

ÖLÇÜT MATRİSLERİNİN ELDE EDİLMESİNDE ÇİZGE KURAMININ KULLANILMASI

Cihangir ÖZŞAMLI

ÖZET

Geleneksel anlamda kabul edilen Taylor-Karman yapısındaki ölçüt matrislerinde jeodezik ağ noktaları arasındaki ilişkiler, ölçü planından bağımsız olarak korelasyon fonksiyonları ile ifade edilmektedir. Bu çalışmada, ölçü planı da dikkate alan ve çizge kuramı ile oluşturulmuş ölçüt matrisleri konu edilmiştir.

ABSTRACT

The relationship between the points of the geodetic network, in criterion matrices with its traditionally structure Taylor-Karman, is explained with correlation functions independent from the observation plan. In this study, the criterion matrices constituted with graph theory and which takes the observation plan into consideration, is the subject.

1. GİRİŞ

Jeodezik ağların optimizasyonunda tasarım aşamasında olan ağın, sonuçta elde edilecek kofaktörler (ya da Varyans-Kovaryans) matrisinin ideal bir matrise uygun olması amaçlanır. Ağın bilinmeyenlerinin ve bunlardan türetilebilecek fonksiyonlarının hata durumları n ı ifade eden böyle bir matris **Ölçüt Matrisi** olarak isimlendirilir ve bu matris optimizasyonda amaç fonksiyonu olarak kullanılır/1/.

Jeodezik ağlar için ideal durum Homojen-Isotrop ağ yapısı, yani hata elipslerinin ağın her noktasında aynı büyüklükte hata daireleri olmasıdır. Teorik açıdan, ölçüt matrisi olarak birim matris alınarak bu sonucu elde etmek mümkündür. Ancak birim matrisle ağ noktaları arasındaki korelasyonları ifade etme olanağı yoktur. Bu nedenle noktalar arasındaki korelasyonların Korelasyon Fonksiyonları ile ifadesi yoluna gidilmiştir. Bu şekilde oluşturulmuş en temel yapı Taylor-Karman (Homojen isotrop yapı) olarak bilinen yapıdır ve temel çıkış denklemi,

$$\begin{aligned}\Phi_{ij} = (r, r') &= \Phi_T(|r-r'|) + \left[\Phi_L(|r-r'|) - \Phi_T(|r-r'|) \right] \frac{\Delta x_i \Delta x_j}{|r-r'|^2} \\ &= \Phi_{ij}(r) = \Phi_T(r) \delta_{ij} + \left[\Phi_L(r) - \Phi_T(r) \right] \frac{\Delta x_i \Delta x_j}{r^2}\end{aligned}\quad (1)$$

şeklinde ifade edilir /4/. Burada: Δx (iki ağ noktası arasındaki koordinat farkı); (r, r') iki ağ noktasının yer vektörü; $|r - r'|$ iki ağ noktası arasındaki uzaklık ve δ Kronecker gösterimi anlamındadır. Φ_T Enine (Transversal), Φ_L İse Boyuna (Longitudinal) normlandırılmış korelasyon fonksiyonlarıdır ve hata elipslerinin daire biçiminde olması isteminin doğal sonucu olarak ,

$$\Phi_L(0) = \Phi_T(0) = 1 \quad (r = 0) \quad (2)$$

olur ve

$r \neq 0$ için, $\Phi_L(r)$ ve $\Phi_T(r)$ büyüklükleri belirlenmeye çalışılır.

Q_{xx} ölçüt matrisi,

$$Q_{xx} = \Phi_{ij}(r) \quad (3)$$

şeklinde

iki nokta tensör fonksiyonu olarak göz önüne alınır. $\Phi_{ij}(r)$ tensor fonksiyonu ise, $\Phi_L(r)$ ve $\Phi_T(r)$ şeklinde noktalar arasındaki uzaklığa bağımlı olarak deyimlendirilen iki fonksiyonla tanımlanır [7].

Jeodezik ağlarda kofaktörler matrisi pozitif yarı definit matrislerdir. Bu nedenle, yerine kullanılacak olan ölçüt matrisleri de aynı cebrik özelliği taşımalı diğer bir deyişle seçilen korelasyon fonksiyonu da pozitif definit bir fonksiyon olmalıdır. TK- Yapısındaki ölçüt matrislerinin hesabında da korelasyon fonksiyonu olarak pozitif definit bir fonksiyon

$$\Phi(r) = \frac{r}{d} K_1\left(\frac{r}{d}\right) \quad (4)$$

olan,

Bess

el Modeli kullanılır. Burada κ_1 , II.Tür 1.Dereceden Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu; r ağ noktaları arasındaki uzaklık; d ise karakteristik mesafe olarak tanımlanır [2].

Taylor-Karman yapısındaki ölçüt matrisleri, Potansiyel (P-Tipi) veya Türbülans (T-Tipi) olmak üzere iki tipte oluşturulmaktadır. Burada formüller P-Tipi için verilmiştir. T-Tipine dönüş için korelasyon fonksiyonların $0^{\wedge}.(r) \rightarrow 0^{\wedge}(r)$ ve $O, (/^{\bullet}) \rightarrow O y(r)$ şeklinde değiştirmek yeterlidir. Bu fonksiyonların açık ifadesi,

$$\Phi_T(r) = \frac{4d^2}{r^2} - 2K_0\left(\frac{r}{d}\right) - \frac{4d}{r} K_1\left(\frac{r}{d}\right) \quad (5)$$

$$\Phi_L(r) = -\frac{4d^2}{r^2} + 2K_0\left(\frac{r}{d}\right) + \frac{4d}{r} K_1\left(\frac{r}{d}\right) + \frac{2r}{d} K_1\left(\frac{r}{d}\right)$$

şeklinde

ir. K_0 , 0.Dereceden II .Tür Değiştirilmiş Bessel fonksiyonudur. Taylor-Karman yapısındaki bir ölçüt matrisinin elemanları, t_{ij} i. noktadan j. noktaya açıklık açışım göstermek üzere;

$$\begin{aligned} q_{x_i x_i} &= q_{y_i y_i} = q_{x_j x_j} = q_{y_j y_j} = 1 \\ q_{x_i y_i} &= q_{y_i x_i} = q_{x_j y_j} = q_{y_j x_j} = 0 \\ q_{y_i y_j} &= \Phi_T(r) + \{ \Phi_L(r) - \Phi_T(r) \} \sin^2 t_{ij} \\ q_{y_i x_j} &= q_{x_i y_j} = \{ \Phi_L(r) - \Phi_T(r) \} \sin t_{ij} \cos t_{ij} \\ q_{x_i x_j} &= \Phi_T(r) + \{ \Phi_L(r) - \Phi_T(r) \} \cos^2 t_{ij} \end{aligned} \quad (6)$$

şeklinde hesaplanır.

Şayet korelasyon fonksiyonu olarak, farklı enine ve boyuna korelasyon fonksiyonları almak yerine (6) ifadelerinde,

$$\Phi_{ij}(r) = \frac{\Phi_T(r) + \Phi_L(r)}{2} = \Phi(r)$$

şeklinde tanımlanan ortalama bir korelasyon fonksiyonu alınır, Taylor-Karman yapısının özel bir tipi olarak, Tam-Isotrop yapı elde edilir. Bu durumda Tam-Isotrop yapıdaki bir ölçüt matrisinin elemanları için,

$$\begin{aligned} q_{x_i x_i} &= q_{y_i y_i} = q_{x_j x_j} = q_{y_j y_j} = 1 \\ q_{x_i y_i} &= q_{y_i x_i} = q_{x_j y_j} = q_{y_j x_j} = 0 \\ q_{y_i y_j} &= q_{x_i x_j} = \Phi(r) \end{aligned} \quad (7)$$

elde edilir /9/

Görüldüğü gibi, korelasyon fonksiyonları kullanılarak ölçüt matrisinin oluşturulmasında ölçü planı dikkate alınmamakta ve ağa ilişkin bilgi olarak sadece ağ noktalarının yaklaşık koordinatları ve noktalar arasındaki uzaklıklar kullanılmaktadır. Bu tür bir hesaplama tekniğinde, ağ noktaları arasında uzaklıklar arttıkça doğal olarak korelasyon değerlerinin de küçüleceği açıktır. Ancak gerçek ağlar üzerinde yapılmış olan korelasyon çalışmaları da göstermiştir ki; eğer noktalar ölçülerle direkt olarak birbirlerine bağlanmışlarsa, aralarındaki uzaklıktan bağımsız olarak yüksek korelasyon değerleri ortaya çıkmaktadır /8/. Bu durum özellikle ölçü planının yoğun olduğu özel amaçlı ağlarda önem kazanmakta ve ölçüt matrislerinin oluşum süreci içinde ölçü planım da dikkate alma gereğini ortaya çıkarmaktadır. Bu tür bir yapıyı, Çizge Kuramı yardımıyla oluşturmak olanaklı olmaktadır.

2. ÇİZGE KURAMI

Çizge Kuramı (**Graph Theorie**) ile karmaşık yapıları sistemler oldukça basit bir yapı içinde gösterilebilmektedir. Bir çizgenin elemanları **noktalar** ve bu noktalar arasındaki ilişkileri gösteren **bağlardır**. Çizge kuramı ile çözülebilecek problemlerden biri de, noktalar arasında uzunluk, zaman, maliyet vb. açıdan optimal olan bir yolun belirlenmesidir. Bu kısa açıklamadan da kolayca anlaşılacağı gibi her jeodezik ağ; noktaları çizgenin noktaları ölçüler de çizgenin bağları olmak üzere; bir çizge olarak düşünülebilir ve iki ağ noktası arasındaki en az ölçü sayısının belirlenmesi de, bir optimal yol problemi olarak ele alınabilir/10/.

Bir G çizgesi, V (v_1, v_2, \dots, v_n) noktalar ve U (u_1, u_2, \dots, u_k) bağlar cümlesini göstermek üzere **G=(V,U)** şeklinde tanımlanır. $u=(v_i, v_j)$ şeklinde tanımlanan bir u bağında v_i bağın başlangıç, v_j bağın bitiş noktasıdır. $c=u(v_i, v_j)$ ile her bir bağın değeri (uzunluk, maliyet, ağırlık vb) tanımlanır. Buna göre bir çizgede en kısa yol problemi, v_i, v_j noktaları ($v_i \neq v_j$) arasındaki yollardan bağlarının değerleri toplamı en küçük olan yolun bulunması, problemidir. Bu çalışma içinde bağların (ölçülerin) değerleri ile ilgilenilmeyecek sadece en kısa yol içindeki sayıları dikkate alınacaktır. Herhangi iki ağ noktası arasındaki en kısa yol içinde yer alan bağların sayısı, bu iki ağ noktası arasındaki komşuluk değerlerini belirtir. Bir çizgede optimal (veya en kısa) yolun belirlenmesi için çok sayıda algoritma kullanılmaktadır. Ancak burada söz konusu algoritmaların yapışı üzerinde durulmayacaktır

Ölçüt Matrislerinin Çizge Kuramına göre otuştırulmasında ilk adım, ağ noktaları arasında yukarıda sözü edilen komşuluk değerlerinin belirlenmesidir. Bu değerler çizge kuramı ile belirlenir ve **Komşuluk Matrisi** içinde tutulur. Daha sonra ölçü planı uygun olarak ağırlıktandırılarak (örn. $\mathbf{P}=\mathbf{I}$) ,ağın kofaktörler matrisi hesaplanır ve bu matristen de aşağıdaki formülasyonla ağ noktaları arasındaki deneysel korelasyon değerleri belirlenir:

Q_{xx} Kofaktörler matrisi, nokta çiftleri için (4x4) boyutlu alt matrislere ayrılır ve

$$f_{L_{ij}}^T = [\sin t_{ij} \quad , \quad \cos t_{ij}] \quad , \quad f_{T_{ij}}^T = [\cos t_{ij} \quad , \quad -\sin t_{ij}] \quad \text{dönüşüm operatörleri ile,}$$

$$\bar{Q}_{L_{ij}} = \begin{bmatrix} q_{L_i L_i} & q_{L_i L_j} \\ & q_{L_j L_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{L_{ij}}^T Q_{ii} f_{L_{ij}} & f_{L_{ij}}^T Q_{ij} f_{L_{ij}} \\ & f_{L_{ij}}^T Q_{jj} f_{L_{ij}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}_{T_{ij}} = \begin{bmatrix} q_{T_i T_i} & q_{T_i T_j} \\ & q_{T_j T_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{T_{ij}}^T Q_{ii} f_{T_{ij}} & f_{T_{ij}}^T Q_{ij} f_{T_{ij}} \\ & f_{T_{ij}}^T Q_{jj} f_{T_{ij}} \end{bmatrix}$$

şeklinde, enine ve boyuna varyanslara dönüştürülür ve buradan,

$$\bar{Q}_{L_{ij}} = \frac{q_{L_i L_j}}{\sqrt{q_{L_i L_i} q_{L_j L_j}}} \quad , \quad \bar{Q}_{T_{ij}} = \frac{q_{T_i T_j}}{\sqrt{q_{T_i T_i} q_{T_j T_j}}}$$

ile deneysel korelasyon değerleri hesaplanır. Jeodezik ağ noktaları arasında, n nokta sayışım göstermek üzere,birbirinden bağımsız $[n(n-1)/2]$ sayıda enine ve boyuna korelasyon değeri hesaplanabilir /3/.

Hesaplanan bu korelasyon değerleri, noktalar arasında daha önce belirlenmiş komşuluk değerleme göre sınıflara ayrılır ve her sınıfın ortalama enine ve boyuna korelasyon değeri belirlenir. Ölçüt matrisinin elemanları ise, (6) veya (7) eşitliklerinden biri ile hesaplanır.

3. ÖLÇÜT MATRİSLERİ İLE AĞIRLIK OPTİMİZASYONU

Ölçüt matrisleri ile ağırlık optimizasyonunun çıkış denklemi, $(A^T P A)^+ = Q_{xx}$

şeklinde Burada Q_{xx} ölçüt matrisini, P bilinmeyen ağırlıklar matrisini göstermektedir.

Çözümüne (9a) denklemi $(A^T P A)^+ = Q_{xx}^+$ şeklinde yazılarak ulaşılır. (9b) sistemi, P matrisinin diagonal olduğu düşüncesinden hareketle ve $\mathbf{q}=\text{vec}(\mathbf{Q}_{xx})$, $\mathbf{p}=\text{vec}(\mathbf{P})$, \mathbf{d} tutarsızlık (inkonsistent) parametreler olmak üzere şekilde düşünülür, $\mathbf{d}^T \mathbf{d} \rightarrow \min$ amaç fonksiyonu ile aranan ölçü ağırlıkları için,

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A} \mathbf{A}^T * \mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T)^T \mathbf{q} \quad (11)$$

elde edilir. Burada \odot Khatri-Rao çarpımı, * ise Hadamart çarpımıdır. /10/.

Çözüm düzeni (9b) ifadesine göre kurulduğu için, sonuç ağırlıkları optimizasyonun ana çıkış ifadesi olan (9a) ifadesine dönüştürülmelidir. Bu amaçla (11) ifadesi ile elde edilen ağırlıklara, $[\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}]$ doğrusal dönüşümü uygulanır:

$\mathbf{r} = \text{vec} (Q_{xx} - (A^T P A)^+)$ olmak üzere $\mathbf{r}^T \mathbf{r} \rightarrow \min$. amaç fonksiyonu ile, λ için:
Ölçüt matrisinin tümüne uyum amaçlanırsa,

$$\lambda = \frac{[I_z (A^T P A)^+ (A^T P A)^+]}{[I_z (A^T P A)^+ Q_{xx}]} \quad (12a)$$

Ölçüt matrisinin ana köşegenine uyum amaçlanırsa,

$$\lambda = \frac{[I_z (A^T P A)^+ * (A^T P A)^+]}{[I_z (A^T P A)^+ * Q_{xx}]} \quad (12b)$$

elde edilir . Ağırlık optimizasyonu için verilen bu çözüm yöntemi, U-m yöntemi olarak isimlendirilir/6/.

Ölçüt matrisleri regüler matrislerdir. Serbest ağların optimizasyonunda ölçüt matrisleri, rank düşüklüğü ağda planlanan ölçülere bağımlı olan tekil normal denklemler matrisi ile karşılaştırılacaktır. Bu nedenle serbest ağların optimizasyonunda Q_{xx} ölçüt matrisi

$$Q_{xx} = S_{GG} Q_{xx} S_{GG}^T \quad (13)$$

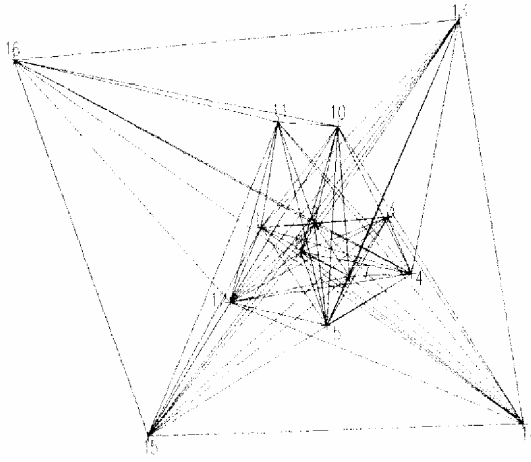
şeklinde ifade edilen S-Dönüşümü ile ağın datumuna dönüştürülmelidir. Burada S^A matrisi dönüşüm matrisidir /5/.

4. TEST AĞI ÜZERİNDE UYGULAMA

Bu bölümde, yukarıda oluşum süreci açıklanan iki tür ölçüt matrisi ile gerçekleştirilmiş olan ağırlık optimizasyonu çözümleri karşılaştırılmıştır. Test ağı olarak; tamamı pilye 14 noktadan oluşan, ölçü planı 75 kenar ve 150 doğrultu ölçüşü olmak üzere toplam 225 ölçü içeren, Taşkesti Yatay Kontrol Ağı alınmıştır. Optimizasyon çözümlerinde kenar ölçüleri için tek tek ağırlıklar, doğrultu ölçüleri için grup ağırlıkları, ağ noktalarının konum doğrulukları için ise 2 mm amaçlanmıştır. Test ağı Şekil 1. de , ölçü planından çizge kuramı ile hesaplanmış olan ağın Komşuluk Matrisi ile birlikte verilmiştir.

Taylor-Karman Yapısındaki ölçüt matrisinin oluşturulmasında karakteristik mesafe olarak $d=100$ m alınmıştır. Çizge Kuramına göre ölçüt matrisinin oluşturulması için gerekli olan ortalama enine ve boyuna korelasyon değerleri, $P=I$ alınarak, (5a,b) ifadeleri ile hesaplanmıştır.

Bölüm 3 ' de formülasyonu verilen optimizasyon çözümü iki aşamada gerçekleştirilir. İlk aşamada en genel ölçü planı ile çözüm yapılır. İkinci aşamada ise, ilk aşamada elde edilen çözümden negatif ve çok küçük ağırlıklı ölçüler teker teker ölçü planından çıkarılır. Bu süreç içinde, başlangıçta hesaplanmış olan Taylor-Karman yapısındaki ölçüt matrisleri değiştirilmeden kullanılır. Buna karşılık çizge matrisleri, ölçü planından çıkarılan ölçüler nedeniyle değişebilecek komşuluk değerlerine göre yeniden hesaplanmalıdır. Bu nedenle Çizelge 1. de verilmiş olan ortalama korelasyon değerlerine başlangıç değerleri olarak bakmak gerekir.

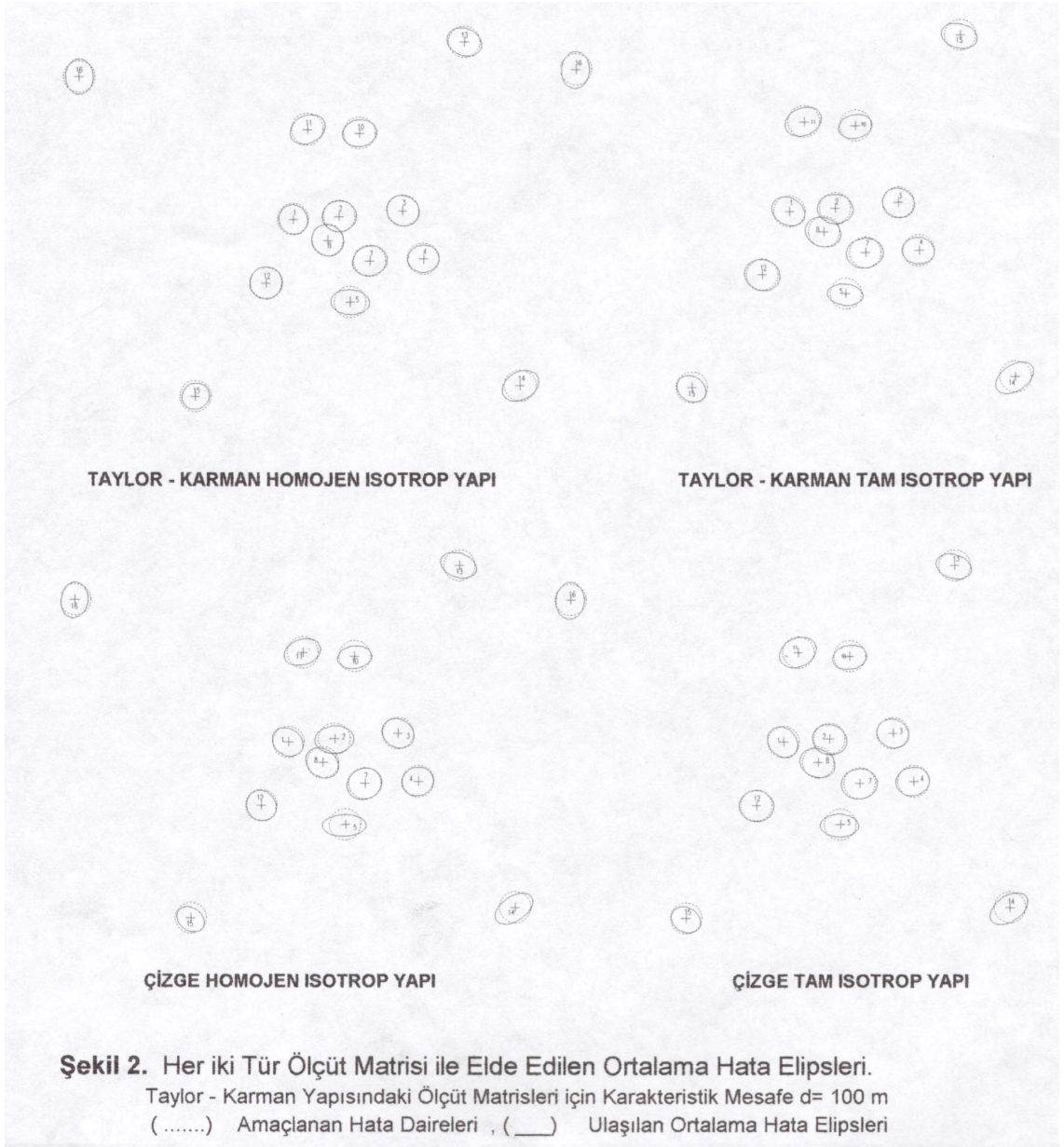


5. SONUÇ

Jeodezik ağların optimizasyonunda ölçüt matrislerinin amaç fonksiyonu olarak alınmasında, problemin çözümünde uygulanacak algoritmalar kadar, ölçüt matrisinin oluşturulması da önemli olmaktadır. Korelasyon fonksiyonları kullanılarak ölçüt matrislerinin oluşturulmasında problem, ağ noktaları arasındaki matematiksel korelasyonun, gerçekleştirilebilecek bir ağ yapışma uygunluğunun sağlanabilmesi için, ölçüt matrisinin hesabında kullanılan karakteristik mesafenin uygun seçimi konusunda yoğunlaşmaktadır.

Oysa, özellikle deformasyon analizi amacına yönelik yoğun ölçü elemanı içeren jeodezik ağlarda, söz konusu korelasyonların noktalar arasındaki uzaklıkla doğru olarak ifade edilmesi mümkün olmamaktadır. Bu nedenle bu çalışmada, ağ noktaları arasındaki jeodezik bağları ön plana çıkaran, çizge kuramı ile oluşturulmuş ölçüt matrisleri de göz önüne alınmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Seçilen test ağı üzerinde iki tür ölçüt matrisi ile yapılan incelemeler, bu geometrik yapıya benzer yapıdaki ağlarda, çizge kuramı ile oluşturulmuş ölçüt matrislerinin kullanılmasının daha yerinde olacağı sonucunu vermektedir.



KAYNAKLAR

- /1/ Ayan, T. : Jeodezik Ağların Optimizasyonu, Doçentlik Tezi, İstanbul. 1981.
- /2/ Bill, R. : Kriteriummatrizen ebener geodaetischer Netze, DGK Reihe B, Nr. 102, München, 1985
- /3/ Bill, R. : Kriteriummatrizen ebener geodaetischer Netze. Zur Schaetzung von Korrelationsfunktionen und Splines, AVN,4,148-156, 1986.
Kaltenbach, H
- /4/ Grafarend, E. : Kriteriummatrizen I. Zweidimensionale homogene und isotrope geodaetische Netze, ZfV,104,133-149, 1979.
Schaffrin, B.
- /5/ Illner, I. : Datumfestlegung in freien Netzen, DGK C, 309, München, 1985.
- /6/ Illner, M. : Anlage und Optimierung von Verdichtungsnetzen. DGK C, Nr.317, München, 1986.
- /7/ Kaltenbach, H. : Kriteriummatrizen aus graphtheoretischen Korrelationsanalysen Diplomarbeit, Geodaetisches Institut, Karlsruhe, 1986.
- /8/ Kaltenbach, H. : A new approach for criterion matrices on graph theory, Schmitt, G. Manuscripta Geodaetica, 13, 296-305, 1988.
- /9/ Kırık, I. : Jeodezik Ağların Optimizasyonu. Ölçüt Matrisleri ile II. Derece Optimizasyon. Yüksek Lisans Tezi. İ.T.Ü.Fen Bilimleri Ens. İstanbul, 1986.
- /10/ Özşamlı, C. : Kontrol Ağlarının Ölçüt Matrisleri ile Ağırlık ve Ölçü Plânı Optimizasyonu, Doktora Tezi, İ.T.Ü. İstanbul, 1994.