OTOMATİK KARTOĞRAFYADA UYGULANAN VEKTÖR GEOMETRİ

Doç.Dr. Mehmet YERCİ

1_ GİRİŞ

Kartoğrafik (topoğrafik) veri işlemesinde düşünülen iki prensip sıfırdan başlayarak işlem zamanı ve bellek zorlamasıdır. Bununla beraber bellek zorlaması bir değişkendir ve kullanılacak bilgisayarın gerçek şekillenmesine bağlıdır. İşlem zamanı giriş/çıkış (Input/output) veya eğer daha yaygınlaştırılırsa, veri temel düzenleme sistemi, gerçek veri işleme, alt yaptırım (Sub_routine) bölmesindeki yaptırım işlemlerinin hızı Vb. gibi farklı işlemleri içeren bir deyimdir. Veri temel düzenleme sistemleri akla uygun derecede elverişli olarak dikkat çekmişlerdir ve aynı zamanda aletsel bağlantılıdır ; bu nedenle burada daha fazla tartışılmayacaktır. Görülecek olan, diğer ayrıntı ve elemanlara göre noktaların gerçek konumlarını "anlamak" için test parametrerelerini içeren iki ve üç boyutlu nokta, çizgi ve yüzey problemlerine bakma metodudur. Yaklaşım esas olarak vektöryeldir, en az düzeyde bilgisayar arşivi ister ve işlemde (Belki de trigonometrik fonksiyonlar dışında) hızlıdır.

2- "KLASİK"METOD (Sadece iki boyutlu)

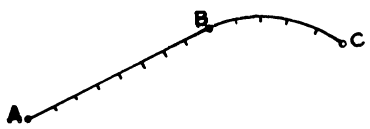
En genel ADE (Otomatik çizim aletleri)XY_ düzlemindeki işlemler için nokta, düz çizgi ve daire için şu eşitlikler vardır:

a) $\left.\begin{array}{l} x = c_x \\ y = c_y \end{array}\right\}$ nokta

b) $y=y_A + \dfrac{x\_x}{x_B-x_A} \quad (y_B-y_A)$ düz çizgi

c) $(x\_x_C)^2 + (y\_y_C)^2 = R^2$ daire

Yapılan iki düz çizginin veya bir düz çizgi ile bir çemberin kesişmesi, değer koyma ve bir dizi eşitliği çözmek ve sonra noktanın istenen olup olmadığını test etme olayıdır. Eğer bu bilgisayar zamanında binlerce kez yapılırsa pahalı olması doğaldır.



Şekil :1

Şekil : 1 de düzgün aralıklarla dikine işaretli çizgileri olan bir doğru çizilmiştir. Bu hem ayak hem de kesikli dik çizgilerin ikisi için, düz çizgi boyunca doğrusal enterpolasyon ve eğri kısmında dairesel enterpolasyon olarak isimlendirilir.

Buna ek olarak daha ileri derecede sorunlar vardır, örneğin

a) Çizgilerin ötelenmesi

b) Dairesel yay işlemi.

Bu nedenle açık olarak görülmektedir ki bu sorunları çözümlemede bazı yeni düşünceler iyi bir gelişme olacaktır.

3_ ÖNERİLEN METOD, KULLANILAN PARAMETRİK VE VEKTÖR ÖZELLİKLERİ (Sadece iki boyutlu)

Hepsinden önce yukarıda a), b) ve c) de sözü edilen üç eşitliğin parametrik şekli

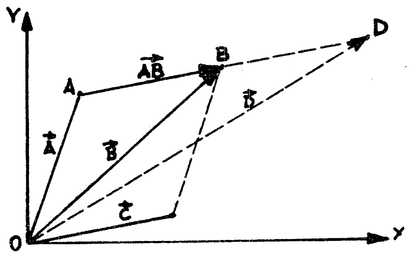
d) $$\left.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}\right\}$$ nokta

e) $$\left.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}\right\}$$ doğru parçası

f) $$\left.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\ \phi \\ \mathrm{Sin}\ \phi \end{pmatrix}\right\}$$ çember

e) ve f) deki parametreler λ ve ϕ dır. Eğer onlar tesbit edilmiş birer ğer olarak kabul edilirse e) ve f) ikisi de d) ye indirgenerek bir nokta olur.

Parametrik gösterimi vektöryel şekilde toplamak zor değildir. Doğru parçası kil: 2 de gösterilmiştir.



Şekil : 2

Aşağıdaki işlem yapılabilir.

$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$, fakat $\vec{AB} = \vec{C}$ böylece $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

) deki λ değerini değiştirerek D noktası AB doğru parçasının yukarı veya şağısına kaydırılabilir. Böylece D noktası

$$\vec{D} = \vec{A} + \lambda.(\vec{B} - \vec{A})$$

larak ve gerçekte AB doğru parçası üzerinde herhangi bir nokta olarak anımlanır. Biz D yi $\lambda = 2$ olan bir nokta olarak gösterelim. Böylece $\vec{AD} = 2\vec{AB}$ olur.

e) nin gösterimi

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$ ya dönüşür.

arasında bir değişimli λ ister. Bunınla birlikte her iki halde $\lambda <$ 1 dir.

Kalem aşağıda'nın entervali için genel terim

$$g) \quad \left[\lambda_o + \frac{(L+I)\ .\ (i-1)}{d} \right] < \lambda \leqslant \left[\lambda_o + \frac{L.i + I.\ (i-1)}{d} \right]$$

olacaktır. λ_o bir sabit , $i = 1, 2, 3 ... n$, $\lambda < 1$ dir.

Benzer olarak kalem yukarıda entervalleri içinde aşağıdakini elde ederiz.

$$h) \quad \left[\lambda_o + \frac{L.i + I.\ (i-1)}{d} \right] < \lambda \leqslant \left[\lambda_o + \frac{(L+I).\ i}{d} \right]$$

Dairesel bir yay boyunca (veya tüm bir çember) işlem yukarıdakinin aynıdır. L ve I kiriş + uzunluklarıdır. ve karşılık $\Delta\ \phi$ler

$\Delta\ \phi_1$: R. Sin $(-\Delta\phi_1/2) = L/2$ $\qquad$ $\Delta\ \phi_1 = -\ 2$ arc Sin(L/2R)

$\Delta\ \phi_2$: R. Sin $(-\Delta\phi_2/2) = I/2$ $\qquad$ $\Delta\ \phi_2 = -\ 2$ arc Sin(I/2R)

olacaktır.

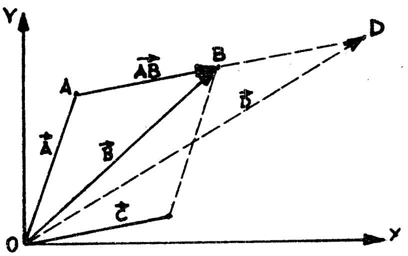
Kalem aşağıda entervali

$$i) \quad \left[\phi_o \ -2.\ (\text{arcSin}(L/2R) + \text{arc Sin}\ (I/2R).\ (i-1) \right]$$
$$\left[\phi_o \ -2.i.\text{arc Sin}(L/2R) - 2.(i-1)\,\text{arc Sin}\ (I/2R) \right]$$

olacaktır. $\phi_o = \phi$ sol, $i = 1, 2, 3 ... n$, $\phi > \phi$ sağ (Şekil:3 de ϕsağ $= \phi_B$)

e) ve f) deki parametreler λ ve ϕ dır. Eğer onlar tesbit edilmiş birer ğer olarak kabul edilirse e) ve f) ikisi de d) ye indirgenerek bir nokta olur.

Parametrik gösterimi vektöryel şekilde toplamak zor değildir. Doğru parçası kil: 2 de gösterilmiştir.



Şekil : 2

Aşağıdaki işlem yapılabilir.

$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$, fakat $\vec{AB} = \vec{C}$ böylece $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

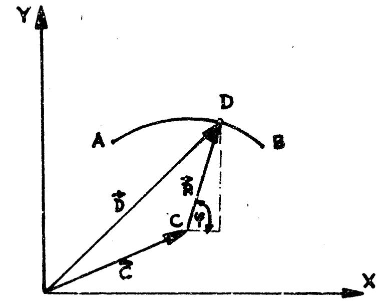
) deki λ değerini değiştirerek D noktası AB doğru parçasının yukarı veya aşağısına kaydırılabilir. Böylece D noktası

$$\vec{D} = \vec{A} + \lambda.(\vec{B} - \vec{A})$$

larak ve gerçekte AB doğru parçası üzerinde herhangi bir nokta olarak anımlanır. Biz D yi $\lambda = 2$ olan bir nokta olarak gösterelim. Böylece $\vec{AD} = 2\vec{AB}$ olur.

e) nin gösterimi

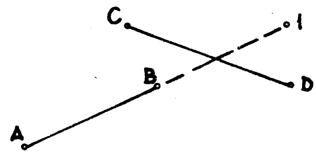
$$\vec{D} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$ ya dönüşür.



Şekil : 3

Benzer olarak aynı şeyi daire yayı için de (veya tüm çember) yapabiliriz. $\vec{D} = \vec{C} + \vec{R}$ (Şekil:3' e bakınız). Şimdi D noktası çember üzerinde ϕ nin bir nokta ve sadece bir nokta olduğu çember üzerinde bir nokta gibi tanımlanacaktır. Böylece f) yi e) ye benzer ϕ nin verilen bir aralıkta kaldığı bir şekilde tekrar yazabiliriz.

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + R. \begin{pmatrix} \text{Cos } \phi \\ \text{Sin } \phi \end{pmatrix}$$



Şekil :4

Üç temel eşitlik vektör şeklinde

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \qquad \text{nokta}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \lambda. \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad \text{doğru parçası}$$

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \text{Cos } \phi \\ \text{Sin } \phi \end{pmatrix} \qquad \text{Çember}$$

dir.

İki doğru parçasının kesişimi şekil: 4 de gösterildiği gibidir. Hesaplanması

$$x = x_A + \lambda.(X_B - x_A) = x_C + \mu.(x_D - x_C)$$

$$y = y_A + \lambda.(y_B - y_A) = y_C + \mu.(y_D - y_C)$$

şeklinde olacaktır.

λ ve μ nün çözümü, iki bilinmeyenli iki lineer eşitliğin çözümünü benimsemek olacaktır. Eğer şimdi soru " iki doğru parçası kesişiyor mu?" ise cevabı açıkça "hayır" dır. Bu sadece λ ve μ değer teriminin yoklanmasıyla görülebilir. Eğer $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ ve $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ ise kesişme noktası gerçektir. Bununla beraber eğer iki koşul bir arada gerçekleşmiyorsa, doğrular bir doğru parçasının dışında birleşirler. Böylece şekil:4 de $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ ve $\lambda > 1$, diğer bir deyimle doğru parçaları düzlemde kesişmeyen bir durum elde edeceğiz.

Eğer bir dolu çizgi yerine kesikli çizgi istenirse, kesik çizgi çizme aleti olmayan bir ADE de e) ve f) formüllerini kullanarak aşağıdaki şekilde yapılabilir. Ustalık parametrelerin, kalem aşağıda ve kalem yukarıda için entervalle değişir halde bırakmaktır. Kalem aşağıda çizgi uzunluğu L ve kalem yukarıda çizgi uzunluğu I dır. Şimdi d nin doğru parçası üzerinde iki nokta arasındaki uzaklık olduğu, kalem aşağıda bir doğru parçası üzerinde λ "eski λ" $\leqslant \lambda \leqslant$ "eski λ" + L/d arasında değişecektir. Benzer olarak kalem yukarıda ile doğru parçası

" eski λ " + L/d < $\lambda \leqslant$ "eskiλ " + L/d + I/d arasında bir değişimli λ ister. Bununla birlikte her iki halde $\lambda < 1$ dir.

Kalem aşağıda'nın entervali için genel terim

$$g) \quad \left[\lambda_o + \frac{(L+I)\ .\ (i-1)}{d}\right] < \lambda \leqslant \left[\lambda_o + \frac{L.i+I.\ (i-1)}{d}\right]$$

olacaktır. λ_o bir sabit , $i = 1, 2,3... n$, $\lambda < 1$ dir.

Benzer olarak kalem yukarıda entervalleri içinde aşağıdakini elde ederiz.

$$h) \quad \left[\lambda_o + \frac{L.i+I.\ (i-1)}{d}\right] < \lambda \leqslant \left[\lambda_o + \frac{(L+I).\ i}{d}\right]$$

Dairesel bir yay boyunca (veya tüm bir çember) işlem yukarıdakinin aynıdır. L ve I kiriş + uzunluklarıdır. ve karşılık $\Delta\ \phi$ler

$\Delta\ \phi_1$: R. Sin $(-\Delta\phi_1/2) = L/2$ $\qquad$ $\Delta\ \phi_1 = -\ 2$ arc Sin(L/2R)

$\Delta\ \phi_2$: R. Sin $(-\Delta\phi_2/2) = I/2$ $\qquad$ $\Delta\ \phi_2 = -\ 2$ arc Sin(I/2R)

olacaktır.

Kalem aşağıda entervali

$$i) \quad \left[\phi_o \ -2.\ (\text{arcSin}(L/2R) + \text{arc Sin}\ (I/2R).\ (i-1)\right]$$
$$\left[\phi_o \ -2.i.\text{arc Sin}(L/2R)-2.(i-1)\text{arc Sin}\ (I/2R)\right]$$

olacaktır. $\phi_o = \phi$ sol, $i = 1,2,3...n$, $\phi > \phi$ sağ (Şekil:3 de ϕsağ $= \phi_B$)

Kalem yukarıda entervalleri için

$$j)\ \left[\phi_o - 2.i.\mathrm{arc\ Sin}\ (L/2R) + 2.(i-1)\mathrm{arc\ Sin}\ (I/2R)\right] < \phi \leqslant \left[\phi_o - 2.i(\mathrm{arc\ Sin}\ (L/2R) + \mathrm{arc\ Sin}\ (I/2R))\right]$$

elde ederiz.

Eğer g) ile i) ve h) ile j) karşılaştırılırsa benzerlikler açıktır. λ ve ϕ parametreleri için θ , kalem aşağıda (dL eşittir $\Delta\ \phi$ ve$\Delta\ \lambda_{i}$ (=L/d)), parametrelerde bölgesel değişiklikler için dL ve kalem yukarıda parametrelerdeki değişiklikler için dI kullanarak kalem aşağıda, doğru parçası ve dairesel yay için genel formülü elde ederiz.

$$g,i)\quad \left[C_o + (dL + dI).(i-1)\right] < \theta \leqslant \left[C_o + dL.i + dI.\ (i-1)\right]$$

ve benzer olarak kalem yukarıda için

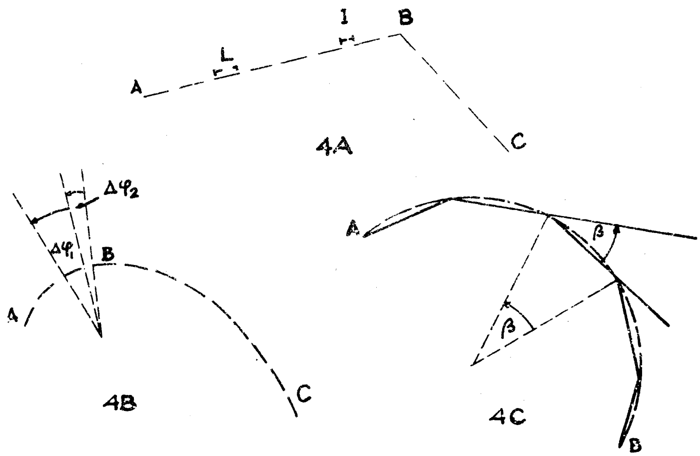
$$h,j)\quad \left[Co + dL.i + dI.(i-1)\right] < \theta \leqslant \left[Co + (dL + dI).i\right]$$

elde ederiz.

Uygulamada, yeni bir doğru parçası çiziminde Co ve λo ikiside sıfıra eşittir. Bununla beraber doğru parçasının sonraki kısmı (aynı doğru üstünde) için kalem havada sırasının küçük bir elemanı salt estetik görüş açısından aktarılmalıdır ki bu sıfırdan başlamıyor demektir.

Dairesel yay parçası için Co veya ϕo , ilk konumda sol taraftaki başlangıç açısı ϕo (Şekil:3 te = ϕ A) ile önceki çizgi parçasından aktarılan kalem yukarıda veya kalem aşağıda için bir miktar toplamına eşittir.

Sadece kalem aşağıda entervali ile ilgilenildiğinden yalnız g,i) veya i) yi kullanarak bir bilgisayar programı yapmak artık kolaydır.



Şekil 4A ve 4B düz çizgi ve dairesel yaylar için kesik çizgi yapımını göstermektedir. Örneğin ADE nin sadece lineer enterpolasyon kolaylığı (Veya yalnız onu kullanarak) olduğunda dairesel enterpolasyonun nasıl yapıldığını açıklamak kolaydır. Şekil 4C de A dan B ye dairesel yay, B ye son bağlantı çizgisi dışında eşit aralıklı küçük düz çizgi parçalarına ayrılmıştır. İki kiriş arasındaki β açısı, bir kirişi gören merkez açıya eşittir. Dairesel yayın düzgünlüğü, β nın boyutu şimdi bir sorudur, bazı belirli noktalarda insan gözü β açısı bir başlangıç değerinden öteye küçüldüğü zaman birleşme yerlerini seçemez.

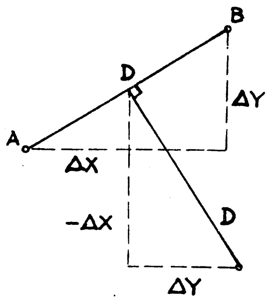
Böylece tüm sorun $\phi_i = \phi_A - i.\ \beta \qquad \phi_i \geqslant \phi_\beta$

$$i = 1.n$$

olduğu f) formülünün basitçe doğru bir uygulamasıdır.

Her ϕ_i için dairesel yay üzerinde kesikli bir nokta elde ederiz. $\phi_i \leqslant \phi_\beta$ olduğunda işlem sona erer ve son nokta B ye düz bir çizgi parçasıyla birleştirilir. Böylece (i-1) noktası B ye bağlanır.

Şekil 5 te AB doğrusuna, merkezden geçen, AB kadar uzunluklu bir dik çizdik. Bu yeni doğru için eşitlik doğrudan doğruya şöyle yazılabilir.



Şekil : 5

$$\vec{N} = \begin{Bmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{Bmatrix} + \lambda . \begin{Bmatrix} y_B - y_A \\ x_A - x_B \end{Bmatrix}$$

Bu çevre üzerinde bulunan A,B ve C üç noktasından merkezi bulma probleminde doğrudan kullanılabilir. $\vec{N}$ gibi , BC ye orta noktasında dik başka bir $\vec{M}$ konur. Şimdi problem $\vec{M}$ ile $\vec{N}$ nün kesişiminin hesaplanmasına indirgenir.

Şekil : 1 deki problemler hatırlanırsa aşağıdaki gibi çözülebileceğini görürüz.

Ayak noktaları

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad \lambda_i = \frac{t}{d} . i$$

$$i = 1,n$$

t = çizgi entervali, n,$\lambda <$ 1 ile sınırlıdır. Sorun olan formül e) dir. Her değeri için bir ayak noktası vardır. Kesik çizgi parametreleri T = kesik çizgi uzunluğu olduğu, $0 \leq \mu \leq \frac{T}{d}$ olarak hesaplanabilir ve kesik çizgi uzunluğu için

k) $$\vec{n}_i = \begin{pmatrix} x_A + \lambda_i \ (x_B - x_A) \ ) \\ y_A + \lambda_i \ (y_B - y_A) \ ) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_B - y_A \\ x_A - x_B \end{pmatrix}$$

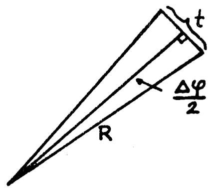
yazabiliriz.

Dairesel yay ve kesik çizgi için ϕ eşit adımlarla fakat $\phi_B \leqslant \phi \leqslant \phi_A$ olarak değişmelidir. Bu eşit adımlar

$$R.\ \mathrm{Sin}\ \frac{\Delta\phi}{2} = \frac{t}{2} \qquad \Delta\phi = 2\ \mathrm{arc\ Sin}\ \frac{t}{2R}$$

(Şekil:6 ya bakınız).

den çözülür. t= kesik enterval kirişidir (ϕ_A ve ϕ_B için şekil 8 deki tanımlara bakınız).



Şekil:6

Daire üzerindeki ayak noktaları

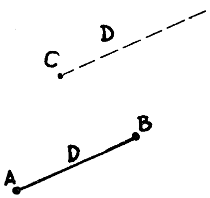
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\ (\phi_A - \Delta\phi . i) \\ \mathrm{Sin}\ (\phi_A - \Delta\phi . i) \end{pmatrix}$$

Böylece dairesel yay boyunca kesik çizgiler için eşitliği şöyle yazabiliriz.

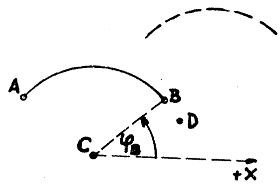
1) $$\vec{m}_i = \begin{pmatrix} (x_C + R.\ \mathrm{Cos}\ (\phi_A - \Delta\phi\ .i)\ ) \\ (y_C + R.\ \mathrm{Sin}\ (\phi_A - \Delta\phi\ .i)\ ) \end{pmatrix} - \rho \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\ (\phi_A - \Delta\phi\ .i) \\ \mathrm{Sin}\ (\phi_A - \Delta\phi\ .i) \end{pmatrix}$$

$0 < \rho < T$;(+ işareti kesik çizgilerin tümsek tarafında olması istendiği takdirde kullanılır).

Bir doğru parçasının ötelenmesi de basit bir işlemdir.



Şekil:7



Şekil:8

Şekil 7 ve 8 deki ötelenmiş kesik çizgi parçalarının eşitlikleri şunlardır.

$$\vec{F}7 = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

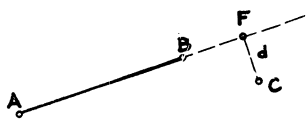
$$\vec{F}8 = \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} \text{Cos } \phi \\ \text{Sin } \phi \end{pmatrix}$$

R, AB yayının yarıçapı ve ϕ , $\phi_A \leqslant \phi \leqslant \phi_B$ değerleri arasında değişen, ϕ_A AC ve pozitif X ekseni arasındaki, ϕ_B, BC ile sonuncu arasındaki açıdır.

Klasik metotta bir noktadan bir doğruya olan uzaklık normal şekilde şöyle yazılabilir.

m) $$d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sözü edilen uzaklığın cevabını verir fakat ayak noktası hakkında bir fikir vermemektedir. Durum şekil 9 da görüldüğü gibi olabilir.



Şekil : 9

Önerilen metotta ayak problemi şu şekilde çözülür.

A : C den AB üzerine dik $\vec{P}= \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_B - y_A \\ x_A - x_B \end{pmatrix}$

$P \in [FC]$

B : Sonra λ

$$x=x_A + \lambda\cdot(x_B-x_A) = x_C + \mu \cdot(y_B-y_A)$$

$$y=y_A + \lambda\cdot(y_B-y_A) = y_C + \mu \cdot(x_A-x_B)$$

dan μ yok edilerek

$$\mu =(x_A+ \lambda.(x_B-x_A)-x_C)/(y_B-y_A)$$

ve λ çözülür.

$$y_A + \lambda \cdot(y_B-y_A)= y_C+ \frac{x_A +\lambda.(x_B-x_A)-x_C}{y_B - y_A} \cdot (x_A - x_B)$$

$$y_A\cdot(y_B-y_A)+\lambda \cdot(y_B-y_A)^2= y_C (y_B-y_A)+ (x_A-x_C)(x_A-x_B)+\lambda(x_B-x_A)(x_A-x_B)$$

n) $$\lambda=\frac{(y_A-y_C)(y_A-y_B)+(x_A-x_C)(x_A-x_B)}{(y_B-y_A)^2+ (x_B-x_A)^2} = \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\vec{AB} \cdot \vec{AB}} \right)$$

Örneğin ,

$A = (-5,2)$, $B = (3,4)$, $C = (8,1)$

$\vec{AB}=\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{P}=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ her $P \in [CF]$ için

her $Q \in [AB]$ için

$$Q=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$$

AB ve CF her ikisi için

$$\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$$

$$-5+8\lambda=8+2\mu$$
$$2+2\lambda=1-8\mu$$

λ çözülürse

$$\begin{array}{r}-20+32\lambda=32+8\mu\\ 2+2\lambda=1-8\mu\\ \hline -18+34\lambda=33\end{array}\qquad \lambda=\frac{51}{34}=\frac{3}{2}$$

izleyerek $\mu=\frac{1}{2}$ ve

$$|\vec{CF}|=|-1/2|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}\right|=+1/2\quad\sqrt{4+64}=\sqrt{17}=d$$

n) bir kez daha hatırlanırsa, eğer F,AB aralığında değilse ki $\lambda>1$ veya $\lambda<0$ durumudur, daha ileri işlem yapılmasına gerek yoktur. Bu örneğin belirtilmiş bir koordinat dizisi yardımıyla bir doğru parçası araştırmasında , örneğin ekleme devresinde kullanılabilir. Böylece her doğru parçası için bir λ hesaplanır ve denenir ve yalnız $0\leqslant\lambda\leqslant1$ durumunda d hesaplanır. λ nın araştırma toleransı içinde olup olmadığına bağlı olarak doğru parçasının aranılan olup olmadığına karar verilir.

F ve d nin hesabı aşağıdaki şekilde yapılır. Hesaplanan λ değeri

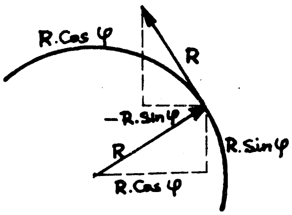
$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}.$$

eşitliğinde koyarak F ayak noktasını elde ederiz ve d

$$d=\sqrt{(x_C-x_F)^2+(y_C-y_F)^2} \qquad \text{veya} \quad d=|\mu|.|AB|$$

den çözülebilir. (Bunun yerine m) kullanılabilir fakat aynı program modülü burada tanımlanan metotta kullanmak mümkün değildir).

o) Bir çembere teğet



Şekil :10

Şekil:10 dan bir çembere teğet doğrudan doğruya şöyle yazılabilir.

p) $$\vec{A}=\begin{pmatrix} x_C + R.\ \mathrm{Cos}\ \phi \\ y_C + R.\ \mathrm{Sin}\ \phi \end{pmatrix} + \lambda\ .R \begin{pmatrix} -\mathrm{Sin}\ \phi \\ \mathrm{Cos}\ \phi \end{pmatrix}$$

4. ÜÇ BOYUTLU UYGULAMALAR

d) , e) ve f) ye benzer olarak

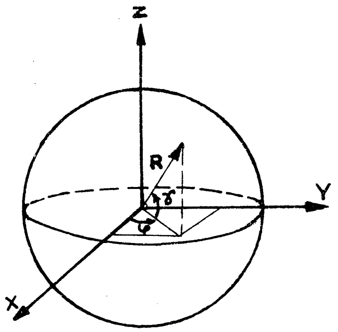
q) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix}$$ nokta

r) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - X_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$ çizgi

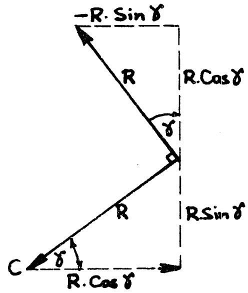
s) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - X_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}$$ yüzey

t) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} + R. \begin{pmatrix} \text{Cos } \gamma \ \ \text{Cos } \phi \\ \text{Cos } \gamma \ \ \text{Sin } \phi \\ \text{Sin } \phi \end{pmatrix} \quad \text{küre} \quad (\text{Şekil :11})$$

için eşitlikleri yazabiliriz.



Şekil :11



Şekil:12

t) den görülebileceği gibi boylam ve enlem tüm merkez açıların doğrudan dönüşümünden sonra uygulanabilir.

$\vec{R}$, $\overrightarrow{R.\ \text{Cos}\ \gamma}$ düzleminde küreye bir teğet şöyle yazılabilir.

u) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C + R \ \text{Cos } \gamma . \text{ Cos } \phi \\ y_C + R \ \text{Cos } \gamma . \text{ Sin } \phi \\ R \text{ Sin } \gamma \end{pmatrix} \mu . R \begin{pmatrix} -\text{Sin}\gamma \text{ Cos } \phi \\ -\text{Sin}\gamma \text{ Sin } \phi \\ \text{Cos } \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{Şekil:12})$$

$-\vec{R}$ ü elde edilen teğet vektörle kesiştirilirse $-\vec{R}$ ve ilk vektöre dik ikinci bir teğet vektör elde ederiz.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\text{Cos}\gamma\ \text{Cos}\phi & -\text{Cos}\gamma\ \text{Sin}\phi & -\text{Sin}\gamma \\ -\text{Sin}\gamma\ \text{Cos}\phi & -\text{Sin}\gamma\ \text{Sin}\phi & \text{Cos}\gamma \end{vmatrix} = \vec{i}\left[-\text{Cos}\gamma\ \text{Sin}\phi\ \text{Cos}\gamma - \text{Sin}\gamma\ \text{Sin}\phi\ \text{Sin}\gamma\right] -$$

$$\vec{j}\left[-\text{Cos}\gamma\ \text{Cos}\phi\ \text{Cos}\gamma - \text{Sin}\gamma\ \text{Cos}\phi\ \text{Sin}\gamma\right] + \vec{k}\left[\text{Cos}\gamma\ \text{Cos}\phi\ \text{Sin}\gamma\ \text{Sin}\phi -\right.$$

$$\left.\text{Sin}\gamma\ \text{Cos}\phi\ \text{Cos}\gamma\ \text{Sin}\phi\right] = \vec{i}\left[-\text{Sin}\phi\right] + \vec{j}\left[\text{Cos}\phi\right] + \vec{k}\left[\emptyset\right]$$

Eğer bu tekrar yazılırsa

$$v)\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C + R \ \ \mathrm{Cos}\gamma \ \mathrm{Cos}\phi \\ y_C + R \ \ \mathrm{Cos}\gamma \ \mathrm{Sin}\phi \\ R \ \ \mathrm{Sin}\gamma \end{pmatrix} + \lambda R \begin{pmatrix} -\mathrm{Sin}\phi \\ \mathrm{Cos}\phi \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

küreye teğet bir düzlem

$$x)\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C + R \ \mathrm{Cos}\gamma \ \mathrm{Cos}\phi \\ y_C + R \ \mathrm{Cos}\gamma \ \mathrm{Sin}\,\phi \\ R \ \mathrm{Sin}\gamma \end{pmatrix} + \lambda R \begin{pmatrix} -\mathrm{Sin}\phi \\ \mathrm{Cos}\phi \\ \emptyset \end{pmatrix} + \mu . R \begin{pmatrix} -\mathrm{Sin}\gamma \ \mathrm{Cos}\phi \\ -\mathrm{Sin}\gamma \ \mathrm{Sin}\phi \\ \mathrm{Cos}\gamma \end{pmatrix}$$

genel şeklini alacaktır.

Eğer γ ve μ sıfır yapılırsa x). p) ye böylece iki boyutlu olarak çembere bir teğete indirgenmiş olur, eğer v) de $\gamma=0$ konursa beklendiği gibi v) de p) ye indirgenir.

Benzer olarak r) ve s) de eğer $\mu=\emptyset$ ve $z_1 = z_2 = \emptyset$ ise her ikisi de $z = \emptyset$ düzleminde aynı doğru parçasına indirgenir ve t) de $\gamma=\emptyset$ olduğunda t) bir düzlem içinde bir daireye indirgenir.

Doğru kesişmeleri, kesik çizgiler v.b. iki boyutlu için olduğu gibi üç boyutlular için de aynı yolla yapılır. Daha karışık bir durum iki doğru parçasının tam olarak kesişmemesi ve en kısa uzaklığın ve /veya en kısa uzak - lığın ayak noktalarının çözülmesi olabilir.

Eğer iki doğru parçasıyla başlarsak

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \\ z_4 - z_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ her ikisine dik olan $\vec{d}$ vektörü

$$\vec{d} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (x_2-x_1) & (y_2-y_1) & (z_2-z_1) \\ (x_4-x_3) & (y_4-y_3) & (z_4-z_3) \end{vmatrix} = \vec{i}\left[(y_2-y_1)(z_4-z_3)-(y_4-y_3)(z_2-z_1)\right]$$

$$-\vec{j}\left[(x_2-x_1)(z_4-z_3)-(x_4-x_3)(z_2-z_1)\right] + \vec{k}\left[(x_2-x_1)(y_4-y_3)-(x_4-x_3)(y_2-y_1)\right] \; : \vec{d} =$$

$$d_1 . \vec{i} + d_2 . \vec{j} + d_3 . \vec{k}$$

Eğer $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nün paralel olmadıklarını düşünürsek $\vec{d}$ nün geçebileceği yani ayak noktaları, biri A ve biri B üzerinde sadece iki yegane nokta vardır.

r) ye göre

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}\right) + \phi . \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} + \mu . \begin{pmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \\ z_4 - z_3 \end{pmatrix}\right)$$

üç bilinmeyenli üç eşitlikten başka bir şey olmayan eşitliği yazabiliriz.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ de λ ve μ yerleştirerek ayak noktalarını elde ederiz ve d

$$d = \sqrt{(x_{FA}-x_{FB})^2 + (y_{FA}-y_{FB})^2 + (z_{FA}-z_{FB})^2}$$

yardımıyla çözülebilir.

Bununla beraber d aranan yegane değer ise klasik yaklaşım daha uygun ve daha hızlı olacaktır.

$\vec{A}$ den geçen ve $\vec{B}$ yönünde olan (böylece $\vec{B}$ ne paralel) bir düzlem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + \mu . \begin{pmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \\ z_4 - z_3 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

λ ve μ yü yok ederek bir düzlemin klasik eşitliğini buluruz.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Normal şekilde d

$$d = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

den çözülür.

Bu vektör araçlarıyla, küreden düzleme veya bir silindire (dikey şekilde) gibi basit projeksiyon problemlerini, merkezsel bir projeksiyon için bir projeksiyon merkezi veya ortogonal bir projeksiyon olması halinde bir düzleme dik bir yön seçilerek yapılır.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\ \phi \\ \mathrm{Sin}\ \phi \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Fotogrametrik uygulamada "ışın demeti" metodu çoğunlukla yöneltme işlemleriyle bağlantılı olarak sık kullanılır.

5. SONUÇ

Şimdi elimizde iki doğru parçasının, bir doğru parçasının bir küreyle (çember) kesimi, teğet işlemleri v.b. için kullanılacak konumunun iki veya üç boyutlu olma sorusundan etkilenmeyen matematik bir model vardır.

Ek olarak istenen zamanda bir noktanın gerçek konumunu belirleyen λ, μ, β, ve ϕ test paramatreleri vardır. Bir eşitlikte parametre tayin edildiği zaman eşitlik sadece bir noktayı temsil eder.

Bu araştırmanın hedeflerinden biri olan test kolaylığı, düzgünlük ve nisbeten hızlı yapısıyla bir mini bilgisayar şekillenmesi için bir dizi program modülü iki ve üç boyutlu problemlerde kullanılabilir. Diğeri ise burada açıklandığı ümit edilen program boyutlarındaki düzenleme idi.