Rasat silsilelerinin bir tâbi şeklinde tetkiki

Yazan: Y. Mühendis
Hüseyin Bozkır

(Baş tarafı 33 numaralı mecmuadadır.)

Yekdiğerlerine $l = f(a)$ münasebetiyle bağlı olan a ve l gibi iki miktar verilmiş olsun.

Eğer a ve l in yekdiğerlerinden farklı olan:

$$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_r$$
$$l_1, l_2, l_3 \ldots\ldots l_r$$

Kıymeflerini ölçmek kabil ise $l = f(a)$ tabiini tesbit etmenin imkâni olduğunu bundan evvel izah ettik.

$$p_1(a_1, l_1), p_2(a_2, l_2) \ldots\ldots p_r(a_r, l_r)$$

Noktalarını mihverlerde yerlerine nakledecek olursak « rasat hatalarından dolayı » bu noktaların takriben bir münhani üzerinde bulunduklarını görürüz. Böyle bir meselede münhaninin şekline göre iki üç veya daha ziyade meçhullerin tayini mevzubahis olabilir.

Mes'elenin müvazene edilebilmesi için lüzumundan fazla rasatların mevcut olması lâzımdır. Bundan evvelki meselelerde olduğu gibi burada da x mihveri üzerine naklonulan yâni $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ miktarlarını hatasız olarak kabul edeceğiz. Aranılan muadelenin üç meçhulu ihtiva ettiğini farzedecek olursak mezkûr muadeleyi

$l = f(a, x, y, z)$ şeklinde yazabiliriz:

$l_1, l_2, l_3 \ldots\ldots l_r$ rasatlarının aldıkları tashih mıktarlarını $v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots v_r$ ile gösterecek olursak hata muadeiesi.

$$l_r + v_r = f(a, x, y, z)$$

şeklini alır. Bu hata muadelesi aşağıda görüldüğü şekilde hattî şekle sokulrr.

x_0, y_0, z_0 kıymetleri x, y, z kıymetlerinin takribî kıymetleri olsunlar. Bu taktirde:

$$V_r = -l_r + f(a, x. y, z)$$

Hata muadelesinde:

$$x = x_0 + \Delta y, \quad y = y_0 + \Delta y, \quad z = z_0 + \Delta z$$

ikame etmek suretiyle taylor silsilesinden istifade etmek suretiyle.

$$V_r = -l_r + f(a_r, x_0, y_0, z_0) + \frac{df(a)}{dx}\Delta x + \frac{df(a)}{dy}\Delta y + \frac{df(a)}{dz}\Delta z$$

$$V_r = \quad \Delta l_r + a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z$$

hattı hata muadelesi elde olunur. Bu muadelede:

$$\Delta l_r = -l_r + f(a_r, x_0, y_0, z_0)$$

ikame olunmuşdur.

Muvazene neticesinde elde olunan l'_1, l'_2, l'_3 .... l'_r kıymetlerini bir kerre:

$$l'_1 = l_1 + v_1$$
$$l'_2 = l_2 + v_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$l'_r = l_r + v_r$$

ifadelerinden ve bir kerrede:

$$l'_r = f(a_r, x, y, z)$$

muadelesinden istifade etmek suretile hal etmek lâzlmdır. İki muhtelif surette hesab olunan:

$$l'_1, l'_2, l'_3 \dots l'_r$$

kıymetleri arasındaki farklar çok büyük olacak olursa x, y, z kıymétlerine takribi kıymetler nazarile bakarak bütün muvazeneyi tekrar etmek lâzımdır.

1) Misal:

Alhidadın (ε) ademi—merkeziyet zaviyelerin ;taksimat dairesinin

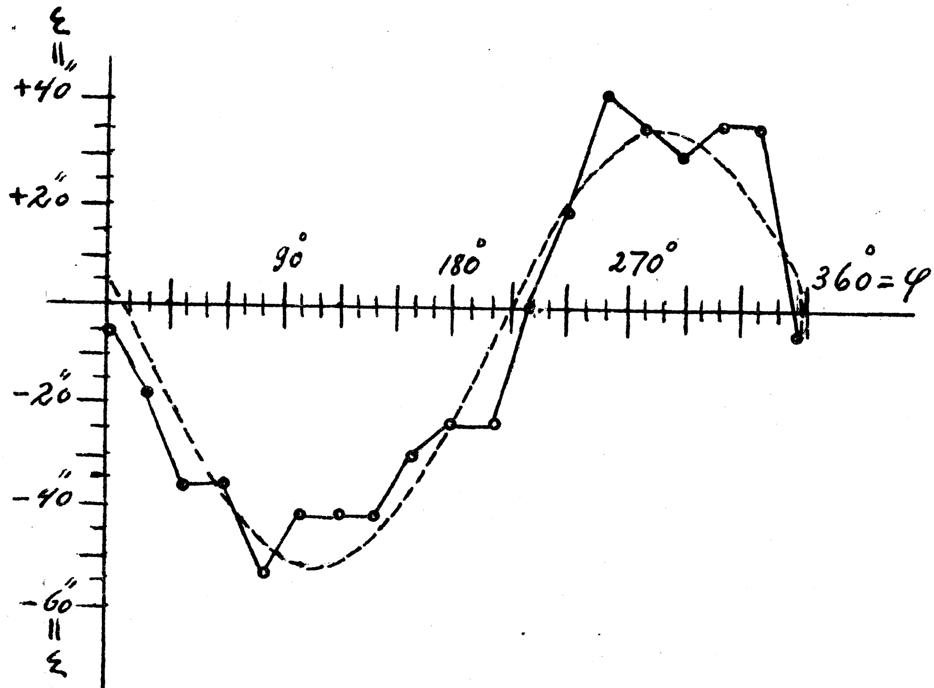
$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 20°, \quad \varphi_3 = 40° \; \dots\dots \; \varphi_{18} = 340°$$

gıbi muhtelif vaziyetlerinde tetkik edelim.

Rasatlar:

Nr.	φ	ε	Nr.	φ	ε	Nr.	φ	ε
1	0°	— 6″	7	120°	—42″	13	240°	+18″
2	20	—18	8	140	—42	14	260	+42
3	40	—36	9	160	—30	15	280	+36
4	60	—36	10	180	— 24	16	300	+30
5	80	—54	11	200	—24	17	320	+36
6	100	—42	12	220	∓ 0	18	340	+36

Bu kıymetler yardımile elde olunan noktaları mihverlerde yerlerine taşıyacak olursak bu noktaların takriben bir sınüs münhanisi üzerinde olduklarını görürüz.



Şekil 1

Bu münhaninin umumi muadelesini:

$$\varepsilon = x + y \sin(\varphi + z)$$

şeklinde yazabiliriz. x, y ve z meçhullerini hal etmek için kurulması lâzımgelen hata muadeleleri:

$$\varepsilon_r + v_r = x + y \sin(\varphi_r + z)$$

şeklindedir. Bu son muadelede:

$$y = y_0 + \Delta y \text{ ve } z = z_0 + \Delta z$$

ikame edecek olursak Taylor silsilesi yardımile:

$$v_r'' = x'' + \sin(\varphi_r + z_0)\,\Delta y'' + y_0'' \cos(\varphi_r + z_0)\frac{\Delta z^\circ}{\varphi^\circ} + \Delta l_r''$$

hatti hata muadelesi elde olunur. Bu son müsavatta:

$$\Delta l_r'' = y_0'' \sin(\varphi_r + z_0) - \varepsilon_r''$$

olduğuna dikkat etmek lâzımdır. y_0 ve z_0 takribi kıymetlerini şekil 1 den istihrac etmek kabildir. Şeklin tetkikinden takribi kıymetler için:

$$y_0 = -50'' \text{ ve } z_0 = 0^\circ$$

bulunur. Aşağıdaki hesaplar muvazenenin ne şekilde yapıldığını göstermektedir.

Hata muadelesinin kurulması:

$$y_0 = -50'',\ z_0 = 0^\circ,\ \rho^\circ = 57{,}296 \qquad \frac{y_0''}{\rho^\circ} = -0{,}873$$

olduğundan:

$$v_1 = x'' + \sin\ 0^\circ . \Delta y'' - 0{,}873 . \cos\ 0 . \Delta z^\circ + \Delta l_1$$

$$v_2 = x'' + \sin\ 20 . \Delta y - 0{,}873 . \cos\ 20 . \Delta z + \Delta l_2$$

. . . .

. . . .

$$v_{18} = x + \sin 340 . \Delta y - 0{,}873 . \cos 340 . \Delta z + \Delta l_{18}$$

elde olunur.

$$\Delta l_r'' = y_0'' \sin(\varphi_r + z_0) - \varepsilon_r''$$

olduğu göz önünde tutulacak olursa:

$$\Delta l_1'' = -50'' \sin\ 0^\circ + \ 6'' = 6''$$

$$\Delta l_2'' = -50'' \sin 20^\circ + 18'' = -50 .\ 0{,}3420 + 18 = +0{,}90''$$

Ayni veçhile hareket olunarak:

$\Delta\, l''_3 = +\ 3{,}86''$	$\Delta\, l''_{11} = +\ 41{,}10$
$\Delta\, l_4 = -\ 7{,}30$	$\Delta\, l_{12} = +\ 32{,}14$
$\Delta\, l_5 = +\ 4{,}76$	$\Delta\, l_{13} = +\ 25{,}30$
$\Delta\, l_6 = -\ 7{,}24$	$\Delta\, l_{14} = +\ 7{,}24$
$\Delta\, l_7 = -\ 1{,}30$	$\Delta\, l_{15} = +\ 13{,}24$
$\Delta\, l_8 = +\ 9{,}86$	$\Delta\, l_{16} = +\ 13{,}30$
$\Delta\, l_9 = +\ 12{,}90$	$\Delta\, l_{17} = -\ 3{,}86$
$\Delta\, l_{10} = +\ 24{,}00$	$\Delta\, l_{18} = -\ 18{,}90$

kıymetleri elde olunur. Bu kıymetler yerlerine konularak aşağıdaki muadeleler elde olunur:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= x'' + 0 - 0{,}873\, z^\circ + 6{,}00 \\
v_2 &= x + 0{,}342\, \Delta y'' - 0{,}820\, z^\circ + 0{,}90'' \\
v_3 &= x + 0{,}643\, \Delta y - 0{,}669\, z + 3{,}86 \\
v_4 &= x + 0{,}866\, \Delta y - 0{,}436\, z - 7{,}30 \\
v_5 &= x + 0{,}985\, \Delta y - 0{,}152\, z + 4{,}76 \\
v_6 &= x + 0{,}985\, \Delta y + 0{,}152\, z - 7{,}24 \\
v_7 &= x + 0{,}866\, \Delta y + 0{,}436\, z - 1{,}30 \\
v_8 &= x + 0{,}643\, \Delta y + 0{,}669\, z + 9{,}86 \\
v_9 &= x + 0{,}342\, \Delta y + 0{,}820\, z + 12{,}90 \\
v_{10} &= x + 0 + 0{,}873\, z + 24{,}00 \\
v_{11} &= x - 0{,}342\, \Delta y + 0{,}820\, z + 41{,}10 \\
v_{12} &= x - 0{,}643\, \Delta y + 0{,}669\, z + 32{,}14 \\
v_{13} &= x - 0{,}866\, \Delta y + 0{,}436\, z + 25{,}30 \\
v_{14} &= x - 0{,}985\, \Delta y + 0{,}152\, z + 7{,}24 \\
v_{15} &= x - 0{,}985\, \Delta y - 0{,}152\, z + 13{,}24 \\
v_{16} &= x - 0{,}866\, \Delta y - 0{,}436\, z + 13{,}30 \\
v_{17} &= x - 0{,}643\, \Delta y - 0{,}669\, z - 3{,}86 \\
v_{18} &= x - 0{,}342\, \Delta y - 0{,}820\, z - 18{,}90
\end{aligned}
$$

$[aa] = 18{,}00$, $[bb] = 9{,}00$, $[cc] = 6{,}86$

$[ab] = 0$, $[ac] = 0$, $[bc] = 0$

$[al] = +155{,}95$, $[bl] = -75{,}73$, $[cl] = +107{,}96$

olduğundan normal muadeleler aşağıdaki şekli alır.

$[aa]x + [al] = 0$, $[bb]\Delta y + [bl] = 0$, $[cc]z + [cl] = 0$

x, Δy, z meçhulleri için aşağıdaki kıymetler bulunur:

$$x = -\frac{155{,}95}{18} = -8{,}7'', \qquad \Delta y = +\frac{75{,}728}{9{,}00} = +8{,}41''$$

$$z^\circ = -\frac{107{,}964}{6{,}86} = -15{,}8^\circ$$

$y'' = y_0' + \Delta y''$ olduğundan:

$$y'' = 50{,}0 + 8{,}4 = 41{,}6''$$

bulunmakla üç meçhulde elde edilmiş olur.

Vasati hata hesabı:

Bunun için evvelâ «v» ları hesaplamak lâzımdır. hata muadelelerinde:

$$x = -8{,}7'', \quad \Delta y = +8{,}4, \quad z^\circ = -15{,}8^\circ$$

ikame edelim. Bu takdirde (v) tashih miktarları elde olunur.

Rasatların muvazene edilmiş ε_1', ε_2' .... ε_{18}' kıymetlerin bir kerre:

$$\varepsilon_r' = \varepsilon_r + v_r$$

müsavatından ve bir kerrede: $\varepsilon_r' = x + y \sin(\varphi_r + z)$ muadelesinden hesap edelim:

$\varepsilon_1' = 6'' + 11 = +5''$	$\varepsilon_{10}' = -24 + 2 = -22''$
$\varepsilon_2' = -18 + 8 = -10''$	$\varepsilon_{11}' = -24 + 17 = -7''$
$\varepsilon_3' = -36 + 11 = 25''$	$\varepsilon_{12}' = \mp 0 + 8 = +8''$
$\varepsilon_4' = 26 \quad 2 = -38''$	$\varepsilon_{13}' = +18 + 2 = +20''$
$\varepsilon_5' = -54 + 7 = -47''$	$\varepsilon_{14}' = +42 - 12 = +30''$
$\varepsilon_6' = 42 - 10 = 52''$	$\varepsilon_{15}' = +36 - 1 = +35''$
$\varepsilon_7' = 42 \quad 10 = -52''$	$\varepsilon_{16}' = +30 + 4 = +34'$
$\varepsilon_8' = 42 - 4 = -46''$	$\varepsilon_{17}' = +36 - 7 = +29''$
$\varepsilon_9' = -30 - 6 = -36''$	$\varepsilon_{18}' = +36 \quad 18 = +18'$

$$\varepsilon'_r = x + y \sin(\varphi_r + z)$$

$$x = -8{,}7'', \; y = -41{,}6'' \text{ ve } z = -15{,}8^\circ$$

olduğuna göre aşağıdaki kıymetler bulunur:

$$\varepsilon'_1 = -8{,}7'' - 41{,}6 \sin(0^\circ - 15{,}8^\circ) = +3''$$
$$\varepsilon'_2 = -8{,}7 - 41{,}6 \sin(20 - 15{,}8) = -12''$$
$$\varepsilon'_3 = -8{,}7 - 41{,}6 \sin(40 - 15{,}8) = -26''$$
$$\varepsilon'_4 = \;\; 8{,}7 - 41{,}6 \sin(60 - 15{,}8) = -38$$

Bu suretle hareket ederek:

$\varepsilon'_5 = -46''$	$\varepsilon'_9 = -33''$	$\varepsilon'_{13} = +20''$	$\varepsilon'_{17} = +26''$
$\varepsilon'_6 = -50''$	$\varepsilon'_{10} = -20''$	$\varepsilon'_{14} = +29''$	$\varepsilon'_{18} = +18''$
$\varepsilon'_7 = -49''$	$\varepsilon'_{11} = -6''$	$\varepsilon'_{15} = +33''$	
$\varepsilon'_8 = -43''$	$\varepsilon'_{12} = +8''$	$\varepsilon'_{16} = +32''$	

İki muhtelif yoldan hesaplanan ε'_r kıymetleri arasında muhtelif yerlerde $2''$ – $3''$ lik farklar vardır. Bunun için $y_0 = -40''$ ve $z_0 = -16^\circ$ miktarlarına takribi kıymetler nazarile bakarak bütün müvazeneyi tekrar edecek olursak bu sefer meçhuller için:

$$x = -8{,}7'', \; y = -43{,}8'', \; z = -18{,}51^\circ$$

kıymetlerini buluruz. İkinci muvazene neticesinde elde olunan x, y, z tin kıymetlerile ε'_r miktarlarını her iki yoldan hesaplayacak olursak birinci halde:

N_r	ε'_r	N_r	ε'_r
1	+ 5,1″	10	− 22,4″
2	− 10,0	11	− 7,4
3	− 24,9	12	+ 7,5
4	− 37,8	13	+ 20,5
5	− 47,2	14	+ 29,9
6	− 52,0	15	+ 34,7
7	− 51,6	16	+ 34,2
8	− 45,9	17	+ 28,6
9	− 35,8	18	+ 18,5

İkinci halde ise:

N_r	ε_r''	N_r	ε_r'
1	$+\ 5{,}2''$	10	$-22{,}6''$
2	$-\ 9{,}8$	11	$-\ 7{,}5$
3	$-24{,}7$	12	$+\ 7{,}4$
4	$-37{,}7$	13	$+20{,}3$
5	$-47{,}1$	14	$+29{,}8$
6	$-51{,}9$	15	$+34{,}6$
7	$-51{,}5$	16	$+34{,}2$
8	$46{,}0$	17	$+28{,}6$
9	$-35{,}9$	18	$+18{,}6$

kıymetlerini bulmuş oluruz. Dikkat edilecek olursa ε_r' nın iki muhtelif yoldan hesaplanan kıymetleri arasındaki en büyük farklar 0,2″ saniyeyi geçmemektedir. O halde muvazeneyi tekrar etmeğe lüzum yoktur. Buna nazaran aradığımız münhaninin muadelesi:

$$\varepsilon_r = -\ 8{,}7'' - 43{,}8'' \sin(\varphi_r - 18{,}5^\circ)$$

şeklinde olur. Mes'eleyi tamamen hal etmiş olmak için x, y, z miktarlarının vasati hatalarını da hesaplamamız lâzımdır.

$$\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}}$$

düsturu bize, vezni vahit olan rasadın vasati hatasını verir. Misalimizde:

$$[vv] = 1476{,}1\,, \quad n = 18 \quad u = 3$$

olduğundan:

$$m = \sqrt{\frac{1476{,}1}{18-3}} = \mp \sqrt{98{,}40} = \mp\ 9{,}92'' \approx \mp\ 10''$$

bulunur. x, y, z miktarlarının vasati hatalarını m_x, m_y ve m_z ile gösterecek olursak bu vasati hataları:

$$m_x = m\sqrt{Q_{1\cdot1}}\,,\quad m_y = m\sqrt{Q_{2\cdot2}}\,,\quad m_z = m\sqrt{Q_{3\cdot3}}$$

düsturları yardımile hesaplayabiliriz.

$[aa]\,Q_{11} = 1\ ;\quad [bb]\,Q_{22} = 1\ ;\quad [cc]\,Q_{33} = 1$

muadelelerinden:

$$Q_{11} = \frac{1}{[aa]} = \frac{1}{18{,}0}\,,\quad Q_{22} = \frac{1}{[bb]} = \frac{1}{9{,}0}\,,\quad Q_{33} = \frac{1}{[cc]} = \frac{1}{6{,}9}$$

kıymetleri elde olunduğu için:

$$m_x = \mp 2{,}5''\,,\ m_y = \mp 3{,}3''\,,\ m_z = \mp 3{,}8^\circ$$

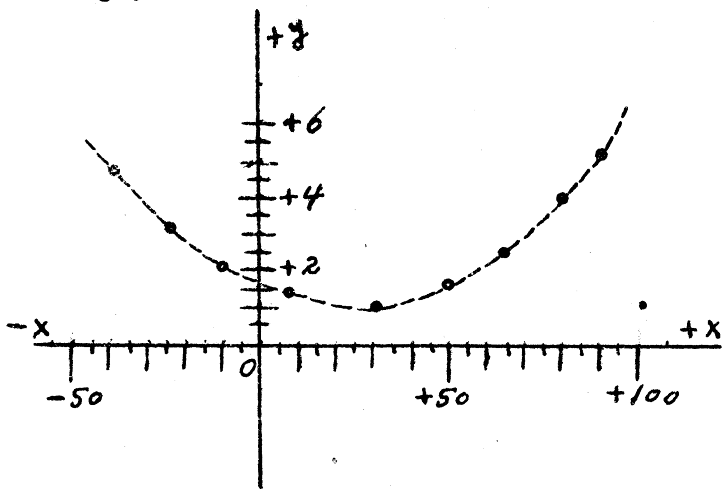
elde olunur. İkinci muvazeneden sonra elde olunan vasati hata kıymetleri ise:

$$m_x = \mp 2{,}5''\,,\ m_y = \mp 3{,}3''\,,\ m_z = \mp 4{,}7^\circ$$

2. Misal:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	— 39,1	— 24,7	— 10,6	+ 6,8	+ 30,6	+ 49,0	+ 64,7	+ 80,4	+ 90,0
y	+ 4,75	+ 3,20	+ 2,14	+ 1,30	+ 1,00	+ 1,65	+ 2,55	+ 4,00	+ 5,15

noktalarından geçen münhaninin muadelesini bulmak.



Şekil 2

Cedveldeki kıymetler yardımile noktaları kaim mihverlerde yarlerine taşıyacak olursak bu noktaların takriben ikinci dereceden bir katı mükâfi üzerinde olduklarını görürüz.

Mezkûr münhaninin muadelesini:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

şeklinde yazabiliriz. Şekilden kolayca:

$$x = -\frac{b}{2a} = +26{,}0$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = +1{,}0$$

okuyabiliriz.

$$a = a_0 + \Delta a, \quad b = b_0 + \Delta b, \quad c = c_0 + \Delta c$$

ikame edecek olursak $c_0 = +1{,}60$ olduğundan:

$$b_0 = -0{,}05$$
$$c_0 = +1{,}60$$
$$a_0 = +0{,}001$$

takribi kıymetleri elde olunur.

Hata muadeleleri:

$$y_r + v_r = (a_0 + \Delta a)\,x_r^2 + (b_0 + \Delta b_0)\,x_r + (c_0 + \Delta c)$$
$$v_r = (a_0 + \Delta a)\,x_r^2 + (b_0 + \Delta b)\,x_r + (c_0 + \Delta c) - y$$
$$v_r = x_r^2\,\Delta a + x_r\,\Delta b + \Delta c + l_r$$
$$l_r = a_0\,x_r^2 + b_0\,x_r + c_0 \quad y$$

$l_1 = +0{,}34$	$l_6 = -0{,}10$
$l_2 = +0{,}25$	$l_7 = 0$
$l_3 = +0{,}09$	$l_8 = +0{,}04$
$l_4 = -0{,}08$	$l_9 = +0{,}05$
$l_5 = +0{,}01$	

olduğundan hata muadeleleri:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 15{,}29\ \Delta a' - 3{,}91\ \Delta b' + \Delta c + 0{,}34 \\
v_2 &= 6{,}10\ \Delta a' - 2{,}47\ \Delta b' + \Delta c + 0{,}25 \\
v_3 &= 1{,}12\ \Delta a' \quad 1{,}06\ \Delta b' + \Delta c + 0{,}09 \\
v_4 &= 0{,}46\ \Delta a' + 0{,}68\ \Delta b' + \Delta c + 0{,}08 \\
v_5 &= 9{,}36\ \Delta a' + 3{,}06\ \Delta b' + \Delta c + 0{,}01 \\
v_6 &= 24{,}01\ \Delta a' + 4{,}90\ \Delta b' + \Delta c - 0{,}10 \\
v_7 &= 41{,}86\ \Delta a' + 6{,}47\ \Delta b' + \Delta c \mp 0 \\
v_8 &= 64{,}64\ \Delta a' + 8{,}04\ \Delta b' + \Delta c + 0{,}04 \\
v_9 &= 81{,}00\ \Delta a' + 9{,}00\ \Delta b' + \Delta c + 0{,}05
\end{aligned}
$$

şeklini alır. Bu hata muadelelerinde:

$$\Delta a = \frac{\Delta a'}{100}, \quad \Delta b = \frac{\Delta b'}{10}$$

olduğuna dikkat etmek lâzımdır.

$$
\begin{aligned}
[aa] &= 13428{,}13 & [bb] &= 243{,}84 \\
[ab] &= 1590{,}10 & [bc] &= 24{,}71 \\
[ac] &= 243{,}84 & [cc] &= 9{,}00
\end{aligned}
$$

Ve:

$$
\begin{aligned}
[as] &= 15262{,}07 & [al] &= 11{,}11 \\
[bs] &= 1858{,}68 & [bl] &= -\ 1{,}79 \\
[cs] &= 277{,}55 & [cl] &= 0{,}60
\end{aligned}
$$

olduğundan normal muadeleler:

$$
\begin{aligned}
13428{,}13\ \Delta a' + 1590{,}10\ \Delta b' + 243{,}84\ \Delta c + 11{,}11 &= 0 \\
1590{,}10\ \Delta a' + 243{,}84\ \Delta b' + 24{,}71\ \Delta c - 1{,}79 &= 0 \\
243{,}84\ \Delta a' + 24{,}71\ \Delta b' + 9{,}00\ \Delta c + 0{,}60 &= 0 \\
\hline
15262{,}07\ \Delta a' + 1858{,}65\ \Delta b' + 277{,}55\ \Delta c + 9{,}92 &= 0
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Bu normal muadeleleri hal edecek olursak:

$\Delta c = -\ 0{,}0399$, $\Delta b' = +\ 0{,}05291$ ve $\Delta a' = -\ 0{,}00638$

elde olunur.

$$\Delta a = \frac{\Delta a'}{100}, \quad \Delta b = \frac{\Delta b'}{10}$$

olduğundan:

$$\Delta a = -0{,}00006 \text{ ve } \Delta b = +0{,}005291$$

bulunmakla

$$\begin{aligned} a &= + 0{,}001 - 0{,}00006 = + 0{,}00094 \\ b &= - 0{,}050 + 0{,}00529 = - 0{,}04471 \\ c &= + 1{,}6000 + 0{,}0400 = + 1{,}640000 \end{aligned}$$

elde olunur.

Bu takdirde aranılan muadele:

$$y = + 0{,}00094\, x^2 - 0{,}04471\, x + 1{,}6400$$

bulunmuş olur.

(Devamı var.)