

Ortogonal Olmayan Coğrafi Ağı Harita Projeksiyonlarında Tissot Endikatrix Elemanlarının Belirlenmesi

(The Determination of Elements of Tissot's Indicatrix in Map Projections with non-orthogonal Graticule)

İbrahim Öztuğ BİLDİRİCİ

Selçuk Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Harita Mühendisliği Bölümü, Konya
bildirici@selcuk.edu.tr

ÖZ

Harita projeksiyonlarında bir nokta etrafında oluşan deformasyonları yorumlamak için kullanılan Tissot endikatrixinin yarıçapları ve yönünün belirlenmesi harita projeksiyonunda coğrafi ağın izdüşümü ortogonal değilse maksimum ve minimum uzunluk deformasyon yönlerinin meridyen ve paraleller yönünde olmaması nedeniyle basit bir problem değildir. Bu çalışmada konu çeşitli kaynaklarda önerilen yaklaşımlar verilerek tartışılmıştır. Temel ders kitaplarında bu konuda ya hiç bilgi bulunmamakta ya da her koşulda doğru sonuç verebilecek bağıntılar verilmemektedir. Her koşulda çözüm sağlayan yaklaşımlar makale çalışmalarında sunulmuştur. Bu yaklaşımlar tartışılmış ve uygulanabilirlikleri yazar tarafından geliştirilen yazılım ile test edilmiştir. İki harita projeksiyonunda sayısal uygulama ve endikatrix gösterimi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Harita Projeksiyonu, Tissot Endikatrişi, Projeksiyon Deformasyonları

ABSTRACT

Tissot's indicatrix or ellipse of distortion provides a mathematical tool that enables to understand local scale changes around a point. The determination of the elements of the ellipse is somehow problematic in map projections with non-orthogonal graticule. In most of the textbooks, the direction of the ellipse is not handled, or confusing formulae are given. In this paper, the problem is discussed in detail and some methods suggested by scientific papers are examined and programmed by the author. The methods valid in any projection and in any part of the reference surface are given. Applications with two non-orthogonal projections are presented.

Keywords: Map projection, Tissot's Indicatrix, distortions in map projections

1. GİRİŞ

Harita projeksiyonları orijinal yüzeydeki bir noktayı projeksiyon düzlemine aktaran iki fonksiyonla ifade edilir. Az sayıda projeksiyon göz ardı edilirse harita projeksiyonlarının perspektif izdüşüm olma özelliği genel olarak yoktur. Başka bir ifade ile genel olarak harita projeksiyonlarında referans yüzeyindeki noktalar ile bunları izdüşümlerini birleştiren doğruların ortak bir kesişim noktası (izdüşüm merkezi)

yoktur. Yeryüzü için tanımlanan referans yüzeyi ister küre ister elipsoit olsun kapalı bir yüzeydir. Şekil değişimi olmaksızın kapalı yüzeylerden düzleme izdüşüm mümkün değildir. Bu bağlamda açı, alan ve uzunluk değişimleri ortaya çıkar. Bu değişimler projeksiyon deformasyonları olarak adlandırılırlar. Harita projeksiyonları bu üç büyüklükten birinin değişmemesini sağlayacak şekilde tasarlanabilirler. Bu şekilde geliştirilen projeksiyonlar da genel olarak perspektif izdüşüm değillerdir.

Bir harita projeksiyonunun genel eşitlikleri, φ enlemi, λ boylamı göstermek üzere iki fonksiyonla ifade edilir.

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi, \lambda) \\ y &= y(\varphi, \lambda) \end{aligned} \quad (1)$$

Projeksiyon deformasyonları Fransız matematikçi-kartograf Tissot (1824-1897) tarafından ortaya atılmış olan deformasyon elipsi ya da Tissot endikatrişi düşüncesine dayanılarak incelenir.

Tissot endikatrişi bir nokta etrafında diferansiyel anlamda oluşan deformasyonları yansıtır. Diferansiyel anlamdaki değişimler sonlu büyüklüklerdeki değişimleri yansıtmayabilir. Sonlu büyüklüklerde oluşan değişimleri tam olarak yansıtabilecek bir yaklaşım Goldberg ve Gott (2007) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmada sonlu büyüklükteki bir daire ve dairenin merkezinde birbirine dik iki jeodezik eğrinin izdüşümünden yararlanılmış ve bu gösterim Goldberg-Gott endikatrişi olarak adlandırılmıştır.

(1) eşitlikleri gerçek anlamlı ve normal konumlu projeksiyonlarda ortogonal bir coğrafi ağ oluştururlar. Diğer bir deyişle meridyenler ve paralellerin izdüşümleri birbirlerini dik keserler. Bu durumda ana deformasyon yönlerinin meridyenler ve paraleller yönünde olması nedeniyle projeksiyonun deformasyonları incelemek daha kolaydır. Tissot endikatrişi de meridyen ve paralellere göre yönlendirilir. Coğrafi ağı ortogonal olmayan projeksiyonlarda ise ana

deformasyon yönleri meridyen ve paraleller yönünde değildir. Gerçek anlamı olmayan silindirik (pseudocylindrical), polikonik projeksiyonlar ortogonal olmayan coğrafi ağı sahip projeksiyon türlerine örnek olarak verilebilir. Bu tür projeksiyonlarda deformasyon elipsinin yönlendirilmesi kolayca yapılamaz. Bu konu çoğu temel ders kitabında ya hiç ele alınmamış ya da genel geçerli bir yaklaşım ortaya konmamıştır. Genel geçerli çözümlerin verildiği bazı makale çalışmaları kartografik kaynaklarda yer almaktadır. Bu makalede bu çalışmalar irdelenip önerilen yaklaşımlar geliştirilen bir yazılım ile hem görsel hem de sayısal olarak iki harita projeksiyonu ile test edilmiştir.

İkinci bölümde konu ile ilgili temel bilgiler ilgili kaynaklar da irdelenerek ele alınmış, üçüncü bölümde iki projeksiyonda gerçekleştirilen sayısal uygulama verilmiştir. Dördüncü bölümde ise genel bir değerlendirme yapılmıştır.

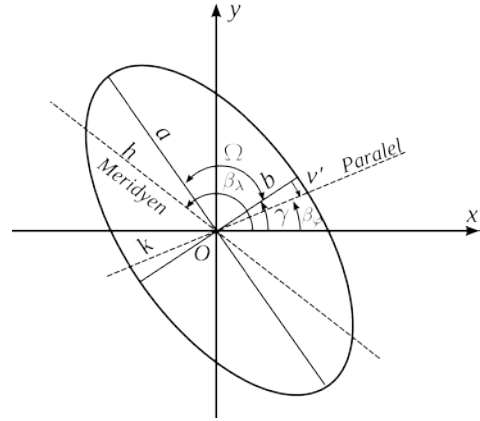
2. DEFORMASYON KAVRAMI VE TISSOT ENDİKATRİSİ

Tissot bir yüzeyin bir başka yüzeye izdüşümünde bir nokta etrafında oluşan diferansiyel ölçek değişiminin en büyük ve en küçük değerlerinin hem orijinal hem de izdüşüm yüzeyinde birbirine dik doğrultularda oluştuğunu göstermiştir. Diferansiyel ölçek ya da doğrultu deformasyonu izdüşüm yüzeyindeki diferansiyel anlamda bir uzunluğun bunun karşılığı olan orijinal yüzeydeki diferansiyel uzunluğa oranıdır (Uçar vd, 2011).

$$m = \frac{ds'}{ds} \quad (2)$$

Tissot teoremi, orijinal yüzeydeki diferansiyel anlamdaki bir dairenin izdüşümü ile de açıklanır. Diferansiyel anlamda ölçek değişiminden dolayı bu dairenin yarıçapı izdüşüm yüzeyinde bir genel olarak elips çizer. Elips yarıçapları ise diferansiyel ölçeğin en büyük ve en küçük değerlerine karşılık gelir. Burada oluşan elipse "Deformasyon Elipsi" ya da "Tissot Endikatrısı" denir.

Normal konumlu ve gerçek anlamı yardımcı yüzeylerden yararlanılarak tanımlanan harita projeksiyonlarında coğrafi ağı (meridyenler ve paraleller) izdüşümü ortogonaldır. Başka bir deyişle meridyen ve paralellerin izdüşümleri birbirlerine diktir. Bu durumda en büyük ve en küçük deformasyonlar meridyenler ve paraleller yönünde oluşur, Tissot Endikatrısı de buna göre yönlendirilmiştir olur.



Şekil 1: Endikatrıs elemanları

Eğik konumlu ve gerçek anlamı olmayan projeksiyonlarda ise ana deformasyon yönleri meridyen ve paraleller yönünde değildir. Bu durumda ana deformasyon yönlerini belirlemek için Gauss'un birinci temel biçiminden yararlanarak herhangi bir yöndeki diferansiyel ölçeği ifade etmek gerekir (düzlemde ve kürede).

$$m^2 = \frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} \quad (3)$$

$$= \frac{ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2}{Ed\varphi^2 + Gd\lambda^2}$$

Projeksiyon düzleminde temel büyüklükler (1) eşitliklerinin kısmi türevlerinden elde edilir.

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \quad (4)$$

Ortogonal coğrafi ağı sahip olmayan projeksiyonlarda meridyenler (h) ve paraleller (k) yönündeki uzunluk deformasyonları aşağıdaki gibi elde edilir, ancak bunlar ana deformasyon yönlerindeki deformasyonlar değildir, dolayısı ile endikatrısın elemanlarına (a ve b, Şekil 1) karşılık gelmezler.

$$h = \sqrt{\frac{e}{E}} = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2}$$

$$k = \sqrt{\frac{g}{G}} = \frac{1}{R \cos \varphi} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2} \quad (5)$$

Endikatrix doğrusal elemanları (elips yarıçapları, Şekil 1) aşağıdaki iki denklemin çözümünden elde edilir.

$$a^2 + b^2 = \frac{e}{E} + \frac{g}{G}$$

$$ab = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{EG}}$$

Sistemin çözümü:

$$(a+b)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$(a-b)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2$$

Birim küre kabulüne göre çözüm
($\sqrt{E} = 1, \sqrt{G} = \cos \varphi$) :

$$(a+b)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$+ \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$(a-b)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$+ \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2$$

Endikatrixin yönlendirilmesi için büyük ekseninin x eksenine ile (ya da y eksenine) yaptığı açının belirlenmesi gerekir. Bu amaçla paralel daire ve meridyen izdüşümlerinin x eksenine ile yaptığı açılar ve elipsin parametrik denklemden yararlanılabilir.

$$\tan \beta_\varphi = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)}$$

Projeksiyon düzleminde elipsin parametrik denkleminin paralel daire doğrultusundaki yarıçap (k) ve paralel daire yönünden itibaren alınan açı

v' için düzenlenirse aşağıdaki eşitlik yazılabilir (Bildirci, 2015).

$$\frac{k^2 \sin^2 v'}{a^2} + \frac{k^2 \cos^2 v'}{b^2} = 1 \quad (10)$$

Elips küçük yarıçapı (b) ile paralel daire izdüşümü arasındaki açı:

$$\tan v' = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{k^2}{b^2}}{\frac{k^2}{a^2} - 1}} \quad (7) \quad (11)$$

Buradan bulunan v' açısı elipsin küçük eksenine ile paralel daire izdüşümü arasındaki açıdır (Şekil 1). Küçük eksen ile x eksenine arasındaki açı:

$$\gamma = \beta_\varphi + v' \quad (12)$$

(11) eşitliği karesel bir ifade olan (10) eşitliğinden elde edildiği için v' açısının hem pozitif hem de negatif değeri (10) eşitliğini sağlar. Bu şekilde endikatrixin yönlendirilmesi güçtür. İlgilenilen projeksiyona ve ilgili noktanın küredeki konumuna göre değişir. Ayrıca (11) eşitliği Richardus ve Adler (1972), Koçak (1999), Uçar vd (2011) gibi kaynaklarda elips büyük eksenine ile paralel daire izdüşümü arasındaki açı olarak verilmiştir ki doğru değildir.

Uçar ve İpbüker (1998) (11) bağıntısını kullanarak uygulamalar vermişlerdir. Bu uygulamaların projeksiyonlara özgü bazı kabuller ve düzlem koordinat eksenlerinin seçimi gibi özel durumlarda geçerli olduğu değerlendirilmektedir. Yazar tarafından (11) bağıntısı ile benzer sonuçlara ulaşılamamıştır.

Canters (2002) v' açısı için aşağıdaki bağıntıyı önermiştir.

$$\sin v' = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{a^2}{k^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}}} \quad (13)$$

Burada v' açısını paralel daire izdüşümü ile elips büyük eksenine arasındaki açı olarak verilmekte, açının işareti ise meridyen ve paraleller arasındaki açı Ω (projeksiyonda) ile belirlenmektedir. Buna göre $\Omega > 90^\circ$ ise v' pozitif, değilse negatif alınarak elips büyük eksenine ile x eksenine arasındaki açı,

$$\gamma = \beta_\varphi - v' \quad (14)$$

olarak bulunur. Ω ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sin \Omega = \frac{ab}{hk} \quad (15)$$

Bu yaklaşım birinci çeyrek küre ($\varphi \geq 0, \lambda \geq 0$) ve üçüncü çeyrek küre ($\varphi \leq 0, \lambda \leq 0$) için doğru sonuç vermektedir. Bunun nedeni (15) eşitliğindeki pay ve paydanın karesel ifadelerden elde edilmesi ve hep pozitif olmasıdır.

Bouuaert v.d. (2016) ise (13) eşitliğinden bulunan v' açısının işaretini projeksiyon düzlemindeki Gauss'un birinci derece temel büyüklüklerinden f ile belirlemektedir. Buna göre (13) eşitliği ile hesaplanan açının işareti (4) eşitliği ile bulunan büyüklüğün (f) işaretinin tersidir.

$$\text{signum}(v') = -\text{signum}(f) \quad (16)$$

Bu yöntem her çeyrek dairede sonuç vermektedir.

Endikatis elemanlarının elde edilmesi için lineer cebire dayalı bir yaklaşım Laskowski (1989) tarafından önerilmiştir. Laskowski (1) denklemlerinin doğrusallaştırılması ile oluşturulan $\underline{A}$ matrisinin Tekil Değer Ayrıştırma (SVD: Singular Value Decomposition) yöntemi ile üç matrisin çarpımı biçiminde ifade edilmesinden yararlanmıştır.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\underline{A} = \underline{U} \underline{D} \underline{V}^T$$

$\underline{U}$ ve $\underline{D}$ matrisleri SVD yöntemi ile elde edildikten sonra,

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

olmak üzere endikatis elemanları,

$$a = d_1$$

$$b = d_2 \quad (19)$$

$$\tan \gamma = \frac{u_{21}}{u_{11}}$$

şeklinde elde edilir. Laskowski yöntemi 4 çeyrek kürede de doğru sonuç verir.

Bildirici (2015) kısmi türevlere gerek kalmadan endikatisin yaklaşık olarak elde edilmesi için bir nümerik yöntem önermiştir. Burada kürede diferansiyel anlamda kabul edilebilecek bir dairenin izdüşümünün endikatriye çok yakın bir elips oluşturduğu düşüncesinden hareket edilmiştir. Bu daire üzerinde hesaplanan üç noktanın projeksiyon düzlemindeki koordinatlarından yararlanılarak merkezi ve üzerinde bulunan üç nokta ile koni kesiti denklemi oluşturularak elips elemanları belirlenmiştir. Bu şekilde tanımlanan endikatis kuasi endikatis olarak adlandırılmıştır.

Bildirici vd (2011) de ise endikatisin görselleştirilmesine yönelik bir çalışma sunulmuştur. Burada endikatis yerine sonlu büyüklükte ancak yeterince küçük seçilmiş bir dairenin projeksiyondaki izdüşümünün endikatis ile görsel anlamda özdeş olduğu gösterilmiş, herhangi bir kodlama ve hesaplama çalışması gerekmeden verilere küre üzerinde tanımlanmış çoklu doğru biçimindeki dairelerin eklenmesi ile endikatis gösterimine ulaşılacağı ortaya konmuştur. Bu şekilde eklenen daire verileri diğer konilerle birlikte projeksiyon düzlemine aktarılınca endikatis gösterimine özdeş bir gösterim elde edilmiş olmaktadır.

Endikatis elemanları elde edildikten sonra doğrultu, açı ve alan deformasyonları hesaplanır.

Doğrultu deformasyonu:

$$\sin \omega = \frac{a-b}{a+b} \quad (20)$$

Açı deformasyonu:

$$w = 2\omega \quad (21)$$

Alan deformasyonu:

$$p = ab \quad (22)$$

Belli noktalardaki endikatislerin abartılarak gösterilmesi ile de görsel olarak projeksiyon düzlemindeki deformasyonların karakteri

hakkında bilgi verilmiş olur. Deformasyonların görselleştirilmesinde eş deformasyon eğrileri oluşturulması da bir başka yöntemdir.

3. UYGULAMA

Endikatri elemanlarının belirlenmesi için yukarıda özetlenen yöntemler yazar tarafından geliştirilen ve yüzden fazla projeksiyonun resim dosyaları ya da dxf formatında dosyalar olarak elde edilmesini sağlayan Earth Flattener adlı yazılımda test edilmiştir. Yazılımın endikatri gösterimleri oluşturma, deformasyon değerleri vb bilgileri belli noktalar için listeleme gibi özellikleri de bulunmaktadır. Boumaert v.d. (2016) ve Laskowski (1989) tarafından önerilen yöntemlerin değişik noktalar ve projeksiyonlarda tutarlı sonuçlar verdiği de bu yazılımla test edilip görülmüştür. Bildirici vd (2011) de görselleştirme amaçlı önerilen yaklaşım ve Bildirici (2015) de önerilen kuasi endikatri yaklaşımı da sözü edilen yazılım ile test edilerek yayınlanmıştır.

Uygulama olarak ekvatora göre simetrik olmayan Bonne Projeksiyonu ve gerçek anlamda olmayan azimutal bir projeksiyon olan Hammer-Aitoff Projeksiyonu seçilmiştir. Her iki projeksiyonda da kısmi türevlerin hepsi sıfırdan farklıdır. Endikatri elemanları Boumaert v.d. (2016) yöntemi ile hesaplanmıştır.

Bonne Projeksiyonu gerçek anlamda olmayan konik bir projeksiyon olup, yeryüzünün tamamının izdüşümü yapılırsa kalp biçiminde bir görüntü sergiler. Alan koruma özelliğine sahiptir.

Projeksiyon eşitlikleri (Snyder, 1987, s.140):

$$\begin{aligned}\rho &= R(\cot \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi) \\ E &= R \frac{(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{\rho}\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin E \\ y &= R \cot \varphi_1 - \rho \cos E\end{aligned}$$

Kısmi türevlerde kolaylık açısından (23) eşitlikleri, birim küre varsayımı ve $\lambda_0 = 0$ alınarak düzenlenebilir.

$$\begin{aligned}\rho &= \cot \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi \\ E &= \frac{\lambda \cos \varphi}{\rho}\end{aligned}\quad (24)$$

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin E \\ y &= \cot \varphi_1 - \rho \cos E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} &= -1 & \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \varphi} &= \frac{\lambda(\cos \varphi - \rho \sin \varphi)}{\rho^2} & \frac{\partial E}{\partial \lambda} &= \frac{\cos \varphi}{\rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} &= \sin E & \frac{\partial x}{\partial E} &= \rho \cos E \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} &= -\cos E & \frac{\partial y}{\partial E} &= \rho \sin E \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \frac{\partial x}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -\sin E + \frac{\lambda \cos E (\cos \varphi - \rho \sin \varphi)}{\rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \cos E \cos \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \cos E + \frac{\lambda \sin E (\cos \varphi - \rho \sin \varphi)}{\rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \sin E \cos \varphi\end{aligned}\quad (25)$$

Endikatri elemanları tüm küreye dağılan 65 noktada hesaplanarak Tablo 1'de gösterilmiştir. Şekil 2'de ise endikatri gösterimi ile birlikte Bonne Projeksiyonu'nda bir dünya haritası yer almaktadır. Hesaplamalarda standart paralel olarak $\varphi_1 = 45^\circ$ seçilmiştir.

Tablo 1'deki değerlerin Şekil 2 ile uyumlu olduğu görülmektedir. Alan koruma özelliği gereği $ab = 1$ olduğu da tablo değerleri kontrol edilirse görülebilir. Ancak burada yuvarlatma hatalarından dolayı 1 den küçük sapmalar ortaya çıkabilir.

Hammer-Aitoff Projeksiyonu alan koruyan gerçek anlamda olmayan azimutal bir projeksiyondur. Projeksiyon eşitlikleri aşağıdaki gibidir (Maling, 1992, s.118).

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{2R\sqrt{2} \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}} \\
 y &= \frac{R\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}}
 \end{aligned}
 \quad (26)$$

Kısmi türevler (birim küre kabulü ile):

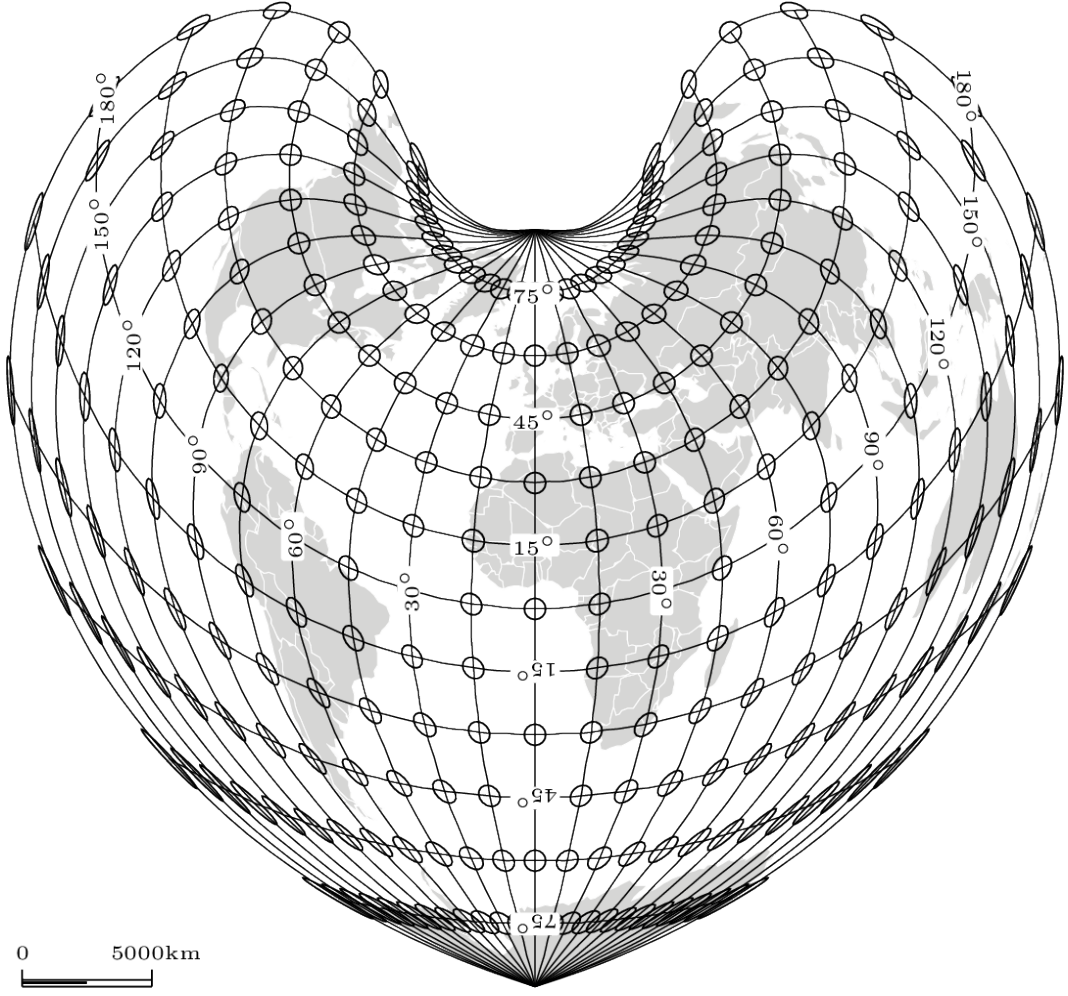
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -\sqrt{2} \left\{ \frac{\sin \varphi \sin \frac{\lambda}{2} \left(2 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \right)}{\left(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \right)^{3/2}} \right\} \\
 \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\cos \varphi \left(2 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \right) + \cos \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{2} \left(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \right)^{3/2}} \\
 \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \left(2 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \right) + \cos^2 \varphi}{\sqrt{2} \left(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \right)^{3/2}} \\
 \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{\sin \varphi \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{2\sqrt{2} \left(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \right)^{3/2}}
 \end{aligned}
 \quad (27)$$

Bonne Projeksiyonu'nda kullanılan nokta kümesi ile endikatis elemanlarının hesaplaması Hammer-Aitoff Projeksiyonu için de yapılmış sonuçlar Tablo 2'de, endikatis görselleştirmesi ise Şekil 3'de verilmiştir.

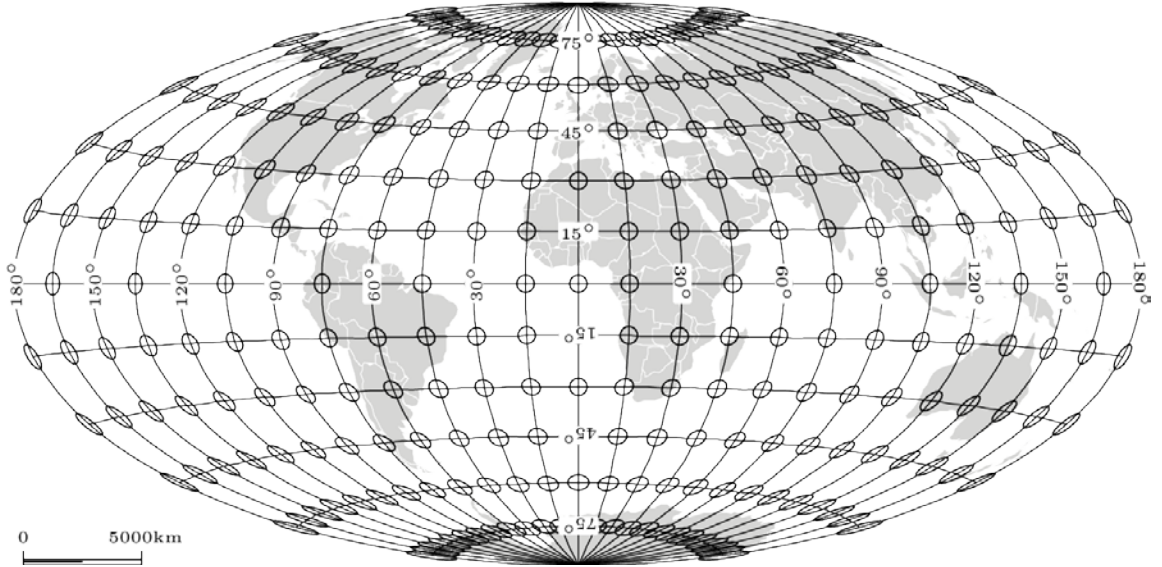
Şekil 3 ve 4'deki haritalar yazar tarafından geliştirilen Earth Flattener yazılımı ile üretilmiştir.

4. SONUÇ

Bu çalışma ile ortogonal coğrafi ağı sahip olmayan harita projeksiyonlarında Tissot endikatrişi ya da deformasyon elipsinin elemanlarının ve doğrultusunun belirlenmesi problemi ele alınmıştır. Bu konuda genel olarak hem Türkçe hem de yabancı ders kitaplarında yeterli bilgi bulunmamaktadır. Programlama açısından irdelendiğinde her koşulda doğru değerleri veren yaklaşımlar metinde değinilmiş olan makalelerde verilmiştir. Yazar tarafından geliştirilen yazılım ile bu yaklaşımlar test edilmiş ve uygulanmıştır. Ortogonal olmayan coğrafi ağı sahip iki projeksiyonda uygulama yapılarak sonuçlar verilmiştir. Konunun Türkçe katografya kaynaklarına kazandırılması da bu çalışmanın kazanımlarından biri olarak değerlendirilebilir.



Şekil 2: Bonne Projeksiyonu'nda dünya



Şekil 3: Hammer-Aitoff Projeksiyonu'nda dünya

Tablo 1: Bonne Projeksiyonu'nda endikatris elemanları

φ°	λ°	x_{km}	y_{km}	a	b	γ°
-60	-180	-9502.46	-8971.04	3.5564	0.2812	132.52203
-60	-150	-8045.95	-9782.57	3.0565	0.3272	135.40609
-60	-120	-6520.76	-10456.20	2.5723	0.3888	137.57375
-60	-90	-4939.90	-10986.20	2.1113	0.4736	138.76900
-60	-60	-3316.88	-11368.03	1.6852	0.5934	138.72349
-60	-30	-1665.55	-11598.44	1.3095	0.7636	137.33765
-60	0	0.00	-11675.47	1.0000	1.0000	0.00000
-60	30	1665.55	-11598.44	1.3095	0.7636	42.66235
-60	60	3316.88	-11368.03	1.6852	0.5934	41.27651
-60	90	4939.90	-10986.20	2.1113	0.4736	41.23100
-60	120	6520.76	-10456.20	2.5723	0.3888	42.42625
-60	150	8045.95	-9782.57	3.0565	0.3272	44.59391
-60	180	9502.46	-8971.04	3.5564	0.2812	47.47797
-30	-180	-13592.00	744.29	3.0744	0.3253	94.47004
-30	-150	-12232.84	-1799.68	2.6660	0.3751	103.17946
-30	-120	-10403.41	-4029.55	2.2727	0.4400	111.24268
-30	-90	-8174.04	-5859.59	1.9007	0.5261	118.49398
-30	-60	-5630.44	-7219.45	1.5582	0.6418	124.80429
-30	-30	-2870.40	-8056.86	1.2550	0.7968	130.19969
-30	0	0.00	-8339.62	1.0000	1.0000	180.00000
-30	30	2870.40	-8056.86	1.2550	0.7968	49.80031
-30	60	5630.44	-7219.45	1.5582	0.6418	55.19571
-30	90	8174.04	-5859.59	1.9007	0.5261	61.50602
-30	120	10403.41	-4029.55	2.2727	0.4400	68.75733
-30	150	12232.84	-1799.68	2.6660	0.3751	76.82054
-30	180	13592.00	744.29	3.0744	0.3253	85.52996
0	-180	-11172.63	8505.90	2.2117	0.4521	54.85284
0	-150	-11312.77	5184.95	1.9731	0.5068	69.10897
0	-120	-10486.90	1965.28	1.7459	0.5728	82.98465
0	-90	-8765.54	-878.19	1.5324	0.6526	96.46344
0	-60	-6295.69	-3102.64	1.3354	0.7488	109.56639
0	-30	-3288.24	-4518.12	1.1573	0.8641	122.36804
0	0	0.00	-5003.77	1.0000	1.0000	0.00000
0	30	3288.24	-4518.12	1.1573	0.8641	57.63196
0	60	6295.69	-3102.64	1.3354	0.7488	70.43361
0	90	8765.54	-878.19	1.5324	0.6526	83.53656
0	120	10486.90	1965.28	1.7459	0.5728	97.01535
0	150	11312.77	5184.95	1.9731	0.5068	110.89103
0	180	11172.63	8505.90	2.2117	0.4521	125.14716
30	-180	-6700.33	10812.83	1.3347	0.7493	19.61601
30	-150	-7834.42	8172.70	1.2732	0.7854	38.90273
30	-120	-7967.58	5302.38	1.2140	0.8237	58.15988
30	-90	-7082.79	2568.58	1.1570	0.8643	77.39239
30	-60	-5293.10	320.59	1.1023	0.9072	96.60581
30	-30	-2827.15	-1154.39	1.0500	0.9524	115.80621
30	0	0.00	-1667.92	1.0000	1.0000	89.92380
30	30	2827.15	-1154.39	1.0500	0.9524	64.19379
30	60	5293.10	320.59	1.1023	0.9072	83.39419
30	90	7082.79	2568.58	1.1570	0.8643	102.60761
30	120	7967.58	5302.38	1.2140	0.8237	121.84012
30	150	7834.42	8172.70	1.2732	0.7854	141.09727
30	180	6700.33	10812.83	1.3347	0.7493	160.38399
60	-180	-3991.99	8857.55	1.3394	0.7466	94.82665
60	-150	-4607.04	7316.56	1.2771	0.7830	116.46412
60	-120	-4648.70	5657.88	1.2169	0.8217	138.13221
60	-90	-4111.77	4087.96	1.1591	0.8627	159.82583
60	-60	-3063.09	2802.19	1.1037	0.9061	1.53926
60	-30	-1633.18	1960.60	1.0506	0.9518	23.26620
60	0	0.00	1667.92	1.0000	1.0000	0.00000
60	30	1633.18	1960.60	1.0506	0.9518	156.73380
60	60	3063.09	2802.19	1.1037	0.9061	178.46074
60	90	4111.77	4087.96	1.1591	0.8627	20.17417
60	120	4648.70	5657.88	1.2169	0.8217	41.86779
60	150	4607.04	7316.56	1.2771	0.7830	63.53588
60	180	3991.99	8857.55	1.3394	0.7466	85.17335

Tablo 2: Hammer-Aitoff Projeksiyonu'nda endikatrix elemanları

φ°	λ°	x_{km}	y_{km}	a	b	γ°
-60	-180	-9009.95	-7802.85	2.5625	0.3902	164.79064
-60	-150	-8189.18	-7342.22	2.2951	0.4357	162.11589
-60	-120	-6979.08	-6979.08	2.0143	0.4964	159.54281
-60	-90	-5476.08	-6706.80	1.7388	0.5751	157.21874
-60	-60	-3763.29	-6518.21	1.4830	0.6743	155.93173
-60	-30	-1914.93	-6407.49	1.2661	0.7898	159.05441
-60	0	0.00	-6371.00	1.1547	0.8660	0.00000
-60	30	1914.93	-6407.49	1.2661	0.7898	20.94559
-60	60	3763.29	-6518.21	1.4830	0.6743	24.06827
-60	90	5476.08	-6706.80	1.7388	0.5751	22.78126
-60	120	6979.08	-6979.08	2.0143	0.4964	20.45719
-60	150	8189.18	-7342.22	2.2951	0.4357	17.88411
-60	180	9009.95	-7802.85	2.5625	0.3902	15.20936
-30	-180	-15605.70	-4504.98	1.9055	0.5248	142.28195
-30	-150	-13624.19	-4071.71	1.6680	0.5995	141.04371
-30	-120	-11289.87	-3763.29	1.4830	0.6743	140.42540
-30	-90	-8690.32	-3547.81	1.3336	0.7499	140.44169
-30	-60	-5898.40	-3405.44	1.2090	0.8272	141.50196
-30	-30	-2980.45	-3324.26	1.1035	0.9062	145.90542
-30	0	0.00	-3297.87	1.0353	0.9659	0.00000
-30	30	2980.45	-3324.26	1.1035	0.9062	34.09458
-30	60	5898.40	-3405.44	1.2090	0.8272	38.49804
-30	90	8690.32	-3547.81	1.3336	0.7499	39.55831
-30	120	11289.87	-3763.29	1.4830	0.6743	39.57460
-30	150	13624.19	-4071.71	1.6680	0.5995	38.95629
-30	180	15605.70	-4504.98	1.9055	0.5248	37.71805
0	-180	-18019.91	0.00	1.4142	0.7071	90.00000
0	-150	-15513.68	0.00	1.2605	0.7934	90.00000
0	-120	-12742.00	0.00	1.1547	0.8660	90.00000
0	-90	-9752.30	0.00	1.0824	0.9239	90.00000
0	-60	-6595.74	0.00	1.0353	0.9659	90.00000
0	-30	-3326.33	0.00	1.0086	0.9914	89.99999
0	0	0.00	0.00	1.0000	1.0000	0.00000
0	30	3326.33	0.00	1.0086	0.9914	89.99999
0	60	6595.74	0.00	1.0353	0.9659	90.00000
0	90	9752.30	0.00	1.0824	0.9239	90.00000
0	120	12742.00	0.00	1.1547	0.8660	90.00000
0	150	15513.68	0.00	1.2605	0.7934	90.00000
0	180	18019.91	0.00	1.4142	0.7071	90.00000
30	-180	-15605.70	4504.98	1.9055	0.5248	37.71805
30	-150	-13624.19	4071.71	1.6680	0.5995	38.95629
30	-120	-11289.87	3763.29	1.4830	0.6743	39.57460
30	-90	-8690.32	3547.81	1.3336	0.7499	39.55831
30	-60	-5898.40	3405.44	1.2090	0.8272	38.49804
30	-30	-2980.45	3324.26	1.1035	0.9062	34.09458
30	0	0.00	3297.87	1.0353	0.9659	0.00000
30	30	2980.45	3324.26	1.1035	0.9062	145.90542
30	60	5898.40	3405.44	1.2090	0.8272	141.50196
30	90	8690.32	3547.81	1.3336	0.7499	140.44169
30	120	11289.87	3763.29	1.4830	0.6743	140.42540
30	150	13624.19	4071.71	1.6680	0.5995	141.04371
30	180	15605.70	4504.98	1.9055	0.5248	142.28195
60	-180	-9009.95	7802.85	2.5625	0.3902	15.20936
60	-150	-8189.18	7342.22	2.2951	0.4357	17.88411
60	-120	-6979.08	6979.08	2.0143	0.4964	20.45719
60	-90	-5476.08	6706.80	1.7388	0.5751	22.78126
60	-60	-3763.29	6518.21	1.4830	0.6743	24.06827
60	-30	-1914.93	6407.49	1.2661	0.7898	20.94559
60	0	0.00	6371.00	1.1547	0.8660	0.00000
60	30	1914.93	6407.49	1.2661	0.7898	159.05441
60	60	3763.29	6518.21	1.4830	0.6743	155.93173
60	90	5476.08	6706.80	1.7388	0.5751	157.21874
60	120	6979.08	6979.08	2.0143	0.4964	159.54281
60	150	8189.18	7342.22	2.2951	0.4357	162.11589
60	180	9009.95	7802.85	2.5625	0.3902	164.79064

KAYNAKLAR

- Bildirici, I. O. (2015). **Quasi indicatrix approach for distortion visualization and analysis for map projections**, International Journal of Geographical Information Science, 29, No. 12, 2295–2309.
- Bildirici, İ.Ö., Uluğtekin, N. (2011). **Visualization of Map Projection Distortions by Using Finite Circles: an Alternative Approach to Tissot's Indicatrix**, 25th International Cartographic Conference, Paris.
- Bouuaert, M.C., De Baets, B., Vervust, S., Neutens, T., De Maeyer P., Van de Weghe, N. (2016). **Computation and visualisation of the accuracy of old maps using differential distortion analysis**, International Journal of Geographical Information Science, online.
- Canter, F. (2002). **Small-Scale Map Projection Design**, Taylor and Francis, London, New York.
- Goldberg, D. M., & Gott III, J. R. (2007). **Flexion and skewness in map projections of the earth**, Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization, 42(4), 297-318.
- Koçak, E., (1999). **Harita Projeksiyonları**, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Zonguldak.
- Laskowski, P. H., (1989). **The Traditional and Modern Look at Tissot's Indicatrix**, The American Cartographer, 16/2, 123-133.
- Maling, D.H., (1992). **Coordinate Systems and Map Projections**, Pergamon Press, New York.
- Richardus, P. and Adler, R.K. (1972). **Map projections, for geodesists, cartographers and geographers**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Snyder, J.P., (1987). **Map Projections- A Working Manual**, United States Geological Survey Professional Paper 1395, Washington D.C.
- Uçar, D., İpbüker C., Bildirici, İ. Ö., (2011). **Matematiksel Kartografya : Harita Projeksiyonları Teorisi ve Uygulamaları**, 2. Baskı, Atlas Yayın Dağıtım, Ankara.
- Uçar, D., İpbüker, C., (1998). **Kartografik Projeksiyonlarda Deformasyon Elipslerinin Grafik Görselleştirilmesi**, Harita Dergisi, 119, 30-44.