

**ROBUST M-KESTİRİMLERİN GPS AĞLARINDAKİ UYUŞUMSUZ BAZ
VEKTÖRLERİNİ BELİRLEMEDE KARŞILAŞTIRILMASI**
(COMPARISON OF ROBUST M-ESTIMATIONS IN DETERMINATION OF THE
OUTLYING BASELINE VECTORS IN GPS NETWORKS)

Ertan GÖKALP, Yüksel BOZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi,
Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü, Trabzon
email:ertan@ktu.edu.tr

ÖZET

En küçük karelere dayalı parametre tahmin yöntemleri, varsayılan hata dağılımı olan normal dağılımdan gösterilecek olası değişimlere duyarlıdır. Bu nedenle, en küçük kareler kestirimi istatistiksel olarak robust (sağlam) değildir. Ölçme ile ilgili verilerin işlenmesinde ilk olarak 1967 yılında Krarup ve Kubik tarafından kullanılmış olan robust kestirim, o günden sonra dengeleme işlemlerinde geniş kullanım kazanmıştır. İstatistiksel testler aracılığıyla uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesini ve sonrasında ölçü kümesinden çıkarılmasını hedefleyen geleneksel yöntemlerden farklı olarak; robust yöntemler, ölçülerin dengelenmesi işleminde her bir yineleme sonrası olası uyuşumsuz ölçülerin ağırlıklarını azaltmakta veya sıfır yapmaktadır. Sonuçta, ölçü ağından herhangi bir ölçü atmaksızın uyuşumsuz ölçüler toplu olarak görülebilmektedir. Robust yöntemler, jeodezik ağ türlerinin tümüne uygulanabilen yöntemlerdir. Bu çalışmada, literatürde sıkça karşılaşılan robust yöntemlerden, Danimarka Yöntemi, Huber, Beaton-Tukey ve Andrews'ın M-Kestirimi ile bu yöntemlere nazaran daha yakın tarihlerde tanımlanan IGG (Institute of Geodesy and Geophysics) ve IGGIII M-Kestirimi'nin bir jeodezik ağ türü olan GPS ağlarındaki uyuşumsuz baz vektörlerini belirlemedeki davranışları incelenmiştir. Sonuçta IGGII M-Kestirimi ile sınır değer parametreleri hesapla bulunan Danimarka Yöntemi ve Huber'in M-Kestirimi'nin diğer yöntemlere göre daha güvenilir sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

ABSTRACT

Least Squares (LS) based parameter estimation methods are sensitive to the deviations of the observation errors from the assumed distribution, normal distribution. Therefore, LSE is not distributionally robust. Robust estimation was firstly used by Krarup and Kubik in evaluation of surveying data and subsequently has gained wide use in adjustment processes. After each iteration step of an adjustment process, robust methods reduce or make zero the weights of the outlying observations unlike the conventional methods, which determine the outliers by means of the statistical tests and remove them from the observation set. At the end of the robust methods, no observation is removed from the network and all the outliers are obtained in cooperation. Robust methods can be applied to all geodetic networks. In this paper, the behaviors of the frequently used robust methods in the literature such as Danish method, Huber's M-Estimation, Beaton-Tukey's M-Estimation, Andrews's M-Estimation, and also IGG (Institute of Geodesy and Geophysics) M-Estimation and IGGIII M-Estimation, which were defined close to date, are investigated in determination of the outlying baseline vectors in the GPS networks. It has been observed that in addition to IGGIII M-Estimation,

Danish method and Huber's M-Estimation yield more reliable results than the other methods when the critical values of both are obtained by calculation.

1. GİRİŞ

Jeodezik ölçülerde ölçümü yapan kişilerden, kullanılan aletlerden ve çevre koşullarından dolayı ortaya çıkan hatalar büyüklük ve özellikleri bakımından farklılıklar gösterirler. Ölçülerdeki farklılıklara neden olan bu etkiler sebebiyle ortaya çıkan hatalar, özelliklerine göre sistematik, kaba ve rasgele hatalar olarak sınıflara ayrılırlar. Sistematik hataların modellenebilmesi ve kaba hataların giderilmesi, bu hataların ölçüler üzerindeki etkilerini engellese bile rasgele ölçü hatalarının jeodezik ölçüler üzerindeki etkilerini gidermek mümkün değildir. Ölçülerde bulunan bu rasgele hataların normal dağılımda oldukları varsayılır. Normal dağılımdan sapan rasgele hataların bulunduğu ölçüler '**uyuşumsuz ölçüler**' olarak nitelendirilirler. Uyuşumsuz ölçülerin varlığı en az birkaç yüz yıldır bilinmektedir. Legendre, 1805 yılında en küçük kareler (EKK) üzerine yayımlanan ilk çalışmada, doğruluğu artırmak ve hataları azaltmak için uyuşumsuz ölçülerin reddedilmesinden açıkça bahsetmiştir /15/.

Uyuşumsuz ölçü araştırması, istatistiksel ilgi konularının ilklerindedir. Hemen hemen tüm veri kümelerinin değişen oranlarda uyuşumsuz ölçü içermelerinden dolayı da en önemli araştırma konularından biri olmayı sürdürmektedir. Uyuşumsuz ölçüler bazen göze çaracak şekilde istatistiksel analizleri bozabilirken, bazen de etkileri fark edilmeyebilir. Ölçü ağının en önemli gözlemleri uyuşumsuz olabilir /6/. İstatistikçiler buna dayanarak uyuşumsuz ölçülerin davranışları ve belirlenmeleri için çok sayıda algoritma geliştirmişlerdir. İlk geliştirilen algoritmalar, EKK kestirimini kullanan ve geleneksel (klasik) yöntemler olarak adlandırılan istatistiksel testlere dayalı algoritmalarlardır. Uyuşumsuz ölçülerin dengeleme modeli üzerindeki etkilerini azaltmak ve gidermek amacıyla geleneksel yöntemlerden sonra robust (sağlam) kestirim yöntemleri geliştirilmiştir. Robust yöntemlerde, geleneksel yöntemlerde meydana gelen ağ distorsiyonu gibi bir olumsuzluk söz konusu değildir. Gerçekleştirilen yinelemeler sonrasında ağdan ölçü atılmamakta, ölçü ağırlıkları değiştirilmektedir. Ölçülere ait düzeltme/standartlaştırılmış düzeltme değerleri seçilen bir c sınır değeri ile karşılaştırılarak ölçülere 0-1 arasında değişen robust ağırlıklar verilmekte ve bu ağırlıklardan yararlanarak ölçü ağırlıkları elde edilmektedir. Yineleme adımları sonrasında uyuşumsuz ölçülerin ağırlıklarının giderek küçüldüğü hatta sıfıra gittiği, diğer ölçülerinse ağırlıklarında değişme olmadığı gözlenmektedir. Bu şekilde, robust yöntemler uyuşumsuz ölçülerin parametre kestirimi üzerindeki etkilerini azaltmaktadırlar.

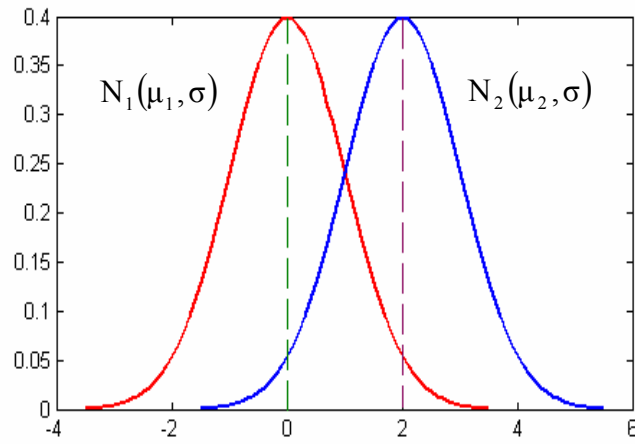
Robust kestirim yöntemlerinin jeodezik uygulamalarda (deformasyon ölçmeleri, fotogrametrik çalışmalar, vb.) geniş bir kullanım alanı olmasına rağmen, yöntemlerin uygulanmasında çok önemli olan sınır değer parametresinin uygun seçilememesi riski vardır. Sınır değer ne kadar doğru seçilirse, kullanılan robust yöntemden o kadar doğru sonuçlar elde edilir.

2. UYUŞUMSUZ ÖLÇÜLERİN MODELLENMESİNDE KULLANILAN MODELLER

Uyuşumsuz ölçü belirleme çalışmaları temelde iki ayrı model dikkate alınarak gerçekleştirilmektedir. Bu modeller, ‘mean-shift (ortalama öteleme)’ ve ‘variance inflation (varyans artırımı)’ modelleridirler.

a. Ortalama Öteleme Modeli

Tüm gözlemler aynı varyansa sahip farklı dağılım sergilerler, fakat uyuşumsuz ölçüler diğer ölçülerden farklı bir beklenen değere sahiptir (Şekil 1). Bu modelde, uyuşumsuz ölçüler istatistiksel test teorisi kullanılarak adım adım belirlenirler.



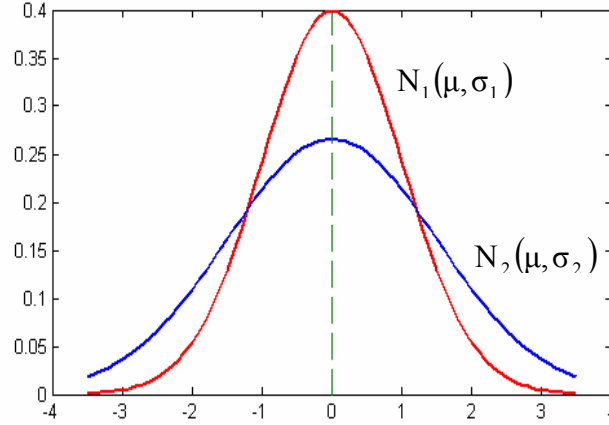
Şekil 1: Ortalama öteleme modeli

Modelin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(\ell; \mu_1, \mu_2, \sigma, \alpha) = (1 - \alpha) f_1(\ell; \mu_1, \sigma) + \alpha f_2(\ell; \mu_2, \sigma) \quad (1)$$

Burada; α parametresi uyuşumsuz ölçülerin oranını ($0 < \alpha < 0.5$) göstermektedir. μ_1 ve μ_2 değişkenleri farklı beklenen değerleri, σ ortak varyansı ve ℓ ölçü değerlerini göstermektedir /11/.

b. Varyans Artırım Modeli



Şekil 2: Varyans artırım modeli

Uyuşumsuz ölçü, diğer ölçülerle aynı beklenen değere fakat farklı varyansa sahip bir dağılım fonksiyonuna sahiptir (Şekil 2). Bu modelde, uyuşumsuz ölçülerin etkisi bu ölçülere küçük ağırlıklar verilerek azaltılır. Modelde, yinelemeli yeniden ağırlıklandırılmalı en küçük kareler çözümü kullanılır.

Modelin olasılık dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(\ell; \mu, \sigma_1, \sigma_2, \alpha) = (1 - \alpha) f_1(\ell; \mu, \sigma_1) + \alpha f_2(\ell; \mu, \sigma_2) \quad (2)$$

Burada; m ortak beklenen değeri, σ_1 ve σ_2 farklı varyansları ve ℓ ölçü değerlerini göstermektedir. Artırılan σ_2 varyansı, σ_1 varyansından daha büyüktür /11/.

3. GPS FAZ ÖLÇÜLERİNDEN TÜRETİLEN BAZ VEKTÖRÜ BİLEŞENLERİNİN DENGELENMESİ

GPS temel olarak, konumu bilinmeyen yer istasyonlarına yerleştirilen alıcılar ile, konumları bilinen GPS uydularına olan uzaklıkların ölçülmesi ile çalışır. Bu yüzden, kavramsal olarak GPS ölçüsü, konumu bilinmeyen bir istasyon noktasından birkaç kontrol noktasına Elektronik Uzaklık Ölçer (EUÖ) aleti kullanılarak uzaklıkların ölçüldüğü geleneksel kenar ağlarına benzer. Elbette GPS ile konum belirleme ve geleneksel geriden kestirme arasında bazı farklılıklar vardır. Bu farklılıklar arasında uzaklıkların ölçülme şekli ve GPS çalışmasında kullanılan kontrol noktalarının uydular olması söylenebilir.

Uygulamada, taşıyıcı dalga fazları ölçülerek gerçekleştirilen ölçülerde, normalde yer istasyonlarına yerleştirilmiş iki veya daha fazla alıcı kullanılarak 4 veya daha fazla uydu eş zamanlı olarak gözlemlenir. Ayrıca, gözlemler birkaç kez tekrarlanır. Bu durum, bir çok fark alma kombinasyonlarının hesaplanabileceği yeterli redundanzta gözlemler oluşmasına neden olur. Adı geçen, taşıyıcı dalga faz ölçülerinde kullanılan fark alma teknikleri, üzerlerinde alıcılarla gözlem yapılan noktalar için doğrudan konum bilgisi üretmezler. Konum bilgisi yerine, baz vektörleri (istasyonlar arasında vektör uzaklıkları) belirlenir. Bu baz vektörleri,

aslında koordinat bileşenleri farkı ΔX , ΔY ve ΔZ şeklinde hesaplanırlar. Bu koordinat farkları, üç boyutlu referans dik koordinat sisteminde belirlenirler /17/.

4. ROBUST KESTİRİM VE ROBUSTNESS (SAĞLAMLIK) KAVRAMI

En küçük kareler yöntemine dayalı kestirim yöntemleri, hataların varsayılan dağılımı olan normal dağılımdan gösterecekleri olası değişimlere duyarlıdır. Bu nedenle, en küçük kareler kestirimi dağılımsal olarak robust (sağlam) değildir. Robustness (sağlamlık) terimi, ilk olarak Box (1953) tarafından kullanılmıştır. J. W. Tukey liderliğinde, Princeton İstatistiksel Araştırma Grubu'nun (Princeton Statistical Research Group) 1940'ların sonlarında, klasik metotların robust alternatiflerini bulmak için gerçekleştirdikleri çalışmalar da sağlamlık üzerine ilk çalışmalar arasındadır /9/.

Robust kestirim, ölçme ile ilgili verilerin işlenmesinde ilk olarak 1967 yılında Krarup ve Kubik tarafından kullanılmıştır ve o günden sonra dengeleme işlemlerinde geniş kullanım kazanmıştır. Huber, 1981 yılında, "sağlamlık, varsayımlardan olan küçük sapmalara karşı duyarsızlığı ifade eder." tanımını yapmıştır. Yaygın olarak kullanılan model varsayımları, rasgele hataların normallik ve doğrusallık özellikleridir. Sağlamlıkla ilgili tek bir ölçüt bulunmadığından, tek bir robust yöntem veya en azından diğerlerine göre en iyi diyebileceğimiz bir robust yöntem mevcut değildir. Bunun bir sonucu olarak da, en küçük kareler yönteminin uygulama bilimlerinde sahip olduğu yaygınlığa sahip herhangi bir robust kestirim yöntemi mevcut değildir.

Modern robust yöntemlerinde temel olarak üç ölçüt bulunmaktadır: Niteliksel sağlamlık (qualitative robustness), sonsuz küçük sağlamlık (infinitesimal robustness) ve niceliksel sağlamlık (quantitative robustness). Sonuncu ölçüt, bir kestiricinin kırılma noktası ile ilişkilidir. Niceliksel sağlamlık, kırılma noktasının limit değeri olarak düşünülebilir. Örneğin, örnek kümenin ortalamasının kırılma noktası $1/n$ dir ve örnek kümenin boyutu sonsuza yaklaştığında kırılma noktası da sıfıra yaklaşır. Bu limit değer, popülasyonun ortalamasının kırılma noktasıdır. Kırılma noktası, nicel sağlamlığın sayısal bir ölçüsüdür. Diğer iki kriterin (niteliksel ve infinitezimal sağlamlık), ifadeleri biraz daha zordur. Bu kriterlerin esası, bir olasılık eğrisindeki küçük değişimlerin, popülasyon parametrelerinin değerlerini nasıl etkilediğinin ölçülmesidir.

Robust kestirimler için birçok ağırlık fonksiyonu geliştirilmiştir. Ancak, ağırlık fonksiyonlarının çoğu kuramsal tabana sahip değildir. Diğer bir ifadeyle, bu fonksiyonların çoğu deneyseldir. Robust kestirim için, düzeltme değeri artarken ağırlık fonksiyonu değerinin azaldığı bir ağırlık fonksiyonu kullanılabilir. Fonksiyonun uygulanabilirliği, sadece sayısal deneylerle gösterilebilir, teorik olarak izah edilemez. Bunun temel nedeni, robust kestirimin sağlamlık ölçüsünün tek bir ölçütle ifade edilememesidir /8/.

Jeodezik uygulamalarla kazanılan deneyimler korelasyonlu gözlemlerle çok sık karşılaştığını göstermiştir. GPS ölçüleri de korelasyon içeren gözlemler arasında bulunmaktadır. Değişik korelasyon türleri vardır, örneğin, geometrik korelasyon, fiziksel korelasyon, istatistiksel korelasyon vb.. Bu tür korelasyonların temel kaynağı, gözlemlerin geometrisi, fiziksel koşullar ve istatistiksel yöntemlerdir. Bu yüzden gözlemler arasındaki korelasyon, ölçme projelerinin tasarımını, ölçü yöntemlerini ve gözlemlerin fiziksel

koşullarını yansıtır. Veri işleme aşamasında, bu korelasyonlar dikkatli bir şekilde hesaba katılmalıdır /18/.

Literatürde en sık karşılaşılan robust kestiriciler, üç ana başlık altında toplanırlar. Bunlar, M, L ve R kestiricileridirler /9, 13/. L-Kestiricileri, derece istatistiklerinin doğrusal kombinasyonlarıdır. Parametre kestirimi ile ilgili bazı problemlere uygulanabilseler de, en çok merkezi değer ve merkezi eğilim problemlerine uygulanabilirler. Doğrusal modeller için dikkate alınırlar. R-Kestiricileri, rank testlerine dayalı kestirimlerdir. Gözlemlerin rankları, monoton dönüşümlerin büyük bir kısmında değişmezler. Bu değişmezlik özelliği, rank tabanlı testlerin uyumsuz ölçülere ve diğer dağılımsal sapmalara karşı sağlamlığıyla sonuçlanır. Sağlamlık bakış açısıyla, rank testleri global olarak robust, M- ve L-Kestiricileri genellikle lokal olarak robustturlar. M-Kestiricileri, bu üç sınıf arasındaki en esnek kestiriciler olarak göze çarparlar. Maximum likelihood (ML) kestiricilerin de tanımlandığı çeşitli modeller için tanımlanırlar. M-Kestiriciler, ML ve EKK kestiricilerini de kapsarlar. Ayrıca, parametre kestirimi için en uygun kestirici sınıfıdır /9, 14/. Kaba hatalı jeodezik gözlemlerin ayıklanmasında bunların arasında en uygun olanı M-kestirimidir. ML kestirim tekniğiyle eşdeğer olan M-Kestiriminde, yöntemin uygulandığı gözlemlerin normal dağılımda olması gereklidir /10/. Birçok jeodezik problem için istatistiksel irdemeyi gerektiren bilgilerin normal dağılımda olması bu şartı sağlamaktadır. Ayrıca, jeodezik verilerin bilinen yöntemlerle irdelenmesinde kullanılan matematik modeller, Gauss-Markoff doğrusal denklem sistemleri şeklindedir. Bu özellikler, M-kestiriminin matematik özelliklerine de uygun düşmektedir /4/. M-Kestirimlerinin kırılma noktaları, u bilinmeyen sayısı olmak üzere $1/(u+1)$ olarak verilmektedir /1/.

5. ROBUST M-KESTİRİMİ VE UYUŞUMSUZ ÖLÇÜLERİN BELİRLENMESİ

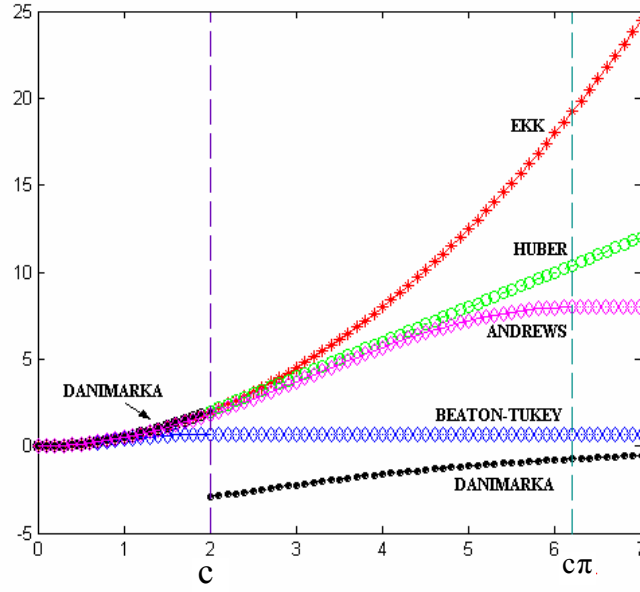
M-kestiriminde düzeltmelere ait bir $\rho(v)$ fonksiyonu amaç fonksiyonu olarak seçilir ve bu amaç fonksiyonunun minimum olması amaçlanır. En küçük kareler kestiriminde, $\rho(v) = \sum_{i=1}^n P_i v_i^2 = \min$ olduğundan dolayı, bu kestirim M-kestiriminin özel bir halidir. M-kestiriminde kullanılan matematik model, en küçük kareler yöntemindeki gibi ağırlık parametreleri yönünden değişmez bir yapıda değil, aksine bütün yineleme adımları için değişken bir yapıdadır. M-kestiriminin hesap işlemleri iteratif yeniden ağırlıklandırılmalı en küçük kareler yöntemi ile eşdeğerdir /7, 16/.

Amaç fonksiyonu $\rho(v)$ olmak üzere, amaç fonksiyonunun düzeltmelere göre türevinin alınması ile aşağıda gösterilen etki fonksiyonu elde edilir.

$$\psi(v) = \partial \rho(v) / \partial v \quad (3)$$

Etki fonksiyonunun düzeltmelere bölünmesiyle de aşağıdaki ağırlık fonksiyonu elde edilir.

$$w(v) = \psi(v) / v \quad (4)$$



Şekil 3: Değişik robust kestirimlerin ve en küçük kareler kestiriminin amaç fonksiyonlarının düzeltmelere göre değişimi

Şekil 3, EKK ve değişik robust kestirimlerinin ölçü düzeltmelerine göre değişimlerini göstermektedir. Şekildeki c ve $c\pi$ değerleri sınır değerleri göstermektedir. Şekilde de görüldüğü gibi, Danimarka yönteminin amaç fonksiyonunun sürekli ve konveks olmaması bu yöntemi diğer yöntemlerden ayırmaktadır. Danimarka yöntemi robust bir yöntem olmaktan çok iteratif ağırlıklandırılmalı bir yöntem olarak anılmaktadır.

Kestirim işlemi aşağıdaki gibi gerçekleştirilir:

$$\bar{P}_i = P w_{i-1} \quad (5)$$

Robust ağırlık matrisinin ilk iterasyon değeri olarak $w_0 = I_{n \times n}$ birim matris alınır.

$$A^T \bar{P} v = 0 \quad (6)$$

$$x_i = (A^T \bar{P}_i A)^{-1} A^T \bar{P}_i l \quad (7)$$

$$v_i = A x_i - l \quad (8)$$

Burada, n ölçü sayısı, u bilinmeyen parametreler sayısı olmak üzere; $\bar{P}_{n \times n}$ eşdeğer ağırlık matrisi, $P_{n \times n}$ ölçülerin ilk ağırlık matrisi, $w_{n \times n}$ robust ağırlık matrisi, $A_{n \times u}$ katsayılar matrisi, $v_{n \times 1}$ düzeltmeler vektörü, $x_{u \times 1}$ dengeleme bilinmeyenleri vektörü, $l_{n \times 1}$ ötelenmiş ölçüler vektörü ve i iterasyon sayısıdır. İterasyona x_{i+1} ve x_i parametreleri arasındaki fark anlamsız sayılacak bir değere gelinceye kadar devam edilir. İterasyonlar sonucunda uyumsuz ölçülerin, \bar{P} eşdeğer ağırlık matrisindeki karşılıkları olan ağırlıkların her iterasyon sonrasında

küçüldükleri, hatta bazılarının sıfıra gittiği gözlemlenir. Normal gözlemlerin ağırlıklarında ise iterasyonlar sonucunda bir değişim olmaz.

Yukarıdaki ifadelerden de anlaşıldığı gibi, gözlemler hakkında uyumlu veya uyumsuz olduklarına dair karar vermede eşdeğer ağırlık matrisinden yararlanılmaktadır. Eşdeğer ağırlık matrisinin elde edilmesinde (5) eşitliğinden görüldüğü gibi, robust ağırlık matrisleri kullanılır. Bu ağırlık matrisleri, ölçülere ait düzeltme değerlerinin, seçilen sınır değer veya değerleri ile karşılaştırılmalarıyla elde edilirler.

Literatürde genellikle, $1.5s_0$, $2s_0$ (s_0 : önsel standart sapma) gibi tecrübelerle dayalı sabit değerler verilen sınır değerler hesap yoluyla da bulunabilirler.

a. Bazı Robust Kestirimlerin Ağırlık Fonksiyonları

(1) Andrews'ın M-Kestirimi

$$w_i = \begin{cases} \sin(v_i/c)/(v_i/c) & |v_i| \leq c\pi \\ 0 & |v_i| > c\pi \end{cases} \quad (9)$$

(2) Huber'in M-Kestirimi /5, 7/

$$w_i = \begin{cases} 1 & |v_i| \leq c \\ \frac{c}{|v_i|} & |v_i| > c \end{cases} \quad (10)$$

(3) Beaton-Tukey'in M-Kestirimi /5/

$$w_i = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 \right]^2 & |v_i| \leq c \\ 0 & |v_i| > c \end{cases} \quad (11)$$

(4) Danimarka Yöntemi

$$w_i = \begin{cases} \exp\left(-\frac{v_i^2}{c^2}\right) & |v_i| > c \\ 1 & |v_i| \leq c \end{cases} \quad (12)$$

c sınır değeri olarak $2s_0$ (s_0 : önsel standart sapma) önerilmektedir /2, 3/.

(5) IGG (Institute of Geodesy and Geophysics) M-Kestirimi

$$w_i = \begin{cases} 1 & |v'_i| \leq c_0 \\ \frac{c_0}{|v'_i|} \left(\frac{c_1 - |v'_i|}{c_1 - c_0} \right)^2 & c_0 < |v'_i| \leq c_1 \\ 0 & |v'_i| \geq c_1 \end{cases} \quad (13)$$

Burada, $v'_i = v_i/s_0$, $c_0 = 1.0 \sim 1.5$ ve $c_1 = 2.5 \sim 3.0$ olacak şekilde seçilir /5/.

(6) IGGIII M-Kestirimi

IGGIII (Institute of Geodesy and Geophysics III) şeması, M-kestirimi ve eşdeğer ağırlık prensibine dayanarak kurulmuştur. IGGIII şemasının robust kestiricisi en küçük kareler kestiricisi ile aynı ifadeye sahiptir. Hesaplaması ve hata etkisi analizi basit ve kalite kontrolü etkilidir. IGGIII şemasının eşdeğer ağırlık matrisi, parametre kestirimlerinin robust (sağlam) olması gerektiğini vurgulamaktadır. Bununla birlikte, eşdeğer ağırlık matrisinin simetrisi ihmal edilir.

$$w_i = \begin{cases} 1 & |\tilde{v}_i| \leq c_0 \\ \frac{c_0}{|\tilde{v}_i|} & c_0 < |\tilde{v}_i| \leq c_1 \\ 0 & |\tilde{v}_i| > c_1 \end{cases} \quad (14)$$

Burada, $\tilde{v}_i = \frac{v_i}{s_{v_i}}$ standartlaştırılmış düzeltmeleri göstermektedir. $c_0 = 2.0 \sim 3.0$ ve $c_1 = 4.5 \sim 8.5$ olacak şekilde seçilir /18/.

b. Robust Kestirimler İçin Sınır Değer Parametresinin Hesaplanması

Robust yöntemlerin doğru ve güvenilir sonuçlar vermesi için dikkat edilmesi gereken en önemli noktalardan biri, düzeltme değerlerinin karşılaştırıldığı sınır değer parametrelerinin mümkün olduğunca doğru bir şekilde belirlenmesidir. Literatürde kullanılan değişik robust ağırlık fonksiyonlarının elemanlarının belirlenmesinde farklı sınır değerlerden yararlanılması sabit bir sınır değer var olmadığının göstergesidir. Sınır değer, gözlem hatalarının belirli bir olasılıkla $\pm c$ sınırları içinde dağılmış olacağı varsayımına bağlı olarak ortaya çıkmaktadır. σ ölçü kümesini temsil eden önsel bir değer olmak üzere, $c = k\sigma$ olarak düşünülebilir /19/. $|v_i| \leq c$ yerine, $|v_i|/s_{v_i} \leq k$ şeklinde düzeltmelerin standartlaştırılmış değerleri alınabilir.

$H_0 : E(v) = 0$ sıfır hipotezinin geçerli olması için

$$|v_i|/s_0 \sqrt{Qv_{ii}} \leq t_{f, 1-\alpha_0/2} \quad (15)$$

olmalıdır. Burada, s_0 birim ağırlığın standart sapması, $Q_{vv_{ii}}$ düzeltmelerin ters ağırlık matrisinin i . düzeltmeye karşılık gelen köşegen elemanı, $t_{f,1-\alpha_0/2}$ t dağılımının f serbestlik derecesindeki tablo değerini göstermektedir. (15) ilişkisinden yararlanarak sınır değer ifadesi:

$$c_i = s_0 \sqrt{Q_{vv_{ii}}} t_{f,1-\alpha_0/2} \quad (16)$$

şeklinde her bir ölçü düzeltmesi için hesaplanır. Gözlemlerin ağırlıklarının farklı olması durumunda (16) eşitliği aşağıdaki hale gelir.

$$c_i = s_0 \sqrt{Q_{vv_{ii}}} \sqrt{P_{ii}} t_{f,1-\alpha_0/2} \quad (17)$$

Robust yöntemlerde, ilk iterasyondan sonraki sınır değer ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$c_i = s_0 \sqrt{Q_{vv_{ii}}} \sqrt{\bar{P}_{ii}} t_{f,1-\alpha_0/2} \quad (18)$$

Burada, \bar{P}_{ii} ifadesi, eşdeğer ağırlık matrisinin i . köşegen elemanını göstermektedir. Global testin test büyüklüğü ifadesinin merkezci F dağılımına uyduğu göz önünde bulundurulursa,

$$T = \frac{m_0^2}{s_0^2} = F_{f_0, f_1, 1-\alpha/2} \quad (19)$$

eşitliğinden yararlanılarak (17) ve (18) eşitlikleri aşağıdaki şekilde düzenlenerek de sınır değer hesabı yapılabilir.

$$c_i = \frac{m_0}{\sqrt{F_{f_0, f_1, 1-\alpha/2}}} \sqrt{Q_{vv_{ii}}} \sqrt{P_{ii}} t_{f,1-\alpha_0/2} \quad (20)$$

$$c_i = \frac{m_0}{\sqrt{F_{f_0, f_1, 1-\alpha/2}}} \sqrt{Q_{vv_{ii}}} \sqrt{\bar{P}_{ii}} t_{f,1-\alpha_0/2} \quad (21)$$

Burada, m_0 dengeleme hesabı sonrasında elde edilen soncul standart sapmayı, f_0 (19) eşitliğinde paydaki varyansla ilgili fazla ölçü sayısını, f_1 paydadaki varyansla ilgili fazla ölçü sayısını göstermektedir. Eğer s_0 değeri m_0 değerinden büyükse (20) ve (21) eşitliklerinde paydadaki karekök içerisindeki F -tablo değeri ifadesi diğer ifadelerle birlikte çarpım durumuna geçer.

Her ölçü için hesaplanan bu c değerlerinin ortalaması alınarak ortak bir sınır değer elde edilebilir.

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n} \quad \text{sınır değeri} \quad (22)$$

Burada, n ölçü sayısını göstermektedir.

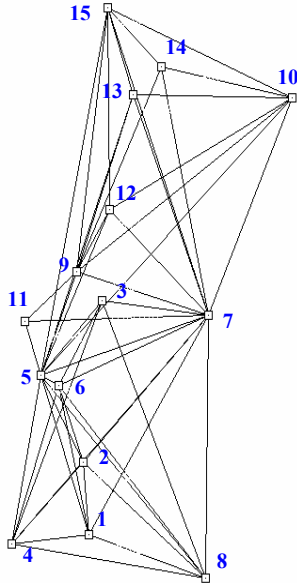
6. UYUŞUMSUZ ÖLÇÜ ARAŞTIRMASI YAPILAN GPS AĞLARI VE ÖLÇÜLERİN DEĞERLENDİRİLDİĞİ PROGRAM

Robust yöntemler kullanılarak gerçekleştirilecek uyumsuz ölçü araştırması için Ordu ilinde tesis edilen ve Ordu-1 ve Ordu-2 olarak adlandırılan iki GPS ağı ele alınmıştır (Şekil 4 ve 5). Ağlardaki ölçüler, gözlem süresi ağ noktalarının her birinde en az 45 dakika ve ölçü kayıt aralığı 10 saniye olacak şekilde statik ölçü yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Ordu-1 GPS ağı, 15 nokta ve 52 baz vektöründen oluşmaktadır. Ağın en uzun bazı 32182 m ile 10-5 bazı ve en kısa bazı 1803 m ile 6-5 bazıdır. 84 üçgen içeren ağın önsel duyarlılığı (s_0), aşağıda gösterildiği gibi Ferrero bağıntısı yardımıyla üçgen kapanmalarından 13.146 mm olarak hesaplanmıştır.

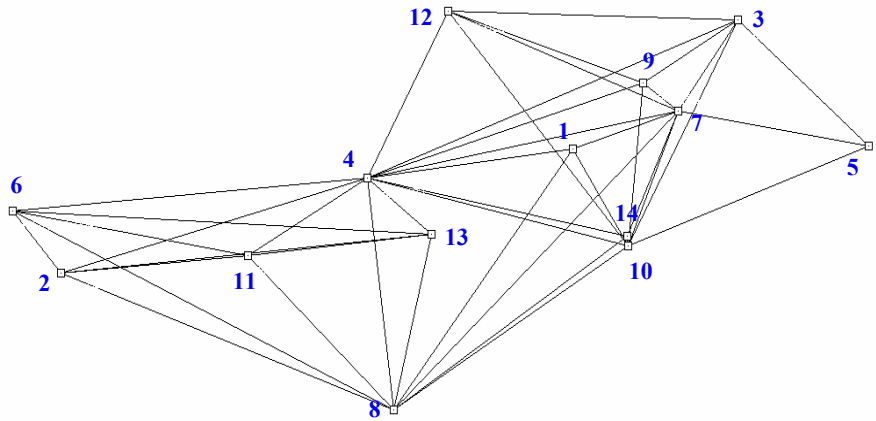
$$s_0 = \sqrt{\frac{w^T w}{9n_t}} = 13.146 \text{ mm} \quad (23)$$

(23) eşitliğinde; w ağıdaki her bir üçgenin baz bileşeninin (ΔX , ΔY ve ΔZ) kapanmasını, n_t ağıdaki üçgen sayısını ve 9 her bir üçgende ölçü sayısını göstermektedir.

Ordu-2 GPS ağı ise, 14 nokta ve 43 baz vektöründen oluşmaktadır. Ağın en uzun bazı 18402 m ile 13-6 bazı ve en kısa bazı 346 m ile 14-10 bazıdır. 52 üçgen içeren ağın, Ferrero bağıntısı yardımıyla hesaplanan önsel duyarlılığı 6.146 mm'dir.



Şekil 4. Ordu-1 GPS Ağı



Şekil 5. Ordu-2 GPS Ağı

GPS ağlarının dengelenmesi ve sonrasında uyuşumsuz ölçülerin araştırılması için MATLAB teknik hesaplama dilinde, serbest dengeleme işlemi gerçekleştiren bir program yazılmıştır /12/. Yazılan programın giriş verileri olan, ağ noktalarının yaklaşık WGS84 koordinatları, ölçüler olarak ele alınan baz vektörleri ve ölçülere ilişkin varyans-kovaryans matrisi, GPS ağlarının GeoGenius2000 yazılımında değerlendirilmesi sonrasında elde edilmiştir. Ağlara ilişkin baz bileşenlerinin kapanma değerleri de GeoGenius2000 yazılımın lup kapanma testi (Loop Closure Test)' raporundan alınmışlardır. MATLAB'da yazılan program koşturulduğunda; kullanıcıdan, sunulan Robust yöntemlerden hangisini değerlendirilen ağa uygulamak istediği sorulmakta ve kullanıcının tercih ettiği yonteme ilişkin program satırları işletilmektedir. Dengeleme işlemi esnasında gerçekleştirilen iterasyon sayısı ve her bir iterasyon sonrasında ölçü ağırlıkları bir dosyaya yazdırılarak sonuçların bir arada ve kullanışlı bir biçimde görülmesi sağlanmaktadır.

7. BULGULAR VE İRDELEME

a. Ordu-1 GPS Ağına İlişkin Bulgular

Danimarka yönteminde, Huber, Beaton-Tukey ve Andrews'ın M-Kestirimi'nde düzeltmelerin karşılaştırılacakları c sınır değerinin hesapla bulunması işlemi, yöntemlerin iterasyon adımlarının her birinde bu sınır değer 55.87 mm olarak hesaplanmıştır. Huber'in M-Kestirimi ve Danimarka yönteminde gerçekleşen 2 iterasyon sonrasında ölçülerin ağırlıklarında herhangi bir değişme gözlenmemiştir. Beaton-Tukey'in M-Kestirimi'nde gerçekleşen 11 iterasyon sonrasında ölçü ağırlıklarının tümünün 0 (sıfır) olduğu gözlenmiştir. Andrews'ın M-Kestirimi sonucunda, gerçekleşen 3 iterasyon sonrası ölçülerin ağırlıklarında önemli değişimler gözlenmemiş ve dolayısıyla uyuşumsuz ölçü olup olmadığına karar verilememiştir. Yukarıda adı geçen 4 yöntemin, sınır değer sabit alınarak uygulanması işlemi, s_0 önsel standart sapma olmak üzere, sınır değer $c = 2 \times s_0 = 26.29$ mm olarak alınmıştır. Danimarka yönteminde gerçekleşen 6 iterasyon sonrasında 20 ölçünün ve Huber'in M-Kestirimi'nde gerçekleşen 7 iterasyonun sonrasında 18 ölçünün ağırlıklarında önemli değişme gözlenmiştir. Ağırlıkları değişen bu ölçülerin tamamına yakını her iki yöntem sonucundaki aynı ölçülerdir. Beaton_Tukey'in M-Kestirimi'nde 14 iterasyon sonrasında 33 ve Andrews'ın M-Kestirimi'nde 6 iterasyon sonrasında 20 ölçünün ağırlıklarının sıfıra gittiği gözlenmiştir. Bu iki yöntem sonucunda, diğer ölçülerin ağırlıklarında ise önemsenmeyecek derecede küçük değişimlere rastlanmıştır.

IGG ve IGGIII M-Kestirimleri'nde yukarıda bahsedilen 4 yöntemde olduğu gibi sınır değerinin hesapla bulunması söz konusu değildir. Ağırlık fonksiyonları düzeltmelere göre değil, düzeltmeler yardımıyla hesaplanan büyüklüklere göre oluşturulur. Bu iki yöntemde, ölçülerin robust ağırlıkları belirli sınır değer aralıklarında tanımlanmıştır. IGG yönteminde, bölüm 5.a'da verilen sınır değerlerden c_0 için 1.5 ve c_1 için 3.0 değeri kullanılmıştır. IGGIII yönteminde ise, bölüm 5.b'de verilen sınır değerlerden c_0 için 2.5 ve c_1 için 6.0 değeri kullanılmıştır. IGG yönteminde, ağırlık fonksiyonunun oluşturulmasında kullanılan ve kaynaklarda birim ağırlığın varyans bileşeni olarak tanımlanan büyüklük için Ferrero bağıntısı yardımıyla üçgen kapanmalarından hesaplanan önsel standart sapma kullanılmıştır. Yöntemin sonuçlarına bakıldığında, gerçekleşen 7 iterasyon sonrasında bazı ölçülerin ağırlıklarının gittikçe küçüldüğü, hatta sıfıra gittiği gözlenmiştir. Uyuşumsuzluk tanısı konulabilecek bu ölçülerin toplam sayısı 23'tür. IGGIII M-Kestirimi'nde robust ağırlık matrisinin

oluşturulmasında standartlaştırılmış düzeltmeler kullanılmıştır. Gerçekleştirilen 3 iterasyon sonrasında ölçülerin ağırlıklarında değişme gözlenmemiş ve dolayısıyla uyumsuz ölçüye rastlanmamıştır. En fazla uyumsuz ölçünün ortaya çıktığı, sınır değer parametresinin sabit alındığı yöntemlerle IGG M-Kestirimi'ne ilişkin sonuçlar Tablo 1'de verilmiştir.

b. Ordu-2 GPS Ağına İlişkin Bulgular

Danimarka yönteminde, Huber, Beaton-Tukey ve Andrews'ın M-Kestirimi'nde düzeltmelerin karşılaştırılacakları c sınır değerinin hesapla bulunması işlemi, yöntemlerin iterasyon adımlarının her birinde bu sınır değeri 24.27 mm olarak hesaplanmıştır. Huber'in M-Kestirimi ve Danimarka yönteminde gerçekleşen 2 iterasyon sonrasında ölçülerin ağırlıklarında herhangi bir değişme gözlenmemiştir. Beaton-Tukey'in M-Kestirimi'nde gerçekleşen 4 iterasyon sonrasında ölçü ağırlıklarının tümünün 0 (sıfır) olduğu gözlenmiştir. Andrews'ın M-Kestirimi sonucunda, gerçekleşen 3 iterasyon sonrası ölçülerin ağırlıklarında önemli değişimler gözlenmemiş ve dolayısıyla uyumsuz ölçüye karar verilememiştir. Yukarıda adı geçen 4 yöntemin, sınır değeri sabit alınarak uygulanması işlemi, s_0 önsel standart sapma olmak üzere, sınır değeri $c = 2 \times s_0 = 12.33$ mm olarak alınmıştır. Danimarka yönteminde gerçekleşen 6 iterasyon sonrasında 16 ölçünün ve Huber'in M-Kestirimi'nde gerçekleşen 5 iterasyonun sonrasında 10 ölçünün ağırlıklarında değişme gözlenmiştir.

UÖN	UÖ	Robust Yöntemler				
		D	H	B	A	I
4	ΔX_{4-3}	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
5	ΔY_{4-3}	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
6	ΔZ_{4-3}	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
14	ΔY_{5-3}			<input checked="" type="checkbox"/>		
26	ΔY_{7-2}			<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>
28	ΔX_{7-3}			<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>
29	ΔY_{7-3}			<input checked="" type="checkbox"/>		
32	ΔY_{7-4}	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
33	ΔZ_{7-4}	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
43	ΔX_{1-7}	<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
44	ΔY_{1-7}			<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>
45	ΔZ_{1-7}	<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
47	ΔY_{6-3}			<input checked="" type="checkbox"/>		
49	ΔX_{6-4}			<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>
51	ΔZ_{6-4}	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
55	ΔX_{6-7}	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
56	ΔY_{6-7}			<input checked="" type="checkbox"/>		
68	ΔY_{8-5}	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
71	ΔY_{8-7}			<input checked="" type="checkbox"/>		
72	ΔZ_{8-7}	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
75	ΔZ_{8-1}	<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
77	ΔY_{8-6}			<input checked="" type="checkbox"/>		
87	ΔZ_{10-5}			<input checked="" type="checkbox"/>		
127	ΔX_{14-9}			<input checked="" type="checkbox"/>		
128						

UÖN : Uyuşumsuz Ölçü Numarası B : Beaton-Tukey'in M-Kestirimi
UÖ : Uyuşumsuz Ölçü A : Andrews'ın M-Kestirimi
D : Danimarka Yöntemi I : IGG M-Kestirimi
H : Huber'in M-Kestirimi

Ağırlıkları değişen bu ölçüler, her iki yöntem sonucundaki aynı ölçülerdir. Beaton_Tukey'in M-Kestirimi'nde 9 iterasyon sonrasında 26 ve Andrews'ın M-Kestirimi'nde 6 iterasyon sonrasında 17 ölçünün ağırlıklarının sıfıra gittiği gözlenmiştir. Bu iki yöntem