# Nirengi şebekesinde müselles hesapları

Yazan: Yüksek Mühendis
Ekrem Ulsoy

Bir memleketin haritasının yapılmasında nirengi şebekesi (triangulation) nin ehemmiyeti aşikârdır. Bir nirengi şebekesi, mümkün mertebe dılıları yekdiğerine müsavı müselleslerin bir araya gelerek vücuda getirdikleri balık ağına müşabih bir sistemdir. Haritacılığın icap ettirdiği bütün hesapların yapılabilmesi için, birinci', ikinci, üçüncü ve dördüncü derece müsellesleri alınır ve bunların heyeti mecmuası nirengi şebekesini teşkil eder. Bu zikr edilen tasnif, müselleslerin dılılarının uzunluğuna göredir. Birinci derece müsellesleri bütün şebekenin iskeletidir ve şebekenin en mühim kısmını teşkil eder. Bundan dolayı da en sahih surette ölçülmesi icap eden müsellesler birinci derece müsellesleridir. Dılılarının uzunluğu Türkiyə cümhuriyeti dahilinde ve diğer müterakki memleketlerde 30-40 Km. arasındadır. Diğer derecelerde müselles dılıları küçülür ve 4-5 Km. ye kadar düşer.

Müselleslerin köşelerine (nirengi noktaları) denir. Haritaların yapılmasında bu noktalardan istifade edilir. Nirengi noktalarının malûm telâkki edilebilmesi için, koordinelerinin hesaplanmış olması iktiza eder. Bunun için de her şeyden evvel «müselles halli» nin bilinmesi icap eder.

Müselles halli en ziyade haritacılığı alâkadar eden bir meseledir. Müstevi müsellesler mevzubahs olduğu zaman meselenin çok basit olduğunu biliyoruz. Fakat nirengi noktalarının üzerinde bulunduğu yer yüzünün şekli, müstevi olmayup devrani bir [*] ellipsoiddir. Buna rağmen mesahai müsteviye için:

a) Bir mil murabbaı (55 Km. murabbaı saha) müstevi
b) Bir kaç yüz mil murabbaı saha küre
c) Büyük mıntakalar ellipsoid

ad olunabilir.

Görülüyorki esas ad ettiğimiz birinci derece müselleslerini hal etmek için müstevi müsellesat ile iktifa edemeyiz ve kürevî müsellesatdan istifade etmek mecburiyetindeyiz.

19 uncu asrın başına kadar bu kabil hesaplarda (veterlerin teşkil ettiği müselles) kullanılmakta idi. Yani müsellesler, nirengi noktalarının aralarının sathı arz üzerinde birleştirilmeleri ile değil, hattı müstakimlerle birleştirilmeleri suretile teşkil edilmekte idi. Binaenaleyh bu müsellesin dılıları arzın sathında olmayup arzın dahilindedir ve noktaları vasleden hatlar da veterlerden ibarettir. Bu usul Delambre in nısfınnahar mesahalarında da kullanılmıştır. Fakat uzun ve pratik olmayan bir hesap tarzı olduğu için bu gün artık kullanılamaz.

Müstevi müsellesatın, nirengi işlerine ait müselles hesaplarını hal için kâfi olmadığı anlaşıldıktan sonra başka çareler bulmak iktiza etmiştir. Kürevi müsellesat, dılıları dairei azime kavislerinden müteşekkil olan kürevî müselleslerin unsurları arasındaki münasebatı araştırmak dolayısile, müstevi müsellesatın noksanını telâfi edebilecek imkânlara maliktir. Fakat, malûm olduğu üzere, kürevî müsellesat düsturlarında müselles dılıları, bizim yer yüzünde ölçdüğümüz gibi, tul cinsinden değil, zaviye cinsindendir. Bu dılıların

[*] Dünyanın şekli hakkında yüksek mühendis H. Bozkır ve yüksek mühendis Macid Erbudak'ın Haritacılar mecmuasının 31 ve 32 sayılı nushalarındaki yazılarına bakınız.

tulleri ile zaviye cinsinden kıymetleri arasında sabit bir münasebet vardır. Eğer müsellesin üzerinde bulunduğu kürenin nısıf kutru R, müsellesin dılılarının zaviye cinsinden kıymetleri a, b, c ve tul cinsinden kıymetleri A, B, C ile gösterilecek olursa:

$$A = \frac{a}{\rho} . r , \quad B = \frac{b}{\rho} . r , \quad C = \frac{c}{\rho} . r$$

olduğu aşikârdır.

Binaenaleyh tul cinsinden verilen dılıların zaviyevî kıymetlerini bulmak ve bundan sonra kürevî müsellesatın düsturlarını kullanmak suretile neticeye varmak daima kabildir. Fakat hesaplarımızda kullandığımız en büyük müsellesler bile, dünyamızın büyüklüğüne nazaran, gayet küçüktürler. Arz üzerinde bir gratlık bir kavsin takriben 100 kilometreye tekabül ettiği malûmdur. Binaenaleyh birinci derece müselleslerinin dılıları daima yarım graddan küçüktürler. İşte gerek küçük zaviyelerin, gerekse bizzat kürevi müsellesat düsturlarının pratik hesaba müsait olmamaları başka yolların aranmasına sebep olmuştur. Bunun için silsileler ve takribî düsturlardan istifade edilmiştir.

## Legendre'ın metodu:

Yukarıda zikredilen noktai nazarlara cevap veren en eski ve en mühim usul Legendre'ın usulüdür.

Legendre kaidesi şudur:

Bir müsellesin zaviyelerinden fazlı kürevinin üçte biri çıkarılacak olursa bu takdirde kürevi müselles, müstevi bir müselles gibi hesaplanabilir.

Fazlı kürevi malûm olduğu üzere:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 200^{g} \qquad \text{dir.}$$

Legendre bu kaideyi ilk defa isbatsız olarak 1787 senesinde Parisde neşretti. İlk isbata ise 1798 senesinde tesadüf edilir.

Bu isbat için Legendre, kürevi müsellesdeki sinus münasebetinden istifade etmiştir:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}$$

sin a ve sin b nin silsilesinden bilistifade:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6 r^3} + \ldots}{\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6 r^3} + \ldots} \quad \text{yazılabilir}$$

Legendre kaidesine göre kürevi müsellesin zaviyelerinden çıkarılması icap eden miktara x diyelim:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin (A - x)}{\sin (B - x)} \quad \text{olacaktır.}$$

Bu iki münasebetden istifade ederek:

$$\operatorname{tg} x = \frac{(1 - \frac{1}{6}\frac{b^2}{r^2}) \sin A . \sin B - (1 - \frac{1}{6}\frac{a^2}{r^2}) \sin B . \sin A}{(1 - \frac{1}{6}\frac{b^2}{r^2}) \sin A . \cos B - (1 - \frac{1}{6}\frac{a^2}{r^2}) \sin B . \cos A}$$

Buradan da bir kaç ameliyeden sonra:

$$x = \frac{1}{6} \frac{(a^2 - b^2)}{r^2} \cdot \frac{\sin A . \sin B}{\sin (A - B)} = \frac{1}{3} \frac{F}{r^2}$$

Ve:

$$\varepsilon = \frac{S}{r^2} \cdot \rho$$

olduğundan:

$$X = \frac{1}{3} \varepsilon \quad \text{elde edilir.}$$

Legendre kaidesi kürevi müsellesatdaki diğer düsturlardan, meselâ cosinus münasebetinden [*] istifade suretilede bulunabilir.

[*] Handbuch der vermessungskunde, Jordan - Eggert, Band 3 sahife 243

Binaenaleyh dılılarının tul cinsinden kıymetleri a, b, c ve zaviyeleri $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ olan bir müsellesi Legendre' a göre hal etmek için şu tarzda hareket edilir:

1) Müsellesin S sathı hesap edilir. Bunun için kürevi müsellesi müstevi gibi farzetmek kâfidir. S bulunduktan sonra müsellesin vasatına ait olan r alınarak:

$$\varepsilon = \frac{S}{r^2} \cdot \rho$$

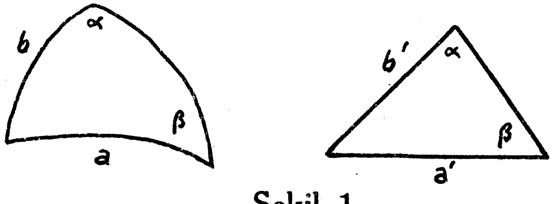
düsturu ile fazlı kürevi bulunur.

2) Fazlı kürevinin üçte biri her zaviyeden tarh edilir. Dılılar yine eski dılılardır. Bu suretle hasıl olan müsellesde her şey müstevi müsellesatda olduğu üzere hesaplanabilir.

Additament metodu:

Lengendre'ın dılıları sabit tutarak zaviyeleri değiştirme usulünün aksine olarak Soldner «Additament metodu» nu ortaya atmıştır. [*]

Bu usulde de kürevi müsellesin halli için yardımcı bir müstevi müselles nazarı itibara alınmıştır. O suretleki, müstevi müsellesin iki zaviyesi kürevi müsellesinkine müsavi olsun ve buna mukabil




Şekil 1

mezkûr zaviyeler karşısındaki dılılar değişsin. Meselâ şekilde görüldüğü üzere bir kürevi müsellesle zikrettiğimiz şeraiti haiz müstevi müsellesi alalım.

[*] Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873

Kürevi müsellesin $\alpha$, $\beta$ zaviyeleri müstevi müsellesdeki $\alpha$, $\beta$ zaviyelerinin ayni olsun. Bu a, a′ ve b, b′ dılıları yekdiğerine müsavi değildirler. Aradaki münasebeti araştıralım.

Sinüs münasebeti kürevi ve müstevi müselles için şu münasebetleri verir:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\frac{a}{r}}, \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a'}{b'} \qquad \text{buradan:}$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\frac{b}{r}} = \frac{\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6r^3} + ..}{\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3} + ..} = \frac{a - \frac{a^3}{6r^2} + ..}{b - \frac{b^3}{6r^2} + ..}$$

olması icap ettiği anlaşılır. Bu, müstevi ve kürevi dılılar arasındaki münasebettir. Şu halde a′, b′:

$$a' = a - \frac{a^3}{6r^2} \quad \text{ve} \quad b' = b - \frac{b^3}{6r^2}$$

olacak surette intihap edilirse maksat hasıl olmuş olur. Umumî olarak bir kürevî dılı S ile gösterirsek buna tekabül eden müstevi dılı:

$$s' = r.\sin\frac{s}{r} = s - \frac{s^3}{6r^2} \qquad \text{dir.}$$

Görülüyorki müstevi dılı diğerine nazaran daha küçüktür. Fakat $\frac{s^3}{6r^2}$ küçük bir miktar olduğu için kürevi ve müstevi dılılar arasındaki fark az demektir. Her vakit hesap etmemek bu için farka ait bir cedvel yapılabilir. r de $\varphi$ ye tabi olarak alınır. Ankaranın arzı $\varphi = 44^g,40$ kabul edilirse:

$$\log r = 6.804452$$

dir. Buna göre aşağıda s in bazı kıymetleri için aradaki farklar hesap edilmiştir:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s =$ | 5 000 | 10 000 | 20 000 | 30 000 | 40 000 | 50 000 |
| $\frac{s^3}{6 r^2} =$ | 0,0005 | 0,004 | 0,032 | 0,111 | 0,262 | 0,513 m. |

Fakat s ile s' arasındaki fark:

$$s - s' = \frac{s^3}{6 r^2}$$

düsturu ile hesap edilerek kullanılmaz.

$$s' = r. \sin \frac{s}{r}$$

düsturundan ve logaritma silsilesinden bilistifade:

$$\log s - \log s' = \frac{\mu}{6 r^2} . s^2 \qquad \text{elde edilir.}$$

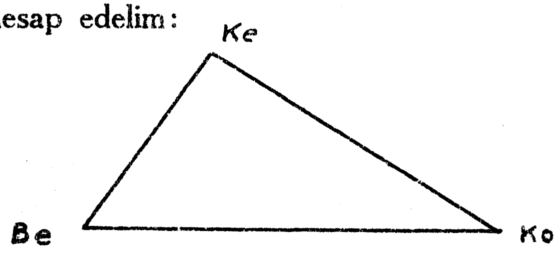
Burada $\mu = 0,434294$ olup tabii logaritma kaidesi olan $e = 2,718282$ adedinin logaritmasından ibarettir. Düsturun sağ tarafındaki bu miktar umumiyetle A harfi ile gösterilir.

$$\log s - \log s' = A$$

Binaenaleyh bu dılılardan birinin logaritması malûm ise diğerininkini bulmak kabildir. A için umumiyetle cedveller [*] mevcuttur. Aksi takdirde bunu hesaplamak lâzımdır.

Adedî misal:

Misal olmak üzere «Kestel-Beydağ-Koreş» birinci derece müsellesini hesap edelim:




Şekil 2

[*] Handbuch der vermessungskunde, dritter Band 1923 sahife [43]

Zaviyeler:

| | |
|---|---|
| Kestel: | 27.7009.446 |
| Beydağ: | 18.7586.724 |
| Koreş: | 153.5411.494 |
| Macmu = | 200.000.664 |
| Fazlı kürevî = ε = | 7.664 |
| | 200.0000.000 |

Beydağ - Koreş dılının logaritması ise 4.66389044 olarak malûmdur. Evvelâ fazlı küreviyi hesaplayalım:

$$\varepsilon = \frac{s}{r^2} \cdot \rho$$

idi. Kürevî müsellesin sathı yerine müstevi müsellesin sathı alınabilir. Binaenaleyh:

$$S = \frac{1}{2} (Be - Ko)^2 . \frac{\sin(Be). \sin(Ko).}{\sin(Ke)}$$

Adedî kıymetler yerine konulursa:

$$\varepsilon = 7^{"}.664 \qquad \text{bulunur.}$$

Kontrol olmak üzere zaviyeler mecmuu teşkil olunur. Bu mecmudan fazlı kürevi tarh olunduğu takdirde 200 grad kalması icap eder. Şimdi kürevî müsellesin diğer iki dılını Legendre kaidesine göre hesaplayalım. Yapılacak ilk iş müsellesin zaviyelerinden $\frac{\varepsilon}{3}$ tarh etmektir.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $27^g.7009.446$ | — | $2^{"}.555$ | = | 27.7006.891 |
| 18. 7586.724 | — | 2. 554 | = | 18.7584.170 |
| 153. 5411.494 | — | 2. 555 | = | 153.5408.939 |
| 200. 0007.664 | — | 7. 664 | = | 200.0000.000 |

Şimdi mecmuları 200 grad eden zaviyelerle aynen müstevi müsellesatda olduğu üzere dılı hesabına geçebiliriz. Müstevi müsellesatdaki sinüs münasebetinden:

$$\frac{(Ke-Be)}{\sin Ko} = \frac{(Be-Ko)}{\sin Ke} \qquad (Ke\text{-}Be) = (Be\text{-}Ko).\frac{\sin Ko}{\sin Ke}$$

$$\frac{(Ke-Ko)}{\sin Be} = \frac{(Be-Ko)}{\sin Ke} \qquad (Ke\text{-}Ko) = (Be\text{-}Ko).\frac{\sin Be}{\sin Ke}$$

Harita Genel Müdürlüğünde bu hesap şu şemaya göre yapılmaktadır:

| Nokt. Adı | Zaviyeler | $\frac{\varepsilon}{3}$ | Müstevi müsel. zaviyeleri | R. Sol | R. Sa. |
|---|---|---|---|---|---|
| R: Kestel | 27.7009.446 | − 2.555 | 27.7006.891 | 4.66389044 | 4.66[illegible]9044 |
| Sa: Beydağ | 18.7586.724 | − 2.554 | 18.7584,170 | 9.46301335 | 9.[illegible]2393315 |
| Sol: Koreş | 153.5411.494 | − 2.555 | 153.5408.939 | 0.37518130 | 0.37518130 |
| | | | | 4.50208509 | 4.86300489 |

Ayni müsellesi birde Soldner'in Additament usulü ile hal edelim. Burada zaviyeler sabit kalacak ve dılıların logaritmasında yapılacak A miktarı tashihi nazarı itibara alınacaktır.

$$A = \frac{\mu . s^2}{6 r^2} \qquad \text{idi.}$$

r nısıf kutrunu $\varphi = 41^g.20$ için cedvelden alırız. [*] Bu müsellesin ortasının takribi arzıdır:

$$\log r = 6.804309 \qquad \log r^2 = 13.608618$$

(Ke-Be) dılının a, (Ke-Ko) yı b ve malûm dılıda c ile gösterelim:

$$A_a = \log a - \log a' \qquad A_b = \log b - \log b \qquad A_c = \log c - \log c'$$

$$= \frac{\mu . a^2}{6. r^2} \qquad = \frac{\mu . b^2}{6. r^2} \qquad = \frac{\mu . c^2}{6. r^2}$$

veya virgülden sonra sekizinci hane cinsinden elde edilmek istenirse $10^8$ ile zarp edilir:

$$\begin{array}{rl} \log\ 10^8 \mu = & 7.637784 \\ \log\ 1:6 = & 1.221849 \\ \log\ 1:r^2 = & 14.391382 \\ \hline & 7.251015 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 7.251015 \\ \log c^2 = & 9.327780 \\ \hline \log A_c = & 2.578795 \\ A_c = & 379.1 \end{array}$$

[*] Tables de l'Ellipsoide de Référence international, Paris 1928

$$\log c' = \log c - A_c = 4.66389044 - 379 = 4.66388665$$

Şimdi yine deminki şemadan istifade ederek müsellesi hal edebiliriz. Fakat bu suretle çıkacak dılılar $a'$ ve $b'$ olacaktır. Bunlari hesaplayalım:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| R: | Kestel | 27.7009.446 | 4.66388665 | 4.66388665 |
| Sa: | Beydağ | 18.7586.724 | 9.46301910 | 9.82393120 |
| Sol: | Koreş | 153.5411.494 | 0.37517755 | 0.37517755 |
| | | | 4. 50208330 | 4. 86299540 |
| | | | $= \log b'$ | $= \log a'$ |

Additamant hesabında $a^2$, $b^2$ yerine $a'^2$, $b'^2$ koysak netice fark etmez:

$$\begin{array}{r} 7.251015 \\ \log b'^2 = 9.004166 \\ \hline \log A_b = 2.255181 \\ A_b = 180 \\ \log b = \log b + A_b \\ 4.50208330 \\ 180 \\ \hline \log b = 4.50208510 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7.251015 \\ \log a'^2 = 9.725990 \\ \hline \log A_a = 2.977005 \\ A_a = 948 \\ \log a = \log a' + A_a \\ 4.86299540 \\ 948 \\ \hline \log a = 4.86300488 \end{array}$$

Görülüyorki bu, Legendre usulü ile elde edilen neticenin aynıdır. Biz burada A ları hesapladık. Fakat bunlar için de cedveller olduğunu evvelce zikretmiştik. Meselâ Jordan III deki cedvellerden:

$A_c = 379 \qquad A_b = 180 \qquad A_a = 948$

elde edilir. Her ne kadar Jordan daki ellipsoid anaşırı ile beynelmilel ellipsoidin anasarı yekdiğerinden farklı iselerde bu A ların hesabına pek az tesir eder. Binaenaleyh bu A ları cedvelden almak kabil olduğu takdirde Soldner'in usulünün de çok basit olduğu görülür.

Logaritma cedvellerindeki S ve T ile Additament arasındaki münasebet:

Logaritma cedvellerinde küçük zaviyelerin hesabatında kullanılan S ve T mikdarları ile A arasında bir münasebet vardır.

Malûm olduğu üzere:

$$s = \frac{\sin x}{x} \quad \text{ve} \quad t = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

vazedilerek:

$$s.\, x = \sin x, \quad t.\, x = \operatorname{tg} x \qquad \text{bulunur}$$

Burada x radyan cinsindendir. Sanine cinsinden yazalım:

$$x = \frac{x''}{\rho''} \qquad \text{olduğundan:}$$

$$s.\, \frac{x''}{\rho''} = \sin x, \qquad t.\, \frac{x''}{\rho''} = \operatorname{tg} x$$

$$\log \sin x = \log s + \log \frac{1}{\rho''} + \log x'', \quad \log \operatorname{tg} x = \log t + \log \frac{1}{\rho''} + \log x''$$

olur.

$$\log s + \log \frac{1}{\rho''} = S, \quad \log t + \log \frac{1}{\rho''} = T$$

vazedelim:

$$\log \sin x = S + \log x'', \quad \log \operatorname{tg} x = T + \log x''$$

Halbuki Taylor düsturundan bilistifade:

$$\log \sin x = \log \frac{x''}{\rho''} - \frac{\mu}{6\rho''^2} x''^2 - \ldots.$$

$$\log \operatorname{tg} x = \log \frac{x''}{\rho''} + \frac{\mu}{3\rho''^2} x''^2 + \ldots.$$

yazılabilir. Bunları şu şekle de çevirebiliriz:

$$\log \sin x = \log x'' + \log \frac{1}{\rho''} - \frac{\mu}{6\rho''^2} x''^2 - \ldots.$$

$$\log \operatorname{tg} x = \log x'' + \log \frac{1}{\rho''} + \frac{\mu}{3\rho''^2} x''^2 + \ldots.$$

Şu halde:

$$S = \log \frac{1}{\rho''} - \frac{\mu}{6\rho'^2} x''^2 \ , \quad T = \log \frac{1}{\rho''} + \frac{\mu}{3\rho''^2} x'^2 \quad \text{dir.}$$

Burada ikinci hadler yarine A cinsinden kıymet yazılabilir. Bir m mesafesine ait Additament:

$$A_m = \frac{\mu}{6 r^2} m^2 \qquad \text{idi.}$$

$\frac{m}{r}$ ise arz üzerindeki m mesafesine tekabül eden merkezi zaviyenin radyan cinsinden kıymetidir. Additament cedvelleri bazen $\frac{m}{r}$ e göre tanzim edilmişlerdir. Şu halde:

$$S = \log \frac{1}{\rho''} - A \ , \quad T = \log \frac{1}{\rho''} + 2A \qquad \text{olur.}$$

Legendre davasının tenkid tevsi ve sıhhati:

Legendre davasının zikredilen tarzdakinden farklı müteaddit isbatları daha vardır. Fakat fazlı kürevinin üçde birini kürevî müsellesin her zavizesinden çıkarmak ve bu zaviyeleri «yardımcı bir müstevi müselles» in zaviyeleri gibi kabul etmekten ibaret olan Legendre usulü pek çok tenkitlere uğramış ve bu 1916 senesine kadar devam etmiştir.

Bu tenkitler şn suretle hülâsa edilebilir:

1) Fazlı küreviyi üçe taksim ederek her zaviyeden tarh etmek ancak müsavi dılılı müselleslerde doğru olabilir.

2) Üçe taksim meselesi rasad edilmiş zaviye mecmularındaki kapanma hatasının izalesine benzetilebilir. Halbuki fazlı kürevinin bir kapanma hatası şeklinde telâkkisi doğru olamaz.

3) Kürevî müsellesin her zaviyesinden ayni miktarı çıkarmak doğru olamaz. Tarh edilecek miktarın zaviyenin büyüklüğüne de tabi olması lâzımdır.

Legendre metodu için yapılan bu tenkitler onun tevsi ve hatasının esaslı surette araştırılmasına sebep olmuştur.

Legendre davasının ilk tevsii Buzengeiger [*] tarafından yapılmıştır. Kürevi müsellesin sathı yerine müstevi müsellesin $\Delta$ sathı alındığına, kürevi zaviyeler A, B, C ve müstevi zaviyeler de A', B', C' ile gösterildiğine göre:

$$A - A' = \frac{\Delta}{3 r^2} \cdot \rho + \frac{\Delta}{360 r^4} \cdot \rho (a^2 + 7 b^2 + 7 c^2)$$

$$B - B' = \frac{\Delta}{3 r^2} \cdot \rho + \frac{\Delta}{360 r^4} \cdot \rho (7 a^2 + b^2 + 7 c^2)$$

$$C - C' = \frac{\Delta}{3 r^2} \cdot \rho + \frac{\Delta}{360 r^4} \cdot \rho (7 a^2 + 7 b^2 + c^2)$$

$$\text{Mecmu} = \varepsilon = \frac{\Delta}{r^2} \cdot \rho + \frac{\Delta}{24 r^4} \cdot \rho (a^2 + b^2 + c^2)$$

elde edilir. Kürevi müsellesin F sathı cinsinden:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} \cdot \rho \qquad \text{idi.}$$

Binaenaleyh:

$$F = \Delta \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24 r^2}\right) \qquad \text{dır.}$$

Düsturlarda müstevi müsellesin sathı yerine fazlı kürevi cinsinden müsavisi konulursa:

$$A - A' = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180} \left(\frac{-2 a^2 + b^2 + c^2}{r^2}\right)$$

$$B - B' = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180} \left(\frac{a^2 - 2 b^2 + c^2}{r^2}\right)$$

$$C - C' = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180} \left(\frac{a^2 + b^2 - 2 c^2}{r^2}\right)$$

elde edilir. Veya:

[*] Zeitschrift für Astronomie und verwandte wissenschaften 1818 sahife 264 - 270

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \quad \text{vazedilerek:}$$

$$A - A' = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60} \cdot \frac{m^2 - a^2}{r^2}$$

$$B - B' = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60} \cdot \frac{m^2 - a^2}{r^2}$$

$$C - C' = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60} \cdot \frac{m^2 - a^2}{r^2}$$

şekline sokulabilir.

Bu düsturlar, müsellesin üç zaviyesine ait tashihatın yekdiğerine müsavi olmadığını ve zaviyelerin büyüklüğünün de rol oynadığını göstermektedirki bu Legendre davasına ait tenkitlerde madde 3 de mevzubahs olan noksana cevap teşkil etmektedir.

Bu düsturlardaki ikinci hadlerin müsavi dılılı müselleslerde sıfır olacağı aşikârdır. Bu da madde 1 de ileriye sürülen fikirdir. Bu düsturlara nazaran bir misâl yapılacak olursa ikinci hadlerin fevkalâde küçük olacağı görülür. Alman nirenği şebekesindeki en büyük müselleslerden olup dılıları takriben 70, 85 ve 106 kilometre olan bir müsellesde [*] ikinci hadler 0,000136″, 0,000096″, 0,000121″ olarak bulunmuştur. Bu miktarlar, pratik olarak zaviye farklarının yekdiğerine müsavi telakki edilebileceğini göstermektedir.

Legendre davasının tevsii için de pek çok etüdler yapılmış ve muhtelif formüller bulunmuştur. Meselâ yukarıda zikredilen düsturdaki ikinci hadler dılılar cinsinden ifade edilmiştir. Halbuki bunlar zaviyeler cinsinden de bulunabilir. Meselâ Kowalewski [**] sinüs münasebetinden istifade ile:

[*] Jordan III sahife 260

[**] Öster. Zeitschrift für vermessungswesen 17. Bd. sahife 1 - 5

$$A - A' = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{90}(\text{cotg}\,A + \text{cotg}\,B + \text{cotg}\,C) + \frac{\varepsilon^2}{30}\,\text{cotg}\,A$$

$$B - B' = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{90}(\text{cotg}\,A + \text{cotg}\,B + \text{cotg}\,C) + \frac{\varepsilon^2}{30}\,\text{cotg}\,B$$

$$C - C' = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{90}(\text{cotg}\,A + \text{cotg}\,B + \text{cotg}\,C) + \frac{\varepsilon^2}{30}\,\text{cotg}\,B$$

münasebetlerini elde etmiştir.

Legendre davasının mevcut bütün istihraç ve isbatlarında silsilelere tevsi ve muayyen dereceden hadler alınarak daha küçük hadlerden sarfınazar edilmiştir. Bu itibarla bütün düsturlar takribidir.

İşte Legendre davasının bu takribiyeti ve pratik noktai nazardan derecei sıhhatinin tayini için de bir çok araştırmalar yapılmıştır. Bunun için tutulan yol, müstevi ve kürevi zaviyelerin tefazullarının hesabında, daha küçük hadlerin de alınması olmuştur.

A. M. Nell bu hususa ait bir etüdünde, [*] sekizinci dereceden hadleri nazarı itibara almamak suretile, şu düsturlara varmaktadır:

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{r^2}\left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24\,r^2} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{360\,r^4}\right)$$

$$A - A' = \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{60\,r^2} + \frac{19(b^4 + c^4 - 2a^4) + a^2b^2 + a^2c^2 - 2b^2c^2}{30240\,r^4}\right\}$$

$$B - B' = \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{c^2 + a^2 - 2a^2}{60\,r^2} + \frac{19(c^4 + a^4 - 2b^4) + b^2c^2 + b^2a^2 - 2c^2a^2}{30240\,r^4}\right\}$$

$$C - C' = \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{60\,r^2} + \frac{19(a^4 + b^4 - 2c^4) + c^2a^2 + c^2b^2 - 2a^2b^2}{30240\,r^4}\right\}$$

Bu düsturlar vasıtasile hesap yapılırsa sonuncu hadlerin çok küçük oldukları, binaenaleyh Legendre davasının pratik noktai nazardan çok iyi bir takribiyeti haiz olduğu görülür. Meselâ bunu,

[*] Zeitschrift für Mathematik und physik 1874 sahife 324-334

nirengicilikte şimdiye kadar alınmış en büyük müselleslerden biri olan ve Balear adaları ile İspanya sahilleri arasında ölçülen bir müsellese tatbik edebiliriz. Bu müsellesin dılıları:

$$a = 142203{,}44\ m. \quad b = 160905{,}89\ m. \quad c = 110237{,}08\ m. \quad \text{dir.}$$

Bu miktarlar ile hesap yapıldığı takdirde:

$$\varepsilon = 38'',94175863 + 0{,}00232746 + 0{,}00000015$$

$$A - A' = 12{,}98136208 - 0{,}00001279 + \ldots.$$

$$B - B' = 12{,}98136208 - 0{,}00010337 + \ldots.$$

$$C - C' = 12{,}98136208 - 0{,}00011616 + \ldots.$$

elde edilir. Burada üçüncü hadler çok küçük oldukları için hesap edilmemişlerdir. Bunların büyüklükleri hakkında bir fikir edinebilmek için içlerinden en büyüğünü, yani $B - B'$ ye ait olanı yazalım. Hesap edilecek olursa bunun:

$$-\ 0'',000000003785$$

olduğu görülür. Bu neticeler, fazlı küreviyi müsavi üç kısma ayırarak yaptığımız hesaplarda, nekadar haklı olduğumuzu göstermektedir.

## Legendre davasının en umumî şekli:

Şimdiye kadar mevzubahs olan düsturlardan meselenin daima küreye nazaran halledildiği görülmektedir. Meseleyi daha umumî şekilde, yani lâalettayin satıhlar üzerinde ve dılıları jeodezi hatlarından ibaret olan müselleslere tatbiki ilk defa Bessel düşünmüştür. Fakat meseleyi ilk defa, en umumî şekilde isbat etmek şerefi C. F. Gauss'a aittir. «Disquisitiones generales» isimli eserinde Gauss lâalettayin bir satıh üzerinde aldığı, dılılar a, b, c zaviyeleri A, B, C ve mesahası $\sigma$ olan bir jeodezik müsellesi, dılıları aynı olan müstevi bir müselles ile mukayese etmektedir. Gauss'a göre, $k_a$, $k_b$, $k_c$ müselleşin köşelerine ait nısıf kutru inhinaların makûslarının murabbalarını gösterdiğine nazaran, zaviyeler arasındaki farklar:

$$A - A' = \frac{1}{12}\sigma(2k_a + k_b + k_c)$$

$$B - B' = \frac{1}{12}\sigma(k_a + 2k_b + k_c)$$

$$C - C' = \frac{1}{12}\sigma(k_a + k_b + 2k_c)$$ dır.

Bu düsturlarda dördüncü dereceden hadler nazarı itibara alınmamıştır. Küre için nısıf kutru inhinanın sabit olduğu malûmdur. Bu takdirde:

$$k_a = k_b = k_c = \frac{1}{r^2}$$

olur ve Legendre davasının basit şekli elde edilir. C. F. Gauss mezkûr eserinde dördüncü derece hadlerini de hesaba katmış ve şu neticeye varmıştır:

$$A - A' = \frac{1}{12}\Delta(2k_a + k_b + k_c) + \frac{1}{360}\Delta . k^2(a^2 + 7b^2 + 7c^2)$$

$$B - B' = \frac{1}{12}\Delta(k_a + 2k_b + k_c) + \frac{1}{360}\Delta . k^2(7a^2 + b^2 + 7c^2)$$

$$C - C' = \frac{1}{12}\Delta(k_a + k_b + 2k_c) + \frac{1}{360}\Delta . k^2(7a^2 + 7b^2 + c^2)$$

Bu düsturlar küreye tatbik edildiği takdirde tevsi edilmiş Legendre davası elde edilmiş olur. Burada k diğerlerinin vasatisine müsavi telakki edilebilir. Yani:

$$k = \frac{k_a + k_b + k_c}{3}$$ dir.

$\Delta$ ise müstevi müsellesin sathını göstermektedir. Jordan III sahife 430 a göre:

$$\sigma = \Delta + \frac{\Delta}{8} k\, m^2$$ dır.

$m^2$ nın ise:

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

olduğunu biliyoruz. Buna nazaran düsturları şu pratik şekle sokmak kabildir:

$$A - A' = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12}\left(\frac{k_a - k}{k}\right) + \frac{\varepsilon k}{60}(m^2 - a^2)$$

$$B - B' = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12}\left(\frac{k_b - k}{k}\right) + \frac{\varepsilon k}{60}(m^2 - b^2)$$

$$C - C' = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12}\left(\frac{k_c - k}{k}\right) + \frac{\varepsilon k}{60}(m^2 - c^2)$$

$k_a$, $k_b$, $k_c$ nin kıymetleri «Tables de l'Ellipsoide de Référence international, Paris 1928» den, müselles köşelerine ait arzı beldeler vasıtasile, alınabilir. Zira:

$$k = \frac{1}{r^2} \quad \text{dır.}$$

Adedî misâl:

| Nokta | Arz | log k | |
|---|---|---|---|
| A | 50° 51′ 9″ | $\log k_a = 6.3901277.8$ | |
| B | 51° 28′ 31″ | $\log k_b = 6.3900659.4$ | $\log k = 6.3900758.2$ |
| C | 51° 48′ 2″ | $\log k_c = 6.3900337.4$ | |

$a = 69194$ m $\quad b = 105973$ m $\quad c = 84941$ m

Buna nazaran:

$\varepsilon = 14'',849701 + 0'',000353 = 14'',850054$

$\sigma = 2932356450 + 69693 = 2932426143$ metre murabbaı.

$A - A' = 4'',950018 + 0'',000148 + 0'',000018 = 4'',950184$

$B - B' = 4'950018 - 0,000028 - 0,000021 = 4,949969$

$C - C' = 4,950018 - 0,000120 + 0,000003 = 4,949901$

Bu misâl Bessel ellipsoidi üzerinde yapılmıştır. Binaenaleyh $\frac{1}{r^2}$ ları da Bessel ellipsoidine ait cedvellerden alınmıştır.

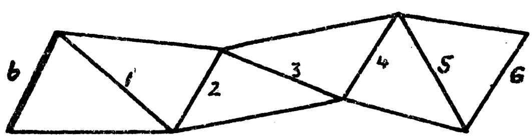
Ayni misâl kürevî hesaplanacak olursa farkların takriben 0,0001 saniyeyi geçmediği görülür.

Legendre ve Additament metodlarının mukayesesi:

Her iki tarzı da gördükten sonra bunlar arasında mukayese yapabilir ve hangi şeraitte hangi metodun tercih edilmesi icap edeceğini kesdirebiliriz.

Eğer tek müselleslerin halli mevzubahs ise Legendre davasından istifada etmek daha münasiptir. Her ne kadar Additament usulü de kısa isede, rasadları kontrol maksadile, fazlı küreviyi nasıl olsa hesap etmek icap edeceğinden, Legendre metodu ile neticeye daha çabuk varılacağı aşikârdır. Zira mesele bu takdirde hesaplanmış fazlı küreviyi müsavi üç kısma ayırarak zaviyelere ilâveden ibaret kalır. Sonra Legendre usulü hatırda kalacak kadar basittir.

Ayrı ayrı müsellesler yerine, zincir veya nirengi şebekelerinde olduğu üzere yekdiğerine merbut bir müsellesler heyetinin hesabı mevzubahs ise, Additament metodu daha iyidir. Meselâ, şekilde görüldüğü üzere, bir zincir tasavvur edelim:




Şekil 3

b bu zincir için alınmış bir baz olsun. Eğer mevcut altı müsellesin zaviyeleri ölçülmüş ise bu müsellesler hal olunabilir. Eğer Legendre usulü ile hesap yapmağa kalksak evvelâ her müsellesin ε nını ayrı ayrı hesap etmek icap edecektir. Bunun için ise müselleslerin satıhlarına ve binnetice dılıların takribi kıymetlerine ihtiyaç vardır. Binaenaleyh dılı hesabının biri fazlı küreviden evvel

( yani takribî ) biri de fazlı küreviden sonra ( yani katî ) olmak üzere iki defa icrası icap edecektir.

Keza hesap neticeleri ve rasadlar kayd ve muhafaza edilecek ise, Legendre usulünde, zaviyelerinde iki defa yazılması lâzımdır. Zira evvelâ doğrudan doğruya kürevî zaviyeler ve fazlı kürevî hesapları sonra da, müstevi zaviyeler nazarı itibara alınacaktır.

Halbuki Additament metodunda ne iki muhtelif zaviye kıymeti ne de iki muhtelif dılı hesabı vardır. Bu usulde evvelâ baz, additament hesaplanarak müsteviye irca edilir. Bunu müteakip mevcut kürevî zaviyelerle bütün müsellesler müstevi üzerinde imiş gibi hesap edilir. Meselâ şeklimizde b ve birinci müsellesin zaviyelerinden, müstevi müsellesatın sinüs münasebetinden istifade etmek suretile, evvelâ 1 numaralı dılı ve bunu müteakip sırasile 2, 3, 4, 5, 6 dılıları elde edilebilir. Bu suretle elde edilen dılı kıymetlerine, bir cedvelden alınacak Additament kıymetlerinin ilâvesi ile son kıymetler bulunmuş olur.

Zikredilen bu iki metodun birinden diğerini istihraç kabildir. [*] Fakat burada bunun hakkında malûmat vermekten sarfı nazar ediyoruz.

Hesap sathının intihabı:

Başlangıçta takriben 1 mil murabbalık sahanın müstevi, bir kaç yüz mil murabbalık sahanın küre ve daha büyük mıntakaların ise Ellipsoid gibi hesap edilmesi icap edeceğini zikretmiştik. Bu saha büyüklüklerinin tesbiti için, o mıntaka hesabatını sırasile müstevi, küre ve Ellipsoid üzerinde yapmak ve aradaki farkların kabili ihmal olup olmadıklarını tetkik etmek lâzımdır. Meselâ birinci derece müselles hesabını nazarı itibara alalım. Bu müsellesi müstevi farz edecek olursak müstevi müsellesatın basit düsturlarından istifade ederek hesap edeceğiz demektir. Şu halde mesele

[*] Jordan III sahife 250

fazlı kürevinin ne kadarlık bir saha için kabili ihmal telakki edilebileceğini bulmaktadır. Fazlı kürevi:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} . \rho \qquad \text{idi.}$$

r için vasati bir kıymet olan 6370 Km. miktarını alırsak 1″ lik bir $\varepsilon$ na 197 kilometre murabbalık bir sahanın tekabül ettiği hasapla bulunabilir ve yahut yuvarlak hesap 200 $Km^2$ lik saha 1″ ye tekabül ediyor farz edebiliriz. Şimdiye kadar yapılan tetkikattan, müsellesin her zaviyesinden $\frac{\varepsilon}{3}$ çıkarılarak müstevi müselles gibi hesap etmek icap ettiğini anlamış bulunuyoruz. Şu halde bir müsellesi kürevi farz etmek ile müstevi farz etmek arasındaki fark, zaviyelerin aynen veya $\frac{\varepsilon}{3}$ eksiği ile yapılan hesap arasındaki farktır. Zaviyedeki fark $\frac{\varepsilon}{3}$ ise bir istikametteki fark $\frac{\varepsilon}{6}$ demektir. $\frac{\varepsilon}{6}$ nın ne vakit kabili ihmal olduğunu bulalım. Bir istikametteki hata $\alpha$ ve alınan mesafe m ise nehayet noktasının ucu:

$$h = m . \frac{\alpha}{\rho}$$

kadar hatalı olacaktır. Eğer:

$$h < 1 \text{ santim}$$

olması isteniyorsa:

$$\alpha < \frac{\rho}{m}$$

olması lâzımdır. Burada $\rho$ sabit miktardır. m in de santim cinsinden alınması icap eder. Eğer kilometre cinsinden alınırsa:

$$\alpha < \frac{\rho}{100\,000 \text{ m}} \qquad \text{olur.}$$

Binaenaleyh: $\alpha = \frac{\varepsilon}{6}$ icin:

$$\varepsilon'' < \frac{206\,265.\,6}{100\,000\ m}$$

$$\varepsilon'' < \frac{12}{m} \quad \text{olur.}$$

Şimdi yine başlangıçtaki iddiaya gelelim. 1 mil murabbaı veya 55 $Km^2$ lik saha takriben $\frac{1}{4}$ saniyelik bir $\varepsilon$ na tekabül edecektir. Zira bir az evvel takriben 200 $Km^2$ nin 1″ ye tekabül ettiğini görmüştük. Bir mil murabbalık saha dahilinde m bir mil veya yuvarlak hesap 8 Km. olur. Buna göre:

$$h = \frac{800{,}0000,\ \frac{1}{4.6}}{\rho} \approx 1 \text{ milimetre olur.}$$

Demekki bir santim hataya göz yumulacak olursa daha büyük saha alınabilir. Meselâ 200 $Km^2$ lik saha alalım. Bnna tekabül eden $\varepsilon$ bir saniyedir. m ise:

$$m = \sqrt{200} \approx 15 \text{ Km. dir.}$$

Şu halde:

$$h = 15.\frac{1}{6.\rho} \approx 1 \text{ santim olur.}$$

Şu halde 200 $Km^2$ lık bir saha müstevi kabul edilebilir. Küre ile Ellipsoid arasındaki zavıye farklarını bu kadar basit bir surette göstermeğe imkân yoktur. Fakat evvelce hesaplanan ve dılıları takriben 70, 85 ve 106 Km. olan müsellesde aradaki farkın 0,0001″ olduğunu zikretmiştik. Bu müsellesin sathı 2932 $Km^2$ idi. Bu bize fark hakkında bir fikir verebilir. Başlangıçdaki iddiamıza göre 10 000 kilometre murabbalık sahanın küre olarak alınabilmesi iktiza eder. Hakikaten pratik hesaplar bu iddiayi teyid etmektedir.