

Plan ve kadaastro:

Rasat silsilelerinin bir tâbi halinde tedkiki

Yazan: Yüksek Mühendis

Hüseyin Bozkır

Fizikî veya astromik her hangi bir hadiseyi rasat etmek suretile mütala etmek mecburiyeti karşısında kalındığı zaman mezkûr hadisenin cereyanında âmil olan kanunların mahiyetini tesbit ve tayin edebilmek için elde edilen rasatlardan tecrübî olarak bir tâbi vucude getirmek ve bu tâbii bilhendese inşa etmek ihtiyacı his olunur.

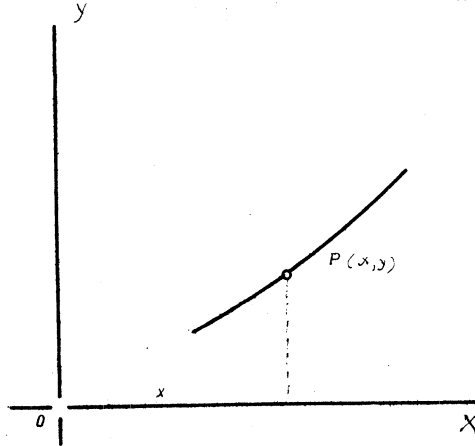
Rasatlar neticesinde elde olunan kıymetleri ox ve oy mihverleri üzerine nakletmek suretile elde olunan noktaların mahalli hendesisi aradığımız tabiin gösterdiği münhanidir. Bu noktalar yekdiğerlerine nekadâr yakın bulunurlarsa münhani o derece büyük bir sıhhatle tayin olunur ve bunun neticesi, mevzubahs olan hadisede âmil olan kanunların mahiyeti bizce o derece vuzuh kesbeder.

Bir tabiin hendesi olarak gösterilmesinde büyük menfaatler vardır. Bu sayede hadiseleri gözle görülebilir bir şekle sokmak, büyük rasat hatalarını kolaylıkla bulabilmek, aynı zamanda aradığımız meçhullerin takribi kıymetlerini de bu grafik sayesinde tayin edebilmek imkânları hasıl olur.

Bu grafik ile, x in her kıymetine mukabil y nin alacağı kıymetleri tesbit edebiliriz. Bu kıymetlerin takribiyeti şeklin hatasına ve aynı zamanda doğruluğuna tabidir.

Bu yazıda, elde mevcut rasatlardan böyle bir tabiin nasıl istihrac olunacağını kısaca anlatacağım.

Yapılan rasatlar hatalı olduklarından mihverlerde yerlerine nakl olunan noktalar hatalıdır. Bunun neticesi olarak elde olacak tabilerinde bir miktar hatalı olacakları gayet tabiidir.



Şekil 1

Şekil 1 de görüldüğü vechile p noktası, verilen bir münhani parçasına ait bir nokta olsun. Mezkûr nokta münhani üzerinde hareket ettiği takdirde vaziyelerinin değişeceği aşikârdır.

Fakat bu tahavvül gelişi güzel olmayup her hangi bir kanun tahtında vukua gelir. p noktasının vaziyeleri arasında mevcut olan

$$y = f (X) \quad (1)$$

münasebeti bizce malûm olduğu takdirde vaziyelerin tahavvüli kanunî bizce malûm demektir.

Şimdiye kadar yazdıklarımızı basit bir misal ile izaha çalışalım.

Bir barometredeki civa sütununun tulûnûn, mevkiin irtifasına göre değiştiği hepimizin malûmudur. Muhtelif irtifalarda yapılan rasadlar şunlardır.

	h	B
1	120,2 m	751,18 mm
2	225,1	742,37
3	270,6	738,50
4	347,6	731,27
5	406,7	726,99
6	492,4	718,16
7	708,1	700,48
8	733,5	697,64
9	768,9	695,23

Barometre ile irtifa tayini usulünün bizce meçhul olduğunu kabul edelim. Yukarıdaki cetveli dikkatle okuyacak olursak, h irtifanın büyümesiyle civa sütununun alçaldığını ve bu alçalmanın takriben bir kanun tahtında vukua geldikçe derhal nazarı dikkatimizi celp eder.

Civa sütununun alçalmasının irtifası ile mütenasip olduğunu gerek cetvelin tedkikinden ve gerekse cetveldeki kıymetleri mihrerlerde yerlerine nakil etmek suretile elde olunacak noktaların yekdigirlerine nazaran vaziyetlerinden anlayabiliriz. O halde $B = f(h)$ tabii hatti bir tâbidir.

$$B = x + h \cdot y \quad (2)$$

diyelim. Bu muadeledeki y , x miktarlarını hal etmek için yukarıdaki cetvelde B , h nin iki muhtelif kıymeti yerlerine koyup neticeleri bulmak kâfidir. Biz burada h irtifalarını hatasız ve B miktarlarını ise hatalı olarak kabul edeceğiz. O halde miktarı tashihleri B ye vermek mecburiyetinde kalıyoruz. h ve B nin her kıymeti için (2) şeklinde bir muadele elde ederiz. O halde her B ye birde miktarı tashih vermek mecburiyetindeyiz.

O halde (2) muadelesi yerine:

$$B + v = x + h y \quad (3)$$

muadelesini ve yahut:

$$v = -B + x + h y$$

ifadesini yazabiliriz. Bu son ifade bir hata muadelesinin umumî şeklidir.

$$L = B \quad b = h \quad a = 1$$

diyecek olursak bu son muadele:

$$v = -L + a x + b y$$

şeklini alır. Bunu müteakip aşağıdaki hesaplar yapılabilir:

N	a	b	-L	b ²	-b L
1	1,0	120,2	— 751,18	14 448	— 90 291,836
2	1,0	225,1	— 742,37	50 670	— 167 107,487
3	1,0	270,6	— 738,50	73 224	— 199 838,100
4	1,0	347,6	— 731,27	120 826	— 254 189,452
5	1,0	406,7	— 726,99	165 405	— 295 666,833
6	1,0	492,4	— 718,16	242 458	— 353 621,984
7	1,0	708,1	— 700,48	501 406	— 496 009,888
8	1,0	733,5	— 697,64	538 022	— 511 718,940
9	1,0	768,9	— 695,23	591 207	— 534 562,347
	9,0	4073,1	—6501,82	2297 666	—2903 006,867

O halde:

$$[aa] = + + 9,0 \quad [ab] = + \quad 4073,1 \quad -[aL] = - \quad 6501,82$$

$$[bb] = + 2297666 \quad -[bL] = - 2903006,867$$

Bu miktarlar normal muadelelerde yerlerine konuldukta:

$$[aa][bb] = + 20 678 994,00$$

$$[ab][ab] = + 16 590 143,61$$

$$[aa][bb] \quad [ab][ab] = + 4 088 850,39$$

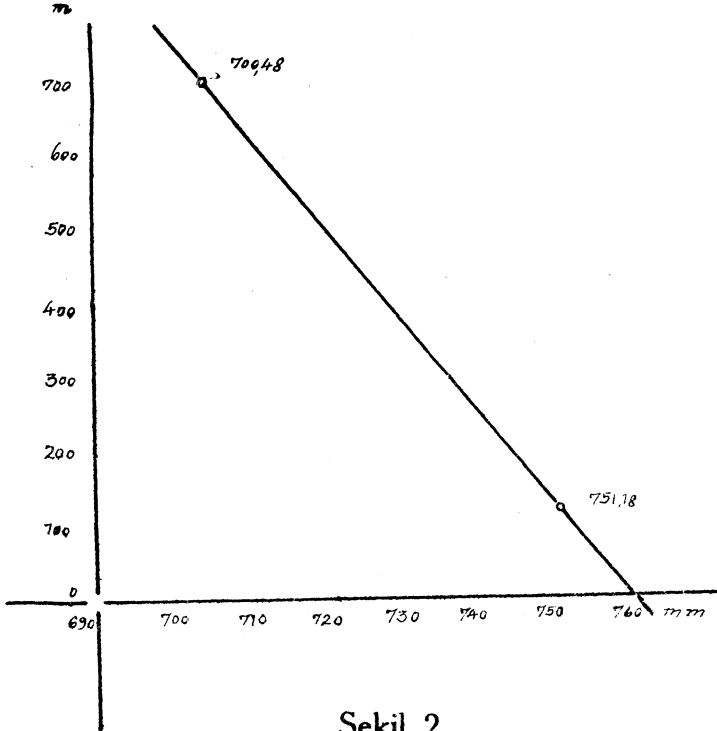
$$\begin{array}{rcl}
 [bb][aL] & = & + 14\,939\,010\,752,12 \\
 [ab][bL] & = & + 11\,824\,237\,811,70 \\
 [bb][aL] - [ab][bL] & = & + 3\,114\,772\,940,42 \\
 [aa][bL] - [ab][aL] & = & - 355\,501,239 \\
 x = \frac{+ 3\,114\,772\,940}{+ 4\,088\,850} & = & + 761,77 \\
 y = \frac{- 355\,501}{+ 4\,088\,850} & = & - 0,08695
 \end{array}$$

x ve y mechulleri tayin olunur. O halde 2 muadelesi:

$$B = 761,77 - 0,08195 h$$

$$h = 11,50 (761,77 - B)$$

şeklini alır ve bu suretle aradığımız kanun bulunmuş olur. Netice şekil 2 de grafik olarak gösterilmiştir.



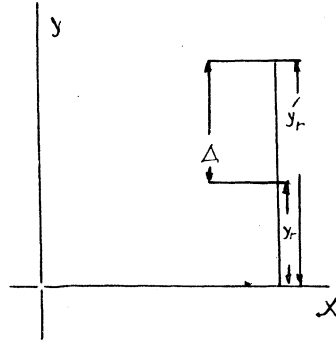
Şekil 2

$$y = f(x)$$

münasebetinin verilmiş olduğunu kabul edelim, Eğer bu ifade hattı ise bu takdirde grafik bir hattı müstakimdir. O halde rasadlarla elde edilmiş olan bir nokta silsilesini bir müstakim ile göstereceğiz. Bunun için x_r ve y_r rasadlarının mevcut olduğunu farz edelim. Gayri kabili ictinap hatalardan dolayı bu vaziyeler hatalıdırlar. Fakat hesabatta :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$$

miktarlarını hatasız olarak kabul etmek ve bütün hatayı y_r miktarlarına tahmil etmek adettir. Tertiplerin ölçülen miktarlarını y'_r ve hakiki kıymetleri y_r ile gösterecek olursak :



Şekil 3

$$y'_r - y_r = \Delta$$

müsavatını yazabiliriz. Muvazene neticesinde bulunan müstakim o suretle geçmelidirki

$$M = \sum_{r=1}^n \Delta^2 = \sum_{r=1}^n (y_r - y'_r)^2$$

ifadesi asgarî olsun. Eğer hakiki tabii $y' = ax + b$ ile gösterecek olursak

$$M = \sum_{r=1}^n (y_r - ax_r - b)^2$$

ifadesi elde olunur. M nin asgari olabilmesi için

$$\frac{\partial M}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial b} = 0$$

şartlarının tahakkuk etmesi lazımdır. O halde :

$$\frac{\partial M}{\partial a} = 2 \sum_{r=1}^n x_r (y_r - a x_r - b) = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial b} = 2 \sum_{r=1}^n (y_r - a x_r - b) = 0$$

Bu iki şarttan :

$$\begin{aligned} \sum x_r y_r - a \sum x_r^2 - b \sum x_r &= 0 & \sum y_r - a \sum x_r - \sum b &= 0 \\ [x_r y_r] - a [x_r^2] - b [x_r] &= 0 & [y_r] - a [x_r] - n b &= 0 \\ a [x_r^2] + b [x_r] &= [x_r y_r] & a [x_r] + n b &= [y_r] \end{aligned}$$

normal muadeleleri elde olunur.

Bu iki muadeleden a ve b meçhul miktarları aşağıdaki tarzda hesap olunur.

$$a = \frac{\begin{vmatrix} [x_r y_r] & [x_r] \\ [y_r] & n \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} [x_r^2] & [x_r y_r] \\ [x_r] & [y_r] \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} [x_r^2] & [x_r] \\ [x_r] & n \end{vmatrix}$$

Bu suretle a ve b miktarları hesap olunmuş ve dolayisile aralararak müstakim bulunmuştur.

Memke ye nazaran mezkûr müstakim grafik olarak aşağıdaki tarzda resm olunur.

$$P_1 (x_1, y'_1), P_2 (x_2, y'_2) \dots P_n (x_n, y'_n)$$

noktalarının verildiğini fakat bu vaziyelerin hatalı olduklarını kabul edelim. Bu noktaları her hangi bir vaziye sisteminde yerlerine nakl edecek olursak laalettayin bir münhani elde ederiz

$$y = f(x)$$

İfadesi bizce malûm olduğu takdirde x_n e tekabül eden y_n a hesap edebiliriz. y_n yerine y'_n nın rasad olunduğunu kabul ettiğimiz takdirde;

$$y'_n - y_n = \Delta_n$$

münsebetini elde ederiz. Şartımıza göre $f(x)$ tabiinin ihtiva ettiği sabit miktarları o suretle tayin etmek lâzımdırki:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n = \sum \Delta = 0$$

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \dots + \Delta_n^2 = \sum \Delta^2 = 0 \text{ asgari}$$

şartları tahakkuk etmek iki mecmuun bir asgari olması lâzımdır.

Yani bu şartları yazmakla p noktalarına en yakın olarak geçen münheniyi arıyoruz demektir. Misalimizdeki münhani bir hattı müstakimdir. Bu müstakimin muadelesini:

$$y = ax + b$$

ile gösterecek olursak:

$$\Delta_1 = y'_1 - ax_1 - b$$

$$\Delta_2 = y'_2 - ax_2 - b$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = y'_n - ax_n - b$$

$$\sum \Delta = \sum y' - a \sum x - nb = 0$$

$$\frac{\sum y'}{n} = a ; \frac{\sum x}{n} = b$$

muadelesini elde ederiz.

$$\frac{\sum y'}{n} = y_0 , \quad \frac{\sum x}{n} = x_0$$

vaz ettiğimiz takdirde:

$$y_0 = a x_0 + b$$

ifadesi elde olunur. Bu muadeledeki x_0 ve y_0 nin delalet ettikleri manaları araştıralım.

Sistemi teşkil eden noktalardan her birinin kitlelere malik olduğunu ve bu kitlelerin yekdiglerine müsavi olduğunu kabul edelim. Bu müşterek kıymeti m ile gösterecek olursak:

$$x_0 = \frac{\sum m x}{\sum m} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \quad y_0 = \frac{\sum m y}{\sum m} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

ifadeleri elde olunur.

$$m_1 + m_2 = m_3 = \dots$$

olduğundan

$$x_0 = \frac{\sum x}{\sum m} , \quad y_0 = \frac{\sum y}{\sum m}$$

neticesine vasil olunur.

O halde x_0 , y_0 müsavi kitlelere malik olan bir nokta sisteminin merkez sikletinin vaziyeleridir. Buna nazaran aranan müstakim, sistemin merkez sikletinden geçtiği anlaşılır. Müstakim merkez siklet noktasından geçtiği için

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n = \Sigma \Delta = 0$$

şartıda tahakkuk eder.

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \dots + \Delta_n^2 = \Sigma \Delta^2 = \text{asgarî}$$

şartı ise bize müstakimin geçmesi icap eden ikinci bir noktayı ita eder. Şimdi S noktasından geçen ve y mihverine T_1 de kat eden bir g_1 müstakimi resm edip her P_n noktası için bu müstakime nazaran

$$y'_n - y_n = \Delta$$

mesafesini ölçelim. Elde olunan bu miktarların ve murabbalarının

Şekil 4 e nazaran T_2 noktasının aranılan ikinci nokta olduğu görünmektedir.

Werkmeister, ikinci noktanın bulunmasında:

$$[y_r x_r] = a [x_r^2] + b [x_r] = 0 \quad (1)$$

muadelesinden istifade etmektedir. Metoduna nazaran ikinci nokta grafik olarak aşağıdaki şekilde bulunmaktadır. (1) muadelesini:

$$\frac{[y_r x_r]}{[x_r]} = a \frac{[x_r^2]}{[x_r]} + b$$

şeklinde yazabiliriz. Aradığımız müstakimin muadelesi $y' = ax + b$ şeklindedir. Vaziyeleri:

$$\frac{[y_r x_r]}{[x_r]} ; \frac{[x_r^2]}{[x_r]}$$

olan noktasının $y' = ax + b$ müstakimi üzerinde bulunduğunu (2) muadelesinden istihrac edebiliriz. Bu vaziyelere aşağıdaki manayı atfedebiliriz. Merkezi sıkletin vaziyelerinde yani:

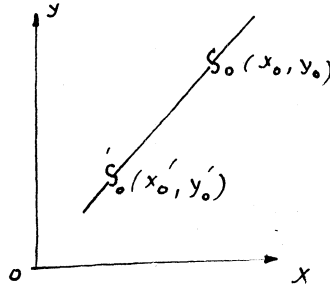
$$x_0 = \frac{\sum x_m}{\sum m} ; y_0 = \frac{\sum y_m}{\sum m}$$

ifadelerinde her noktaya faslasını kitle olarak verecek olursak bu vaziyelerden:

$$x'_0 = \frac{[x_r^2]}{[x_r]} ; y'_0 = \frac{[x_2 y_2]}{[x_r]}$$

vaziyeleri elde olunur. O halde bu merkez sıkletin vaziyeleri (2) muadelesini tahkik ediyor demektir. Her iki noktanın vaziyeleri malûm olduktan sonra aranılan müstakimin muadelesini yazabiliriz. Şekil 5.

$$\frac{x - x_0}{x'_0 - x_0} = \frac{y - y_0}{y'_0 - y_0}$$



Şekil 5

Misal — :

Periy tatbiki mihanik namındaki eserinde bir tulumbanın enerji sarfiyatını irtifam bir tabii olarak göstermektedir.

İrtifa = h m	6	15	30	60	90	120 m	x
Q m.K.g.	10,25	10,92	11,26	12,52	13,78	15,04 mK.g.	y

Bu tabiiyeti hattı bir muadele ile göstermek matlubdur.

Muvazeneyi grafik olarak yapmak istediğimiz takdirde, verilen kıymetler ianesile merkez sıklet noktalarının vaziyelerini hesap etmemiz lâzımdır. Bu suretle hesap veya grafik yolile hesap olunurlar.

$$x_0 = \frac{\sum x}{n} = \frac{6+15+30+60+90+120}{6} = 53,5 \text{ m}$$

$$y_0 = \frac{\sum y}{n} = \frac{10,25+10,42+11,26+12,52+13,78+15,04}{6} = 12,21 \text{ m Kg}$$

Bu suretle S'_0 noktası bulunur. S'_0 noktasının vaziyelerini hesaplamak için aşağıdaki şekilde bir cetvel yapılır:

$$x'_0 = \frac{[x_r^2]}{[x_r]} \quad y'_0 = \frac{[x_r y_r]}{[x_r]}$$

x_r	x_r^2	y_r	$x_r y_r$
6	36	10,25	61,50
15	225	10,42	156,30
30	900	11,26	337,80
60	3600	12,52	751,20
90	8100	13,78	1240,20
120	14400	15,04	1804,80
321	27261	73,27	4351,80

Cetvele nazaran:

$$\begin{aligned} [x_r] &= 321; & [x_r^2] &= 27261 \\ [y_r] &= 73,27 & [x_r y_r] &= 4351,80 \end{aligned}$$

olduğundan:

$$x'_0 = \frac{27261}{321} = 84,92 \text{ m}$$

$$y'_0 = \frac{4351,80}{321} = 13,56 \text{ m. K. g.}$$

bulunur ve bu suretle S'_0 noktası bulunmuş olur.

$$\frac{h - 53,5}{84,92 - 53,5} = \frac{Q - 12,21}{13,56 - 12,21}$$

münasebetinden:

$$Q = 0,0429 h + 9,92$$

mudelesi elde olunur.

Meseleyi hesap yolile muvazene etmek istenildiği takdirde cetvelde mevcut noktaların lâalettayin ikisinden geçen müstakim alınır. Bu müstakimin muadelesi:

$$\frac{Q' - 11,26}{h - 30} = \frac{3,78}{90}$$

$$Q' = 0,042 h + 10$$

dir. h yi hatasız olarak kabul ediyoruz. a ve b nin bu takribi kıymetlerine miktarı tashihler ilâve edecek olursak bu miktarların

hakiki kıymetleri bulmuş oluruz. Bu takdirde mesele hal olunmuş demektir. Bu miktarı tashihler:

$$\Delta Q, \Delta a, \Delta b$$

olsun. O halde:

$$Q = Q' + \Delta Q$$

$$a = a' + \Delta a$$

$$k = b' + \Delta b$$

münasebetleri elde olunur. Muvazene edilmiş müstakimin muadelesi $Q = a h + b$ olduğundan:

$$Q' + \Delta Q = (a' + \Delta a) h + b' + \Delta b$$

$$Q' = a' h + b'$$

$$\Delta = \Delta Q = a' h + h \cdot \Delta a + b' + \Delta b - a' h - b'$$

$$\Delta = \Delta Q_r - \Delta a \cdot h - \Delta b$$

Bu noktalar için:

$$\Delta_r = \Delta Q_r - \Delta a h_r - \Delta b$$

ifadesi elde olunur.

$$M = \sum (\Delta Q_r - \Delta a h_r - \Delta b)^2$$

ifadesinin bir asgari olması lâzımdır. O halde:

$$\frac{\partial M}{\partial \Delta a} = -2 \sum_{r=1}^6 h_r (\Delta Q_r - \Delta a h_r - \Delta b) = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial \Delta b} = -2 \sum_{r=1}^6 (\Delta Q_r - \Delta a h_r - \Delta b) = 0$$

Bu iki şarttan:

$$[h_r \Delta Q_r] - \Delta a [h_r^2] - \Delta b [h_r] = 0$$

$$[\Delta Q_r] - \Delta a [h_r] - n \Delta b = 0$$

normal muadelesi elde olunur.

$$\Delta Q = Q - Q' \quad Q' = 0,042 h + 10 \quad m = 6$$

olduğundan:

$$\Delta Q_1 = Q - 0,042 h_1 - 10$$

$$\Delta Q_2 =$$

$$\Delta Q_3 =$$

ifadeleri yazılır. Aşağıdaki cedvel yapılan hesabı göstermektedir.

[h]	Q	Q'	[ΔQ]	[h ΔQ]	[h²]
6	10,25	10,252	— 0,002	— 0,012	36
15	10,42	10,63	— 0,210	— 3,150	225
30	11,26	11,26	0,000	0,000	900
60	12,52	12,52	0,000	0,000	3600
90	13,78	13,78	0,000	0,000	8100
120	15,04	15,04	0,000	0,000	14400
321			— 0,212	— 3,162	27261

Cetvele nazarın:

$$\Delta a = \frac{6. 3,162 - 0,212. 321}{321^2 - 6. 27261} = 0,00081$$

$$\Delta b = \frac{0,212. 27261 - 3,162. 321}{321^2 - 6. 27261} = - 0,0787$$

Bu miktarı tashihler hesaplandıktan sonra:

$$a = a' + \Delta a = 0,042 + 0,00081 = 0,04281$$

$$b = b' + \Delta b = 10 - 0,0787 = 9,9213$$

$$Q = (0,042 + \Delta a) h + 10 + \Delta b$$

$$Q = 0,04281 h + 9,9213$$

muadelesi elde olunur. Mezkûr muadele hesap yolu ile muvazene edilmiş müstakimin muadelesidir. Bu netice grafik ile bulunan münhaniye çok güzel uymaktadır.

(Devamı var.)