ROBUST KESTİRİM VE KABA HATALI ÖLÇÜLERİN BELİRLENMESİ

Emin AYHAN
Z.Nejat AKSOY

ABSTRACT

Since least squares estimation sensitive to blunders (gross errors, outliers), the reliable solutions can be obtained after eliminating blunders. Statistical tests, based upon t,τ and N distributions, used after least squares estimation have common usage for blunder detection. Recently, robust estimations which are not sensitive to blunders were developed as alternative to least squares estimation and two of them, namely Least Sum estimation and Danish method are explained. A levelling network consists of 18 Turkish first order bench marks is also calculated seperately and compared in view of blunder detection by using least squares estimation with data snooping, least sum estimation and Danish method.

ÖZET

En küçük karelerle (EKK-) kestirim ölçüler arasındaki kaba hatalara karşı duyarlı olduğundan kaba hatalar ayıklandıktan sonra uygun çözüm vermektedir. Kaba hataları belirlemek amacıyla EKK-kestirimi sonrasında t,τ veya standart normal dağılıma dayalı istatistik testler yaygın olarak kullanılmaktadır. Son zamanlarda kaba hatalardan etkilenmeyen robust kestirim yöntemleri EKK-kestirimine seçenek olarak geliştirilmiş olup bunlardan en küçük toplam ve Danimarka yöntemleri açıklanmaktadır. Ayrıca Türkiye 1 nci Derece Nivelman ağının 18 noktalı bir bölümünde hem EKK-kestirimi ve t dağılımına dayalı istatistik test (data snooping) hem de en küçük toplam ve Danimarka yöntemleri uygulanarak kaba hata belirlemede etkinlikleri karşılaştırılmıştır.

1. GİRİŞ

Herhangi bir büyüklüğün ölçü değeri o büyüklüğün kendisi hakkında bilgi taşımanın yanısıra ölçü işleminden ve ölçü ortamından kaynaklanan değişik nitelikli hataları (rasgele , kaba, sistematik) da kapsar. Bu çalışmada sistematik hata konusu ele alınmayacaktır. Ölçülerin geometrik ve fiziksel koşulları da sağlayan, gerçek değerlerine yakın büyüklüklerin hesabında rasgele ve kaba hataların belirlenip ayıklanması büyük öneme sahiptir. Ölçülerin gerçek değerlerine en yakın kestirim değerlerini hesaplamada kullanılan yöntemlerden en iyi bilineni En Küçük Karelerle (EKK-) kestirim yöntemidir. Ancak ölçüler arasında kaba hatalar olması durumunda EKK- kestirimi kaba hataları diğer ölçüler üzerine yaymakta ve ölçülerin kestirim değerleri ile ölçülerin fonksiyonu olan değerler doğru hesaplanamamaktadır. Bir kestirim yönteminin; kayık olmamak (unbiasedness), etkili olmak (efficiency) ve tutarlı olmak (consistency) özelliklerine sahip olması gerektiği gözönünde tutulursa, kaba hatalar olması durumunda EKK- kestiriminin bu özellikleri sağlamadığı anlaşılmaktadır. Ölçülerde yalnızca rasgele hata diğer bir deyişle ölçüler normal dağılımda ise EKK- kestirimi en uygun çözümü vermektedir. Kaba hata olması durumunda bunların önceden belirlenmesi, düzeltilmesi ve sonra EKK- kestiriminin uygulanması gerekmektedir.

Kaba hatalar seçilen uygun ölçütlere göre küçük, orta ve büyük olmak üzere sınıflandırılabilir (Klein- Förstner, 1984). Kaba hatalardan büyük olanlar uygun hesap yöntemleri ile belirlenir. Küçük ve orta kaba hataları belirlemek amacıyla uygulanan yöntemler ise iki ana başlıkta toplanabilir (Chen, v.d. ; 1987; Faig-Owolabi, 1989; Veress- Youcai, 1987);

a. EKK-kestirimi sonrasında uygulanan istatistik testler

b. Kaba hatalardan etkilenmeyen Robust kestirim yöntemleri

EKK-kestirimi ve istatistik testler ile kaba hata belirleme geodezi ve fotogrametride yoğun olarak kullanılmakta olup en iyi bilinen testler Baarda'nın t- dağılımına dayalı (data snooping), Pope'nin τ (tau) istatistiği ve Heck'in standart normal dağılıma dayalı oluşturulan uyuşumsuz ölçü test yöntemleridir (Baarda, 1968; LGR, 1982; Kok, 1983). Bunlardan B-testi olarak bilinen ve σ^2-(varyans) ve w-testi olmak üzere iki testten oluşan yöntem ikinci bölümde açıklanmaktadır.

EKK-kestiriminin kaba hatalara (uyuşumsuz ölçü) karşı duyarlı olduğu ortaya çıkarıldıktan sonra kaba hatalara duyarlı olmayan uygun kestirim yöntemleri araştırılmış ve Robust kestirim önerilmiştir. Robust kestirim; ölçülerin dağılım fonksiyonlarındaki küçük değişimlerden ve kaba hatalardan etkilenmeyen bir kestirim yöntemidir. EKK-kestiriminde v_i düzeltmelerinin kareleri toplamı minimum yapılırken Robust kestirimde seçilen bir amaç fonksiyonu $\rho(v_i)$ minimum yapılmaktadır. Amaç fonksiyonunun seçimine bağlı olarak çok sayıda Robust kestirim yöntemi geliştirilmiş olup, üçüncü bölümde bu yöntemlerden bazıları açıklanmaktadır. Kaba hataları belirlemek amacıyla yukarıda sözedilen yöntemler bir nivelman ağında uygulanmış olup, bu uygulama sonuçları dördüncü bölümde verilmektedir.

2. EKK- KESTİRİMİ VE B- TESTİ

ℓ ölçüleri ve x bilinmeyenleri arasında

$$\ell=F(x) \tag{2.1}$$

fonksiyonel ilişkisi bulunsun. Ölçüler v bilinmeyen ölçü hataları ile yüklü ve F(x) fonksiyonunun doğrusal olmaması durumunda Taylor serisine açılıp doğrusallaştırılması ile (2.1) eşitliği;

$$\ell+v=Ax \tag{2.2}$$

ile yazılarak fonksiyonel model oluşturulur. Ölçüler korelasyonsuz ise

$$P_\ell= \mathrm{diag}(p_{11}\ , p_{22}\ ,\ldots\ldots, p_{jj}\ ,\ldots.) \tag{2.3}$$

ile stokastik model tanımlanarak kestirimin matematik modeli tamamlanır. Burada A katsayılar matrisi ve p_{jj} ağırlık olarak isimlendirilir. (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden oluşturulan normal denklemler katsayılar matrisinin düzenli veya düzensiz olmasına bağlı olarak x bilinmeyenleri için farklı çözümler bulunur. Normal denklemler katsayılar matrisi düzensiz ise (2.2) ve (2.3) eşitliklerinin EKK-kestirimi ile çözümü;

$$\hat{x} = (A^T\ P_\ell\ A)^+\ A^T\ P_\ell\ \ell \tag{2.4}$$

$$\hat{v} = (A\ (A^T\ P_\ell A)^+ A^T\ P_\ell - I)\ell \tag{2.5}$$

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = (A^T P_\ell A)^+ \tag{2.6}$$

$$Q_{\hat{v}\hat{v}} = P_\ell^{-1} - A(A^T\ P_\ell A)^+\ A^T \tag{2.7}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{v^T P_\ell\ v}{f} \tag{2.8}$$

$$m_{iç}^2 = \frac{\hat{\sigma}_o^2\ iz(Q_{\hat{x}\hat{x}})}{u} \tag{2.9}$$

olarak bulunur. Burada $(.)^+$ pseudoinvers, $Q_{\hat{x}\hat{x}}$ ve $Q_{\hat{v}\hat{v}}$ sırasıyla bilinmeyenler ve düzeltmeler ağırlık tersi matrisi, $\hat{\sigma}^2$ birim ağırlıklı ölçünün a posteriori varyansı, $m_{iç}$ iç duyarlılık, I birim matris ve f serbestlik derecesidir (f= n-u+d; n; ölçü sayısı, u; bilinmeyen sayısı ve d; rank bozukluğu)(Mierlo,1979).

Normal denklemler katsayılar matrisinin düzenli olması durumunda çözüm; (2.4)-(2.7) eşitliklerinde pseudoinvers yerine Cayley inversi alınarak bulunur. Bu durumda rank bozukluğu sıfırdır.

EKK-kestirimi sonrasında uygulanan B- test yöntemi birbiri ile bağıntılı $\hat{\sigma}^2$-testi ve w-testinden oluşmakta olup aşağıda açıklanmaktadır (Baarda, 1968; LGR, 1982).

a. σ^2-testi (Varyans testi, F dağılım testi)

$$\frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \leqslant F_{1-\alpha;f,\infty} \qquad (2.10)$$

ile yazılır. Burada σ_o^2 birim ağırlıklı ölçünün a priori varyansı, α testin anlamlılık olasılığı, $F_{1-\alpha;f,\infty}$ F dağılımı kritik değeridir.

b. w-testi (Data snooping)

$$w_i = \frac{-\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \qquad (2.11)$$

$$\sigma_{\hat{v}_i}^2 = \sigma_o^2 \cdot q_{\hat{v}_i\hat{v}_i} \qquad (2.12)$$

olmak üzere

$$|w_i|_{max} < \sqrt{F_{1-\alpha_o;1,\infty}} \qquad (2.13)$$

koşulunu sağlamayan ölçü uyuşumsuz ölçü olarak belirlenir (LGR, 1982). Burada α_o tek boyutlu testin anlamlılık olasılığı ve $q_{\hat{v}_i\hat{v}_i}$; $Q_{\hat{v}\hat{v}}$ matrisinin i nci diyagonal elemanıdır.

3. ROBUST KESTİRİM

Bilinmeyenler ve ölçüler arasında (2.2) eşitliği ile verilen doğrusal fonksiyonel ilişkinin varlığı ve ölçülerin f(l;x) olasılık fonksiyonuna sahip bir dağılımda olduğu düşünülsün. Kestirim yöntemlerinden biri olan Maksimum Likelihood kestiriminde (M-Kestirimi);

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} f\,(\ell_i;x) \qquad (3.1)$$

fonksiyonu en büyük veya

$$\log L(x) = -\sum_{i=1}^{n} \log f(\ell_i,x) \qquad (3.2)$$

ve

$$\rho\,(\ell_i,x)= -\log f(\ell_i,x) \qquad (3.3)$$

olmak üzere

$$\mathrm{Log}\ L(x)= \sum_{i=1}^{n} \rho\,(\ell,x) \qquad (3.4)$$

ile tanımlanan (3.4) eşitliğini en küçük yapan $\hat{x}$ çözümü aranır. Buradan görüldüğü gibi M-kestiriminde;

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\ell_i,x) = \sum_{i=1}^{n} \rho(v_i) \Rightarrow \min \qquad (3.5)$$

olarak tanımlanan amaç fonksiyonunun sağlanması istenmektedir. Bu koşulu sağlayan x bilinmeyenlerini bulmak için (3.5) eşitliğinin bilinmeyenlere göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek,

$$\sum_i \psi\,(\ell_i,x) = 0 \qquad (3.6)$$

koşulu bulunur. Burada

$$\psi\,(1_i,x)=\frac{\partial\rho(\ell_i,x)}{\partial x} \qquad (3.7)$$

ile tanımlıdır. (3.6) koşulunu sağlayan x bilinmeyenlerinin çözümünün tek ve yakınsak olması için $\rho(.)$ fonksiyonunun konveks olması gerekli ve yeterli bir koşuldur. M-kestiriminde amaç fonksiyonu olarak $\rho(.)$ fonksiyonunun seçilmesi ölçülerin $f(\ell)$ olasılık fonksiyonu seçimi anlamına gelmekte ve bu ilişki (3.3) eşitliğinden;

$$f(\ell_i,x)=e^{-\rho(\ell_i,x)} \qquad (3.8)$$

ile gösterilebilir.

Robust kestirimde; ölçülerin dağılım fonksiyonundaki küçük değişimler ile kaba hatalardan etkilenmeyen ve (3.5) koşulunu sağlayan bir çözüm aranmaktadır. Robust kestirimin bu özellikleri gözönünde tutularak (2.2) eşitliği (3.5) ve (3.6)da yerine konulursa

$$\sum_i \rho(a_i^T x-\ell_i) \Rightarrow \min \qquad (3.9)$$

$$\sum_i a_i^T\,\psi\,(a_i^T x-\ell_i)=0 \qquad (3.10)$$

yazılır . (3.10) eşitliğindeki toplam terimleri $(a_i^T x-\ell_i)$ ile çarpılıp bölünür ve

$$p_i = \frac{\psi(a_i^T x - \ell_i)}{a_i^T x - \ell_i} \tag{3.11}$$

tanımı ile (3.10) eşitliği

$$\sum_i a_i^T p_i (a_i^T x - \ell_i) = 0$$

veya matris gösterimi ile

$$A^T P(Ax - \ell) = 0 \tag{3.12}$$

yazılır. Burada P ağırlık matrisi olup

$$P = \mathrm{diag}(p_{11}, p_{22}, \ldots\ldots, p_{ii}, \ldots\ldots p_{nn}) \tag{3.13}$$

alınmaktadır. Robust kestirimde (3.12) eşitliğinin bir $\hat{x}$ çözümü yinelemeli ağırlıklandırmalı EKK-kestirimi ile bulunacaktır. Bu yöntemde başlangıç çözümü, $P_o = I$ alınarak (3.12) eşitliğinin EKK- kestirimi ile çözümü,

$$\hat{x}_o = (A^T A)^{-1} A^T \ell$$

$$\hat{v}_o = (A(A^T A)^{-1} A^T - I)\ell$$

bulunur. t yineleme sayısını göstermek üzere her yinelemede (3.11) ile verilen ağırlıklar bir önceki yineleme sonunda bulunan çözümden yararla bulunarak t nci yinelemedeki çözüm;

$$x_{t+1} = (A^T P_{t+1} A)^{-1} A^T P_{t+1} \ell \tag{3.14}$$

$$\hat{v}_{t+1} = (A(A^T P_{t+1} A)^{-1} A^T P_{t+1} - I)\ell \tag{3.15}$$

elde edilir. En büyük yineleme sayısı, ardışık yönelemelerde bulunan çözümler arasındaki fark, belirli bir sayıdan daha küçük olacak biçimde belirlenir (Caspary-Borutta,1987). (3.14) ve (3.15) eşitlikleri incelendiğinde yinelemeli ağırlıklandırmalı EKK-kestirimi ile çözümü bulunan Robust M-kestirimde her ölçü için en uygun ağırlığın belirlendiği ve buna bağlı olarak robust bir çözüm elde edildiği görülmektedir.

Yukarıda incelenen robust M-kestiriminin önemli özellikleri şunlardır;

* $\rho(.)$ konvex bir fonksiyondur.
* $\rho(.)$, $\psi(.)$ veya $p(.)$ fonksiyonlarından yalnızca birinin seçilmesi yeterlidir.
* Yinelemeli ağırlıklandırmalı EKK-kestirimi ile çözüm bulunur.

* Her ölçüye uygun ağırlık belirlenir.

* Kaba hatalardan (uyuşumsuz ölçü) etkilenmeyen çözüm verir.

Günümüzde çok sayıda robust kestirim yöntemi tanımlanmış olup önemli görülenlerine ait $\rho(.)$, $\psi(.)$ ve $p(.)$ fonksiyonları aşağıda verilmektedir.

Robust M-kestirimi (HUBER) (Huber,1973);

$$\rho(v_i)=\begin{cases} \frac{1}{2} v_i^2 & |v_i| \leqslant c \\ c\,|v_i| - \frac{1}{2} c^2 & |v_i| > c \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\psi(v_i)=\begin{cases} v_i & |v_i| \leqslant c \\ c.\mathrm{sing}(v_i) & |v_i| > c \end{cases} \tag{3.17}$$

$$p(v_i)=\begin{cases} 1 & |v_i| \leqslant c \\ \frac{c}{|v_i|} & |v_i| > c \end{cases} \tag{3.18}$$

Burada C uygun seçilen bir katsayıdır ($\sim$ 1.5 alınır).

En Küçük Toplamlarla Kestirim (EKT-Kestirim);

$$\rho(v_i) = |v_i| \tag{3.19}$$

$$\psi(v_i) = 1 \tag{3.20}$$

$$p(v_i) = \frac{1}{|v_i|} \tag{3.21}$$

EKK-kestirimi;

$$\rho(v_i) = |v_i|^2 \tag{3.22}$$

$$\psi(v_i) = 2|v_i| \tag{3.23}$$

$$p(v_i) = 1 \tag{3.24}$$

Yukarıda verilen robust kestirimlere ek olarak DANİMARKA yöntemi ismi ile anılan bir başka yöntem kısaca açıklanacaktır. Danimarka yöntemi robust kestirime çok benzemesine rağmen seçilen $\rho(.)$ fonksiyonunun konvex olmaması nedeniyle bir robust kestirim olarak sınıflandırılamamaktadır. Krarup tarafından, kaba hataları belirlemek amacıyla 1967 yılında önerilmiş ve günümüze kadar fotogrametri ve geodezide yaygın olarak kullanılagelmiştir. Danimarka yönteminde de çözüm yinelemeli ağırlıklandırmalı EKK-kestirimi ile bulunmaktadır. Başlangıç çözümü (t=0) için $P_o = I$ seçilmekte ve v_o düzeltmeleri ile sonraki yineleme adımlarında ölçülerin ağırlıkları;

$$P_{t+1} = P_t \cdot f(v_t) \tag{3.25}$$

$$f(v_t) = \begin{cases} 1 & \dfrac{|v_t|\sqrt{P_o}}{\sigma} < C \\ e^{-\left(\dfrac{|v_t|\sqrt{P_o}}{C.\sigma_o}\right)} & \dfrac{|v_t|\sqrt{P_o}}{\sigma} \geqslant C \end{cases} \tag{3.26}$$

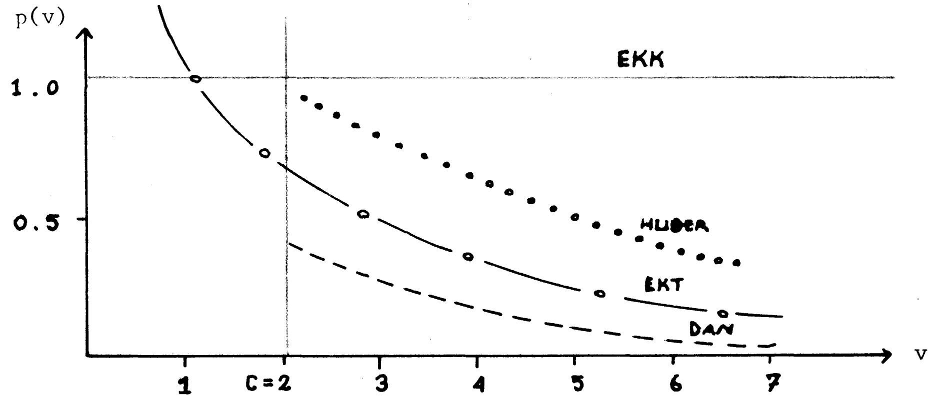
formülü ile bulunmaktadır (Krarup, v.d.,1980; Krarup-Kübik,1982;Juhl,1984; Kubik, v.d.,1987). (3.26) eşitliğindeki C katsayısı ile kestirim probleminin özelliğine uygun $f(v_i)$ fonksiyonunun seçimi Danimarka yönteminin etkili kullanılmasında büyük öneme sahiptir (Klein- Förstner, 1982; Faig- Owolabi,1989).

Robust kestirimde ölçülere uygun ağırlıklar belirlenmekte ve ölçü atılmaksızın bilinmeyenlerin çözümü bulunmaktadır. EKK-kestirimi ve sonrasında uygulanan B-testi ve benzerlerinde birden fazla kaba hata olması durumunda her defasında belirlenen ölçülerden biri atılarak hesaplama yinelenmektedir. Atılan ölçülerin sonraki adımlarda kullanılıp kullanılmayacağı ile ilgili uygun stratejinin belirlenmesi halen araştırma konusudur (Chen,v.d.,1987). Robust kestirimde birden fazla kaba hata bir sorun oluşturmamakta ve kaba hataların tamamı diğerlerine göre küçük ağırlıklar verilerek belirlenmektedir.

Ölçüler için uygun ağırlıkların belirlenmesine dayalı olan robust kestirimde ağırlık fonksiyonunun seçimi önemli olup karşılaştırma yapabilmek için daha önce verilen robust kestirim yöntemlerine ait ağırlık fonksiyonları şekil-1'de grafik olarak gösterilmektedir (Caspary-Borutta,1987).

4. SAYISAL UYGULAMA

Ölçüler arasındaki bir veya birden fazla kaba hatayı (uyuşumsuz ölçü) belirleyerek etkilerini ortadan kaldırmak amacıyla uygulanan yöntemler önceki



Şekil-1: Ağırlık Fonksiyonları

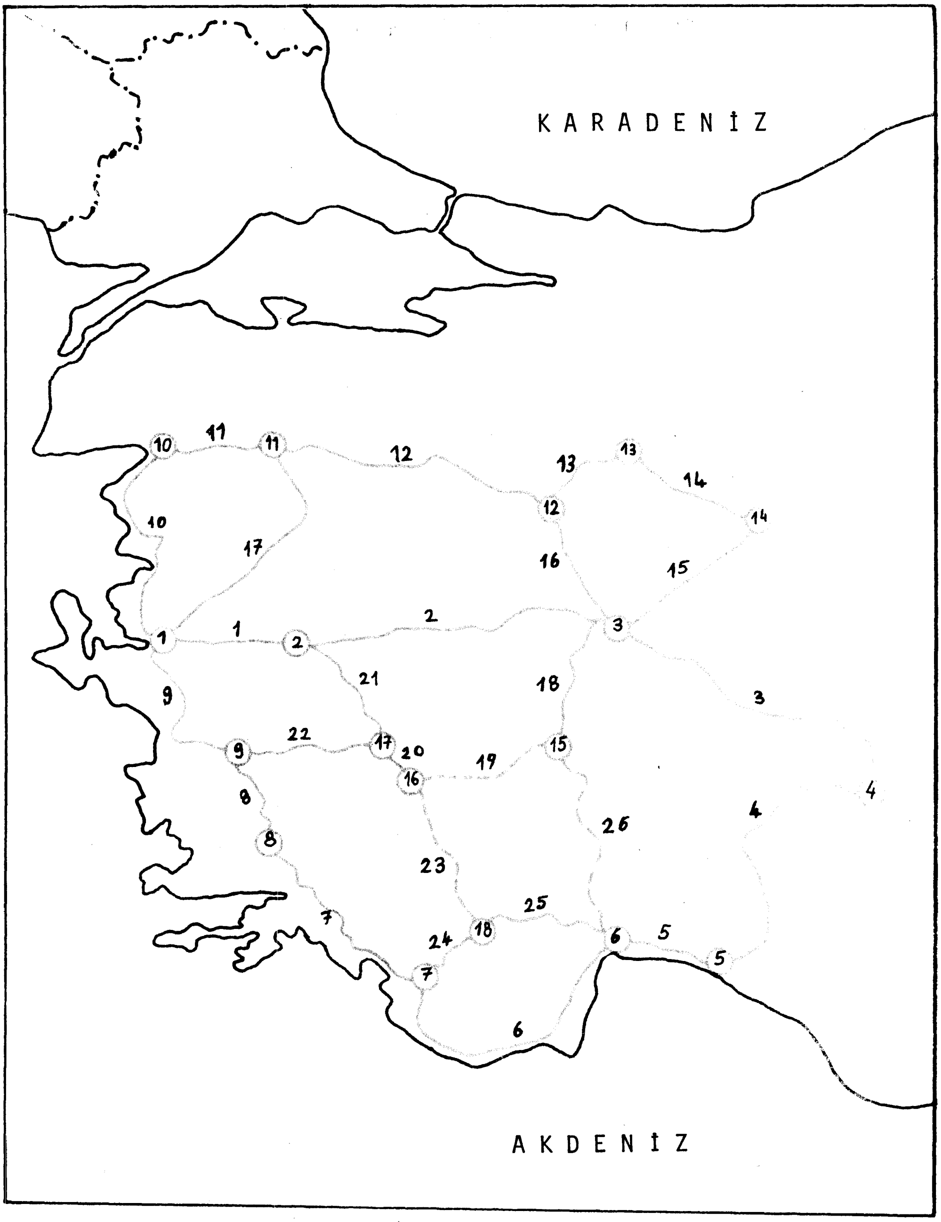
HUBER;Robust M-Kestirimi (HUBER) DAN.: Danimarka Yöntemi

bölümlerde açıklanmıştır. Sözkonusu yöntemlerden EKK- kestirimi sonrasında uygulanan B-testi ile robust karakterli EKT ve Danimarka yöntemlerini karşılaştırmak amacıyla Türkiye I nci derece nivelman ağının 26 nivelman geçkili ve 18 nivelman noktalı bir bölümünde her üç yöntem ile sayısal uygulama yapılmıştır. Sözkonusu nivelman ağına ait ölçü planı Şekil-2'de gösterilmektedir.

Nivelman ağı hesabında nivelman geçkileri boyunca ΔC jeopotansiyel sayı farkları ölçü ve nivelman noktalarının C jeopotansiyel sayıları bilinmeyen seçilerek (2.2) eşitliği ile verilen düzeltme denklemleri kullanılmıştır. EKK-kestiriminde ölçülerin ağırlıkları;

$$p_{jj} = \frac{200}{r^2 . S} \qquad (4.1)$$

olarak seçilmiştir (Kok,v.d.,1980). Burada r,4mm olup I nci derece nivelmanda gidiş dönüş nivelman ölçü kapanması ve S kilometre biriminden nivelman geçki uzunluğudur. Nivelman noktalarının tamamı bilinmeyen seçilerek yapılan serbest ağ dengelemesi sonunda B-testi uygulanırken α_o =0.001 ve $F_{1-\alpha_o;1,\infty}$= 3.29 sabit değerleri kullanılmıştır. w- testinde 18,23 ve 26 nolu ölçülerin (2.13) koşulunu sağlamadığı ve en büyük w değerine sahip 18 nolu ölçünün uyuşumsuz olduğuna karar verilerek ölçü kümesinden çıkarılmıştır. 18 nolu ölçü çıkarıldıktan sonra 25 ölçü ile ikinci bir hesaplama yapılmış ve B- testinde uyuşumsuz ölçüye raslanmamıştır. Ayrıca diğer yöntemlerle karşılaştırma yapmak amacıyla 18, 23 ve 26 nolu ölçüler kümesinden çıkarılarak 23 ölçü ile bir hesaplama daha yapılmıştır.



Şekil-2: Nivelman ölçü planı

Robust karakterli EKT ve Danimarka yöntemleriyle çözüm yinelemeli ağırlıklandırmalı EKK- kestirimi ile bulunmuştur. EKT uygulanırken ilk aşamada ağırlıklar 1 alınmış ve sonraki yineleme adımlarında (3.21)'e benzer olarak

$$p_{ii} = \frac{\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}}{|v_i|} \qquad (4.2)$$

seçilmiştir. Burada

$$\hat{\sigma}_{\hat{v}_i} = \hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{q_{\hat{v}_i \hat{v}_i}} \qquad (4.3)$$

ile tanımlı olup $\hat{v}_i$ düzeltmesinin standart sapmasıdır. EKT yöntemiyle nivelman ağı hesaplanırken tüm noktalar bilinmeyen kabul edilmiş ve ikinci yinelemeden sonra ölçü ağırlıklarında anlamlı değişiklikler gözlenmediğinden iki yinelemenin yeterli olduğu sonucuna varılmıştır.

Danimarka yönteminde ise ağırlığı belirlemek üzere (3.26) eşitliğindeki fonksiyon

$$f(v_t) = \begin{cases} 1 & \dfrac{|v_t|}{\sigma_{v_t}} < 1.5 \\[2ex] e^{-0.05\left(\frac{|v_t|}{\hat{\sigma}_{\hat{v}_t}}\right)^{4.4}} & \dfrac{|v_t|}{\hat{\sigma}_{\hat{v}_t}} \geq 1.5 \end{cases} \qquad (4.4)$$

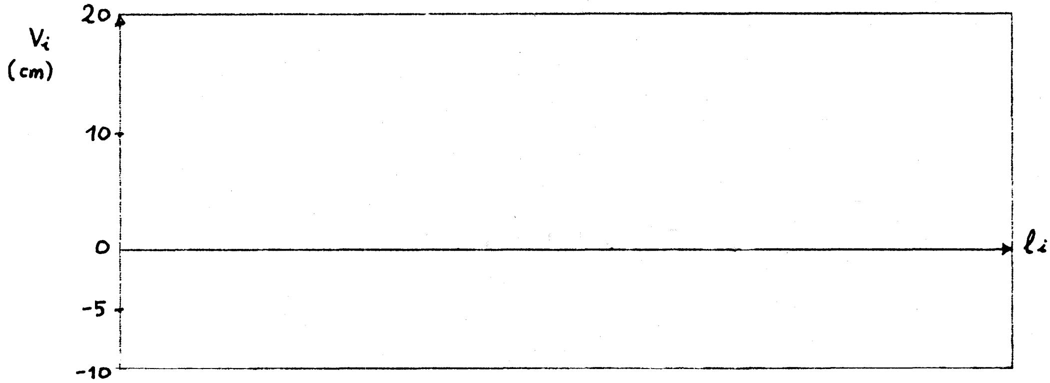
alınmıştır (Krarup-Kubik,1982;Kubik,v.d.,1987). (4.4) ve (4.3) eşitlikleri ile hesaplanan ölçü ağırlıklarının ikinci yinelemeden sonra yakınsadığı belirlenerek yineleme sayısı iki alınmış ve böylece bilgisayar zamanından tasarruf sağlanmıştır.

Yukarıda beş ayrı çözüm açıklanmış olup çözümlerde bulunan bilinmeyenler ile istatistikler Tablo 1'de verilmektedir. Tabloda verilen değerler incelendiğinde EKT, Danimarka yöntemi, 25 ve 23 ölçülü EKK- kestirimi ile bulunan çözüm sonuçlarının birbirine çok benzediği görülmektedir. Sözkonusu çözümlerde bulunan düzeltmeler ile ölçü ağırlıkları şekil 3,4 ve 5'de gösterilmektedir. Şekil 3.a, 4.b, ve 4.c'den 23 ölçülü EKK- kestirimi, EKT ve Danimarka yöntemleriyle bulunan düzeltmelerin işaret ve büyüklük olarak benzer olması, sözkonusu üç yöntemin ortak karakterde olduklarının göstergesidir. Ağırlıkların gösterildiği şekil 5 incelendiğinde ise, EKK- kestiriminde ağırlıklar ile kaba ha-

Tablo-1: EKK, EKT ve Danimarka Yöntemleri ile çözüm sonuçları (birimi; g p u)

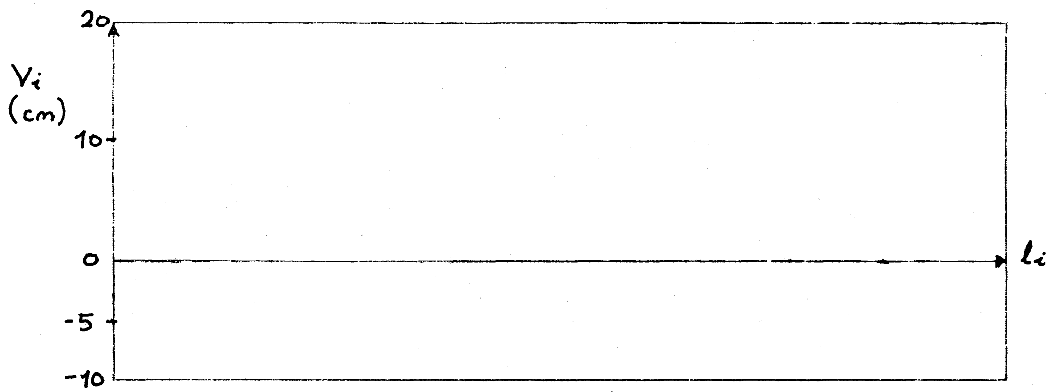
n = ölçü sayısı

YÖNTEM / BİLİNMEYEN	EKK (n=26)	EKK (n=25)	EKK (n=23)	EKT (n=26)	DANISH (n=26)
1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	78.839326	78.842554	78.838639	78.865814	78.860558
3	952.646343	952.580305	952.621666	952.633404	952.623536
4	958.131140	958.075801	958.109302	958.104601	958.098689
5	-27.118180	-27.161536	-27.136840	-27.162602	-27.164554
6	206.583557	206.544630	206.566074	206.546404	206.548406
7	84.009885	84.004306	84.034576	84.040888	84.029507
8	330.932850	330.942737	330.946320	330.933556	330.935666
9	14.987661	15.003922	14.996508	14.981953	14.997555
10	-16.518825	-16.532109	-16.523789	-16.523781	-16.525140
11	92.998741	92.980115	92.991781	92.997208	92.994491
12	899.770093	899.714909	899.749472	899.760548	899.753772
13	735.872726	735.814845	735.851097	735.864937	735.857130
14	951.304978	951.243567	951.282030	951.296335	951.287498
15	806.007241	805.890174	805.964826	805.976554	805.960442
16	338.192585	338.244466	338.204420	338.207415	338.222131
17	100.125050	100.163042	100.134330	100.137914	100.147882
18	1343.623538	1343.744026	1343.789423	1343.743833	1343.764339
$m_{iç}$	0.0621	0.04475	0.04382	0.0300	0.0405
m_o	0.0247	0.0171	0.0142	———	———
F	3.0442	1.4585	1.0049	———	———



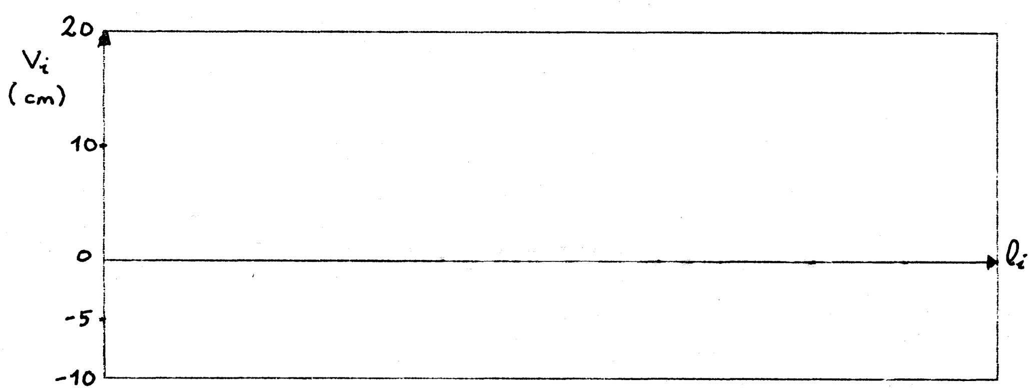
En Küçük Kareler Dengelemesi (n=26)

(a)



En Küçük Kareler Dengelemesi (n=25)

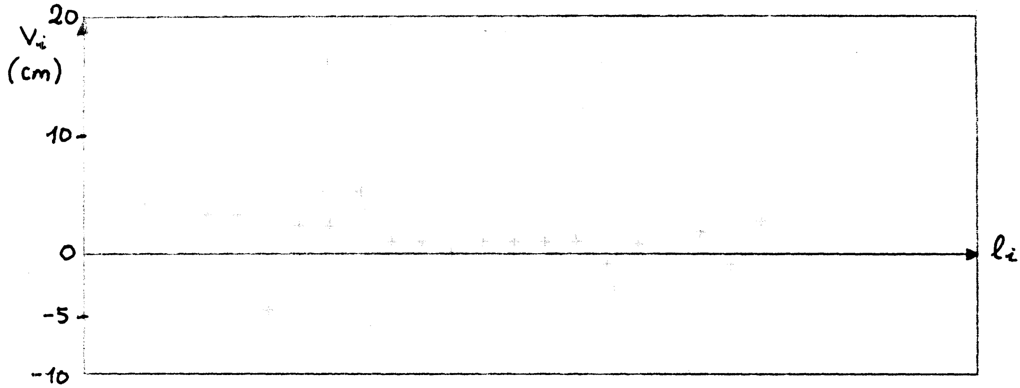
(b)



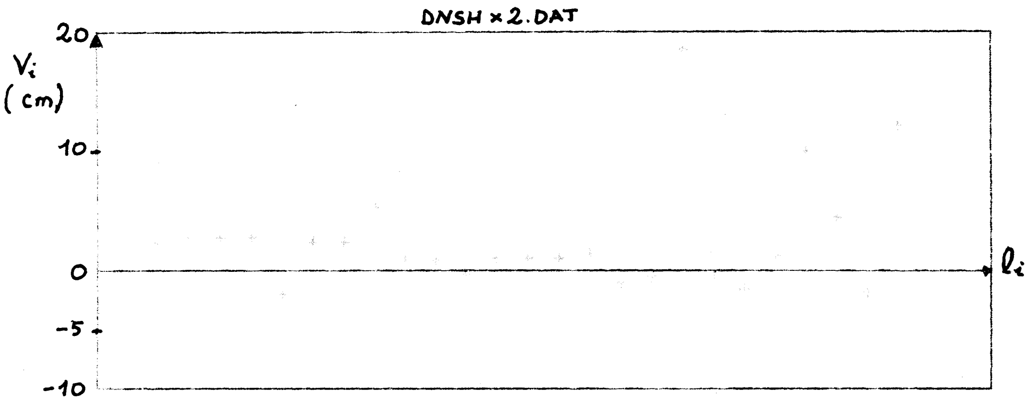
En Küçük Kareler Dengelemesi (n=23)

(c)

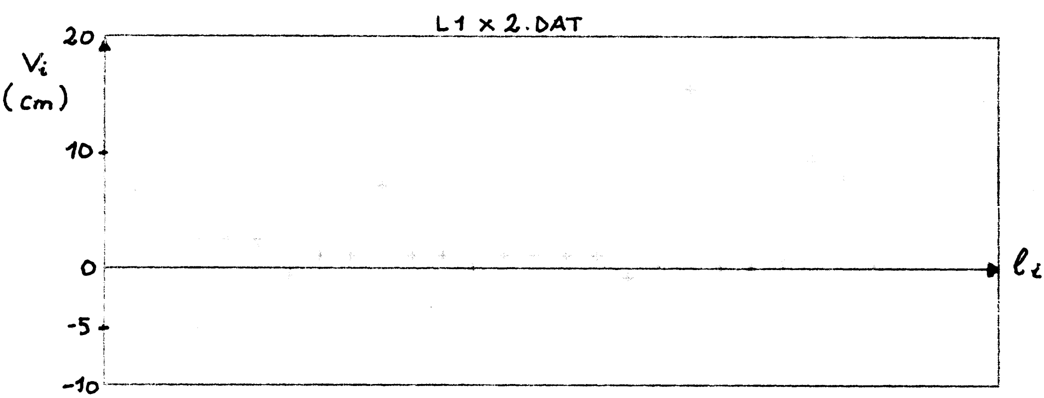
Şekil-3 : Düzeltmeler



P=I Alındığında En Küçük Kareler Dengelemesi
(a)

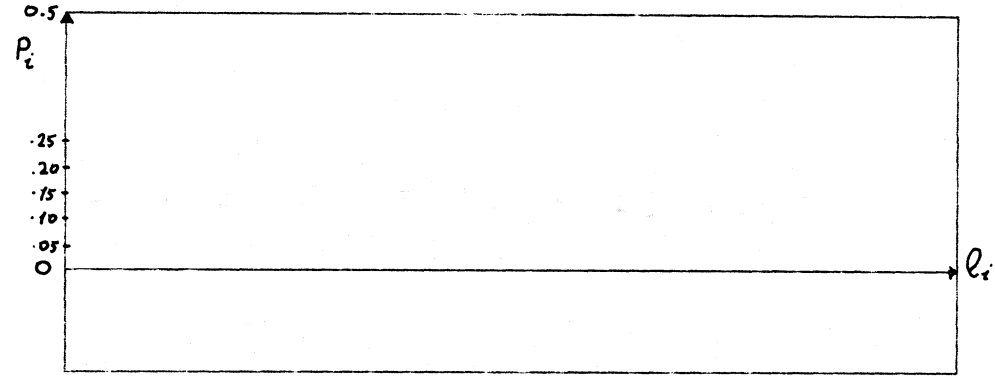


DANISH METODU $\nu=2$
(b)



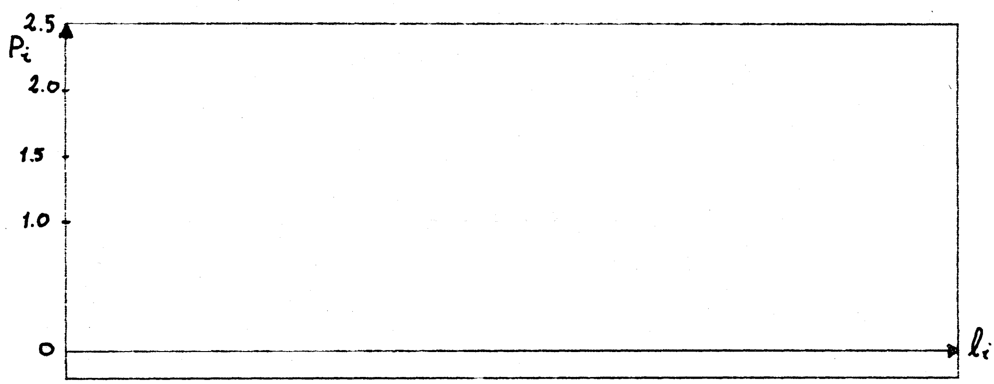
L1 METODU $\nu=2$
(c)

Şekil-4 : Düzeltmeler



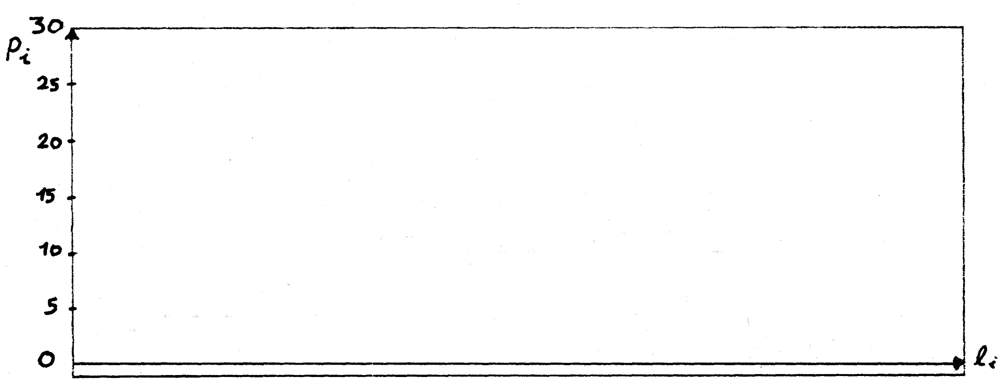
En Küçük Kareler Dengelemesi (n=26)

(a)



DANISH Metodu ν=2

(b)



L1 Metodu ν=1

(c)

Şekil-5 : Ağırlıklar

talı ölçüler arasında belirgin bir ilişki olmadığı, EKT ve Danimarka yöntemlerinde ise kaba hatalı ölçülere sıfıra yakın ağırlıklar atandığı ve ağırlıkların diğerlerine göre oldukça küçük olduğu gözlenmektedir. Bu gözlem robust kestirimin daha önce ifade edilen önemli özelliklerinden biridir ve ölçü kümesinden herhangi bir ölçü çıkarmaksızın uygun çözümün bulunmasını sağlamaktadır.

5. SONUÇLAR

Kaba hataları (uyuşumsuz ölçü) belirlemek ve etkilerini yok etmek amacıyla EKK kestirimi sonrası B-testi ve robust karakterli EKT ve Danimarka yöntemleri Türkiye I nci derece nivelman ağının 26 geçki ve 18 noktadan oluşan bir bölümünde uygulanarak karşılaştırılmıştır.

EKK-kestirimi ve B-testi yinelemeli data snooping yöntemi olarak da adlandırılmakta ve her yinelemede kaba hatalı olduğu belirlenen bir ölçü atılmaktadır. Dolayısıyla kaba hatalı ölçü sayısı kadar yinelemenin tekrarı gerekmektedir. Ayrıca daha önce atılan ölçülerin daha sonraki adımlarda yeniden hesabı katılıp katılmayacağı, katılacak ise atılan ölçülerden hangisinin katılması gerektiği, diğer bir deyişle birden fazla kaba hata olduğunda uygun data snooping stratejisinin ne olduğu henüz araştırma konusudur (Kok,1984; Chong, 1987; Chen,v.d., 1987).

Ölçülerin dağılım fonksiyonlarındaki küçük değişimler ile kaba hatalardan etkilenmeyen robust kestirimin çözümü yinelemeli ağırlıklandırmalı EKK-kestirimi ile bulunmaktadır. Bu yöntemde her yinelemede ölçüler için uygun ağırlık belirlenmekte herhangi bir ölçünün ölçü kümesinden çıkarılması söz konusu olmamaktadır. Bu özelliği robust kestirimin yinelemeli data snooping'e göre bir üstünlük olarak değerlendirilmektedir.

Nivelman ağında yapılan sayısal incelemede; 23 ölçülü EKK-kestirimi ile, atılan bu ölçüler için küçük ağırlıklar hesaplanan EKT ve Danimarka yöntemleriyle bulunan çözümlerin benzer olmaları robust kestirimin anlamlı olduğunu göstermektedir. Buradan, birden fazla kaba hata olması durumunda EKK-kestirimi sonrasında uygulanan w-testinde (2.13) koşulunu sağlamayan tüm ölçülerin atılarak ikinci ve son bir yineleme yapılması biçiminde bir stratejinin yinelemeli data snooping için uygun olduğu önemli sonucuna varılmaktadır. Bu stratejinin uygulanması sırasında bir robust kestirim yöntemiyle de sonuçların kontrol edilmesinde yarar bulunduğu düşünülmektedir.

Robust kestirimin uygulandığı problemin özelliğine uygun C katsayısının seçimi büyük öneme sahiptir. Nivelman ağında yapılan uygulamada 1.5 kabul edilen C sayısının uygun değerini belirlemek için algoritma geliştirilmesi gerekli görülmektedir. Ayrıca (4.2) ve (4.4) eşitliklerindeki $\hat{\sigma}v_i$ yerine robust karakterli bir ölçek faktörünün kullanılması, araştırılması gerekli diğer önemli bir konudur.

KAYNAKLAR

/1/ AKSOY,N.,ALP,O.,AYHAN,E. : Ölçülen,Kestirilen ve Normal Gravitenin Jeopotansiyel Sayı ve Nivelman Ağ Dengelemesindeki Etkilerinin Araştırılması.Harita Dergisi,Sayı:104,s.39-56 ,1990

/2/ BAARDA,W. : A Testing Procedure for use in Geodetic Networks.Neth.Geod.Comm.,Vol.2,No.5,1968

/3/ BORUTTA,H. : Robuste Schalzverfahren für Geodetische Anwendungen.Universitat der Bundeswehr München, Neubiberg, Heft.33,1988

/4/ CASPARY,W.,H.BORUTTA : Robust Estimation in Deformation Models. Survey Rewiew,29,223,pp.29-45,1987

/5/ CHEN,Y.Q,M.KAVOURAS, A.CHRZANOWSKI : A Strategy For Detection of Qutlying Observations in Measuraments of High Precision. The Canadian Surveyor,Vol.41,No.4,pp.529-540,1987

/6/ CHONG,A. : A Robust Method for Multiple Outliers Detection in Multi-Parametric Models. Photogrammetric Eng. and Remote Sensing. Vol.53,No.6,pp.617-620,1987

/7/ CRUGER JORGENSEN,P. P.FREDERIKSEN,K.KUBIK, W.WENG. : Ah; Robust Estimation ! Proc.of XV Int.Congress of Photogrammetric and Remote Sensing. Rio de Janerio,1984

/8/ FAIG,W.,K.OWOLABI : Robust Estimation for Photogrammetric Data Using An Adaptive Tuning Constant.Tech.Papers,ASPRS/ACSM,Ann.Convention,Vol.1,pp.64-73,1989

/9/ HOGG,R.V.,A.T.CRAIG. : Introduction to Mathematical Statistics. Collier Macmillan Publ.,London,1978

/10/ HUBER,P. : Robust Estimation of Location Parameter.Ann.Math. Statist.35,pp.73-101,1964

/11/ HUBER,P. : Robust Regression: Asymptotics, Conjektures and Monte Carlo. The Ann.Of Statist. Vol.1, No.5,pp.799-821,1973

/12/ HUBER,P. : Robust Statistics.Wiley,New York,1981

/13/ JUHL,J. : The Danish Method of Weight Reduction for Gross Error Detection. ISP Comm.III,Helsinki,1982

/14/ KLEIN,H., FORSTNER,W. : Realization of Automatic Error Detection in the Block Adjustment Program PAT-M43 using Robust Estimation.Int.Arch.of Photogrammetry and Remote Sensing,Vol.XV,Part A3a,Comm.III,1984

/15/ KRARUP,T.,K.KUBIK. : Götterdammerung over Least Squares Adjustment.14 th Congress of Int.Soc.of Photogrammetry. Comm.III,1980

/16/ KRARUP,T.,K.KUBIK. : The Danish Method;Experience and Philosophy.DGK, Reihe A.Heft Nr.98,pp.131-134,1983

/17/ KOK,J.J. : On Data Snooping and Multiple Outlier Testing.NOAA Technical Report NOS XIGS 30, Rockville

/18/ KUBIK,K.,W,WENG, P.FREDERIKSEN. : Oh,Grosserorors! XV Congress of the Int.Soc.for Photogrammetry and Remote Sensing,Rio de Janerio 1984

/19/ KUBIK,K.,D.MERCHANT, T.SCHENK. : Robust Estimation in Photogrammetry.Eğg.and Remote Sensing.Vol.53,No.2 pp.167-169,1987

/20/ OWOLABI,K. : A Robust Strategy for the Detection of Multiple Outliers.Technical Papers,ASPRS/ACSM,Annual Convention Vol.1,Baltimore,1989

/21/ SOMOGYI,J. : Robust Estimation and Their Use in Geodesy.Acta Geod.Geogh.Mont.Hung.Vol.23,1,pp.45-55,1988

/22/ THE STAFF OF THE GEODETIC COMPUTING CENTER (LGR) : The Delft Approach for the Design and Computing of Geodetic Networks.Forth years of Though.Vol.1,pp. 202-274,1982

/23/ VERESS,S.A., H.YOCAİ : Application of Robust Estimation in Close-Range Photogrammetry.Photogram.Eng.and Remote Sensing. Vol.53,No.2,pp.171-175,1987