile birden dönecektir. Halbuki astronomik rasatlar hatasız olarak kabul olunursa, bu takdirde, esas itibarile iki laplace noktasının jeodezik rabıt hattına yakın olan noktaların dönüklükten müteessir olacakları anlaşılıyor.

Kolaylık olması için, bütün astronomik rasatlara, ayni g veznini vererek $\delta T'_{2.27}$ yi hesap edersek;

$$\delta T'_{2.27} = \frac{-W + A_0 \,.\, r.\, g.}{(2 + \sin^2 B_{27}) + A_0 .\, g.}$$

Yukarıda yazılı düsturda, astronomik rasatlar hatasız kabul olunduğuna göre, (r) ile jeodezik rabıt hattının dönüklüğü, (A_0) ile laplace muadelesinin murabba haddi emsali ve W ile de muaddel kapanma hatası gösterilmiştir. g ye sıfır ile $+\infty$ arasında kıymetler verirsek 11 numaralı muadele g. için $\frac{-W}{2 + \sin^2 B_{27}}$ (misalimizde 0",21) de başlayan ve r kıymetine (misalimizde — 0",30) mücanibi olarak yaklaşan bir kat'i zait kolu parçasını irae ediyor.

(Şekil 4). Eğer g_T ile g_L arasında fazla bir farkvarsa, bu takdirde $\delta T'_{2.27}$ ile astronomik vezinler arasındaki münasebeti irae etmek kolay bir şey değildir. Ekseriya g_T ve g_L bir birinden çok farklı olmadıkları cihetle, $\delta T'_{2.27}$ zikredilen iki had dahilinde kalır



Verilen izahattan anlaşılıyorki, laplace muadelesi nazarı itibara alındığı takdirde, iki laplace noktası arasındaki jeodezik hattın dönüklüğü, astronomik rasatlara verilen muhtelif vezinler dolayısile çok az değişmektedir. Bu vaziyet ise bilhassa nazarı dikkati celbediyor. Yani astronomik rasatlara küçük vezin verildiği takdirde, tesirlerinin de o nisbette azalacağı kanaati hasıl oluyor.

Jeodezik şartların tahakkukundan sonra, jeodezik rasatların hatasız oldukları kabul edilse ($g_{astr.} = 0$) ve astronomik rasadlara tashih miktarları verilse bu takdirde dahi, Ubagsberg-Strassburg jeodezi hattının dönüklüğü 0",21 saniye oluyor. Bu dönüklük ise, astronomik rasatlar hatasız olarak kabul olundukların göre, laplace şart muadelesinin nazarı itibara alınmasile hasıl olan dönüklük miktarının $\frac{2}{3}$ çüdür. Fakat bu dönüklük tabiatile, şebeke noktalarının koordine hesabı için kullanılan başlangıç semtinin değişmesinden tevellüt ediyor, yani bu suretle şebeke heyeti umumiyesile birlikte Ubagsberg noktası etrafında dönüyor.

Yazımızdan esas gaye, bir birinden uzakta bulunan laplace noktaları arasındaki laplace kontrol müsavatlarının şart muadelelerine göre yapılan jeodezik şebeke muvazenelerine nasıl idhal olunabileceğini göstermektir. Zikrolunan muvazene için Bolz usulü kullanılırsa, bu takdirde tedricen yapılacak olan hesap tarzını istediğimiz gibi tanzim edebileceğimizden, baz ve laplace şartları tesirlerini ayrı ayrı tetkik edebiliriz. Eğer müteaddit laplace noktaları mevcutsa, ve laplace muadelelerinde şakuli inhirafa tabi olan hadlerden sarfı nazar edilemezse, bu takdirde muvazene neticesini kâmilen, mebde olarak alınan noktanın şakuli inhiraf mürekkiplerile hattî tabi şeklinde göstermek mecburiyetinde kalacağımızdan hesabat çok muğlaklaşır. Fakat yine izah etmiş olduğumuz usulü esas itibarile tatbik etmek mümkündür.