# NİRENGİ AĞLARININ DENGELENMESİ VE SONUÇLARIN TEST EDİLMESİ

Hüseyin DEMİREL

## 1. GİRİŞ

Jeodezik ağlar belli kurallara göre yeryüzünde işaretlenmiş noktalardan oluşur. Kontrol noktaları adı verilen ağ noktaları doğrultu,uzaklık,nivelman, gravite,uydu v.b.gözlemleri ile birbirine bağlanır. Geometrik ve fiziksel ölçü büyüklükleri matematiksel modeller yardımıyla değerlendirilerek kontrol noktalarının konum koordinatları, gravite değerleri ve duyarlıkları belirlenir. Sonuçların yorumlanması ile belli yargılara ulaşılır.

Dengeleme yardımıyla ölçülerin değerlendirilmesinde bilinen parametrelerden başka ölçülere etki eden parametreler de hesaba katılarak matematiksel modelin, ölçülerin geometrik ve fiziksel özelliklerine olabildiğince uygun olması sağlanır. Ölçüleri etkileyen parametrelerin çoğunlukla kavranamaması ya da bir kısmının boşlanması sonucu model hataları ortaya çıkar. Bu hatalar dengeleme sonuçlarını etkileyerek jeodezik ağda distorsiyonlara neden olabildiğinden istatistik testler yardımıyla modelin kontrol edilmesi ve varsa uyuşumsuz ölçülerin ayıklanması gerekir. Hatalara karşı ölçülerin kontrol edilebilirliği ve istatistik yöntemler ile ortaya çıkarılamayan hataların dengeleme sonuçlarına olan etkileri güvenilir ölçütleri ile belirlenir.

Aşağıda nirengi ağlarının dengelenmesinde dayanılan üç ve iki boyutlu geometrik modeller incelenmekte ve ağların birleştirilmesinde Helmert blok dengelemesi yöntemi açıklanmaktadır. İstatistik analizler bölümünde modelin kontrol edilmesi, uyuşumsuz ölçü testleri, iç güvenirlik ve dış güvenirlik kavramları üzerinde durulmaktadır.

## 2. NİRENGİ AĞLARININ DENGELENMESİ

### 2.1 Matematiksel model ve dengeleme sonuçları

Jeodezik ölçülerin dengeleme ile değerlendirilmesi matematiksel modellere dayanır. n sayıda ölçü değeri n boyutlu raslantı vektörünün gerçekleşen değerleri anlamındadır. Bu vektörün n boyutlu normal dağıldığı kabul edilir.

Dolaylı ölçüler dengelemesinde matematiksel modelin fonksiyonel bileşeni, rastlantı vektörünü oluşturan elemanların bilinmeyen umut değerleri ile deterministik ya da stokastik bilinmeyen parametreler vektörü arasındaki fonksiyonel ilişkileri tanımlanır. Bu tanımda ölçülerin geometrik ve fiziksel özellikleri belirleyici olur. Çoğunlukla doğrusal olmayan fonksiyonel model bilinmeyenlerin uygun yaklaşık değerleri kullanılarak Taylor açınımı ile doğrusallaştırılır.

Matematiksel modelin ikinci bileşeni olan stokastik model, bir fonksiyon ile kavranamayan fiziksel etkileri, başka bir deyişle ölçüler arasındaki bağımlılıkları ve onların duyarlıklarını gösterir. Bu model rastlantı vektörünün varyans-kovaryans matrisi ile tanımlanır. Buna göre ;

| | | |
|---|---|---|
| $\underline{\ell}$ | (n x 1) | küçültülmüş ölçüler, |
| $\underline{A}$ | (n x u) | katsayılar matrisi, |
| $\underline{x}$ | (u x 1) | küçültülmüş bilinmeyenler, |
| $\underline{C}$ | (n x n) | ölçülerin varyans-kovaryans matrisi, |
| $\underline{P}$ | (n x n) | " ağırlık matrisi, |
| $\underline{Q}$ | (n x n) | " ağırlık katsayıları matrisi, |
| $\sigma^2$ | | bilinmeyen varyans faktörü, |
| E(.) | | umut değer |

olmak üzere matematiksel model

$$E(\underline{\ell}) = \underline{A}\,\underline{x} \quad , \quad \underline{C} = \sigma^2\,\underline{P}^{-1} = \sigma^2\,\underline{Q} \qquad (1)$$

sistemi ile belirlenmiş olur. Buna Gauss-Markoff modeli de denmektedir.Model Taylor açınımına göre doğrusallaştırılmış biçimi ile verildiğinden $\underline{\ell}$ vektörü bilinmeyenlerin yaklaşık değerleri ile belirlenen fonksiyonel değerleri kadar küçültülmüş ölçüler ($\ell_i = L_i - f_i\,(X^o\,,\,Y^o,\ldots)$) ve $\underline{x}$ vektörü bilinmeyenlerin yaklaşık değerleri kadar küçültülmüş bilinmeyenler ($x = X - X^o$, $y = Y - Y^o,\ldots$) anlamındadır.

Ölçü sayısı n bilinmeyen sayısı u dan büyük olduğundan $\underline{\ell} = \underline{A}\,\underline{x}$ denklem sistemi inkosistent (tutarsız) dır. $\underline{\ell}$ vektörüne umut sıfıra eşit olan rastlantı vektörü $\underline{\varepsilon}$ eklenerek (1) de verilen fonksiyonel model $\underline{\ell} + \underline{\varepsilon} = \underline{A}\,\underline{x}$ biçiminde konsistent (tutarlı) denklem sistemine dönüştürülür. $\underline{x}$ ve $\underline{\varepsilon}$ vektörlerinin dengeleme ile bulunacak tahmin değerleri $\hat{\underline{x}}$ ve $\underline{v}$ ile gösterilirse (1) yerine

$$\hat{\underline{\ell}} = \underline{\ell} + \underline{v} = \underline{A}\,\hat{\underline{x}} \;, \qquad \underline{C} = \sigma^2\,\underline{P}^{-1} \qquad (2)$$

Ölçülerin normal dağılımlı asıl kümeden kaynaklandığı;

$$\underline{\ell} \sim N(\underline{A}\ \underline{x},\ \sigma^2\ \underline{P}^{-1})$$

varsayılırsa $\underline{A}$ katsayıları matrisinin rangının bilinmeyen sayısı u ya eşit olduğu durumda, özdeş sonuçlara götüren değişik yöntemlerden biri, örneğin $\underline{v}^T\ \underline{P}\ \underline{v} = \min.$ koşulunu öngören en küçük kareler yöntemi ile aşağıda verilen çözüm eşitlikleri elde edilir.

Bilinmeyenler vektörü x ve ağırlık katsayıları matrisi $\underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$:

$$\hat{\underline{x}} = \underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\ \underline{A}^T\ \underline{P}\ \underline{\ell} \quad , \quad \underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = (\underline{A}^T\ \underline{P}\ \underline{A})^{-1} \tag{3}$$

Düzeltmeler $\underline{v}$ ve bunların ağırlık katsayıları matrisi $Q_{vv}$ :

$$\underline{v} = -\ \underline{Q}_{vv}\ \underline{P}\ \underline{\ell} \quad , \quad \underline{Q}_{vv} = \underline{P}^{-1} - \underline{A}\ \underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\ \underline{A}^T \tag{4}$$

Düzeltilmiş ölçüler ve bunların ağırlık katsayıları matrisi $\underline{Q}_{\ell\ell}$ :

$$\hat{\underline{\ell}} = \underline{\ell} + \underline{v} \quad , \quad \underline{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = \underline{A}\ \underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\ \underline{A}^T \tag{5}$$

Düzeltmelerin karelerin toplamı $\Omega$ :

$$\Omega = \underline{v}^T\ \underline{P}\ \underline{v} = \underline{\ell}^T\ \underline{P}\ \underline{Q}_{vv}\ \underline{P}\ \underline{\ell} \tag{6}$$

Apriori varyans $\sigma^2$ nin tahmin değeri $\hat{\sigma}^2$ (aposteriori varyans) :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\Omega}{n-u} \quad , \quad r = n - u \ \text{ serbestlik derecesi} \tag{7}$$

Ağın belirli olması için gerekli yeterli sayıda parametrenin (datum parametreleri) bilinen olarak öngörülmediği durumda $\underline{v}^T\ \underline{P}\ \underline{v} = \min.$ koşulu yanında küçültülmüş bilinmeyenlerin kareleri toplamı, $\hat{\underline{x}}^T\ \hat{\underline{x}} = \min.$ yapılarak $\underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = (\underline{A}^T\ \underline{P}\ \underline{A})^+$ Moore-Penrose tersi ile çözüme ulaşılır. Başka bir deyişle ağ serbest dengelenir.

Duyarlık ölçütleri olarak noktalara ilişkin duyarlık ölçütleri; koordinat ortalama hataları, Helmert nokta ortalama hataları, Helmert ortalama hata elipsleri, güven elipsleri, bağıl duyarlık ölçütleri ; bağıl güven elipsleri, parsiyel güven elipsleri ve ağın tamamına ilişkin (global) duyarlık ölçütleri ; örneğin bilinmeyenlerin varyans-kovaryans matrisinden dönüştürülen nokta ortalama hatalarının ortalaması kullanılır. Noktalara ilişkin duyarlık ölçütleri ile ağ noktalarının duyarlıkları konusunda bir yargıya varılır. Datum parametrelerinin seçimine bağlı büyüklüklerdir. Bağıl duyarlık ölçütleri yardımıyla ağ noktalarının karşılıklı konum duyarlıkları hakkında bilgi edinilir, Global duyarlık ölçütleri ağın tümü ile ilişkili büyüklüklerdir. Genellikle jeodezik ağların enuygunlaştırılmasında kullanılırlar (H.Demirel, 1984).

$\underline{v}$ düzeltmeleri rastlantı hataları yanında matematiksel model ile ölçülerin fiziksel özelliklerini yansıtan gerçek arasındaki farkları da içerir. Bu anlamda $\underline{v}$ lere ölçü düzeltmeleri yerine dengeleme artıkları (Residuen) denir. $\underline{v}$ dengeleme artıkları özel test yöntemleri ile analiz edilerek uyuşumsuz ölçüler (Ausreisser-Outlier) saptanabilir. Bir ölçünün uyuşumsuzluğu onun mutlaka hatalı, ötekilerin ise hatasız olduğu anlamına gelmez. Dengeleme artıkları ve uygulanan test büyüklükleri jeodezik ağın geometrisine ya da ölçme planına bağlı olduğundan ölçülerin kontrol edilebilirliliği ve gerçekten var olan hataların ortaya çıkarılabilmesi ağın tasarımı ile doğrudan ilişkilidir. Jeodezik ağ bu anlamda güvenilir bir ağ olmalıdır. Uyuşumsuz ölçü testleri ile bu konuya bölüm 4 de tekrar dönülecektir.

## 2.2 Nirengi ağlarında fonksiyonel modeller

Nirengi (yatay kontrol) ağları için çok sayıda modelden söz edilebilir. Üç boyutlu modellerde yatay ve düşey kontrol birlikte ele alınır. Bunlardan biri ve başlıcası geometrik modeldir. Bu modelde, ağ noktalarının global astronomik dik koordinat sisteminde X, Y, Z koordinatları ve noktalardaki gravite vektörlerinin $\Phi$ ,$\Lambda$ doğrultu parametreleri belirlenir. Buna göre her bir nokta için bilinmeyenlerin sayısı 5 dir.

Yeryüzünde işaretlenen nirengi noktaları bir uzay ağı (çok yüzlü) oluşturur. Ağ noktalarında ;

| | | |
|---|---|---|
| $r$ | yatay doğrultular, | |
| $\beta$ | başucu açıları, | |
| $s$ | uzay uzaklıkları, | |
| $\Phi'$ | astronomik enlemler, | |
| $\Lambda'$ | " | boylamlar, |
| $\alpha'$ | " | azimutlar, |
| $\Delta H$ | Ortometrik yükseklik farkları | |

ölçülür. Global astronomik dik koordinatlar sisteminde durulan $P_i$ noktasının koordinatları $X_i$ , $Y_i$, $Z_i$, o noktadaki gerçek gravite vektörünün doğrultu parametreleri $\Phi_i$, $\Lambda_i$ ve bakılan $P_k$ noktasının koordinatları $X_k$, $Y_k$, $Z_k$ olsun. Durulan noktada (lokal astronomik dik koordinatlar sisteminin başlangıç noktası) ölçülen $\beta_{ik}$, $s_{ik}$ ve $\alpha'_{ik}$ kutupsal koordinatları bu büyüklüklerin fonksiyonları biçiminde yazılabilir. $r_{ik}$ doğrultu ölçüsü $\alpha'_{ik}$ dan yönlendirme bilinmeyeni $o_i$ kadar farklıdır. Bilinmeyenlerin yaklaşık değerleri ile hesaplanan fonksiyon değerleri $f_o$, Taylor'a göre açınımdan sonra elde edilen küçültülmüş bilinmeyenlerin doğrusal fonksiyonları d, ölçüler L ve düzeltmeleri ve ile gösterilirse, genel olarak fonksiyonel model (düzeltme denklemleri) için

$$v = d + f_o - L, \qquad f_o - L = -\ell \tag{8}$$

eşitlikleri geçerli olur. $P_i$ noktasındaki ölçüler için ;

$$ds_{ik} = f_1\,(\delta X_i\,,\ \delta Y_i\,,\ \delta Z_i\,,\ \delta X_k\,,\ \delta Y_k\,,\ \delta Z_k)$$

$$d\beta_{ik} = f_2\,(\delta X_i\,,\ \delta Y_i\,,\ \delta Z_i\,,\ \delta X_k\,,\ \delta Y_k\,,\ \delta Z_k\,,\ \delta\Phi_i\,,\delta\Lambda_i,\ \delta K)$$

$(K = K_o + \delta K$ kırılma faktörü)

$$d\alpha'_{ik} = f_3\,(\delta X_i\,,\ \delta Y_i\,,\ \delta Z_i\,,\ \delta X_k\,,\ \delta Y_k\,,\ \delta Z_k\,,\ \delta\Phi_i,\ \delta\Lambda_i) \tag{9}$$

$dr_{ik} = f_4$ ($d\alpha'_{ik}$ deki gibi ve $\delta o_i$ yönlendirme bilinmeyeni)

$$d\Phi'_i = f_5\,(\delta\Phi_i)$$

$$d\Lambda'_i = f_6\,(\delta\Lambda_i)\ ,\quad d\Delta H_{ik} = f_7(\delta X_i\,,\ \delta Y_i\,,\ \delta Z_i\,,\ \delta X_k\,,\ \delta Y_k\,,\ \delta Z_k)$$

dir. Ayrıntılar H.Wolf 1963 de verilmiştir. Yaklaşık koordinat değerleri, lokal astronomik dik koordinat sistemi ile global astronomik dik koordinat sistemi arasındaki dönüşüm eşitliklerinden hesaplanabilir. Gravite vektörünün yaklaşık doğrultu parametreleri yerine $\phi$ ,$\lambda$ elipsoid koordinatları ya da $\Phi'$, $\Lambda'$ ölçü değerleri alınır. Uydu gözlemlerine ilişkin denklemler ile (9) fonksiyonel modeli genişletilebilir.

Uzay ağın dengelenmesinde ikinci yol, global elipsoid eğri koordinatlar ya da jeodezik koordinatlar ($\phi$ , $\lambda$ ,h) sistemidir. h elipsoid yüksekliği anlamındadır. Global elipsoidin orta noktasının global astronomik dik koordinat sisteminin başlangıç noktası ile çakıştığı durumda X, Y, Z koordinatları jeodezik koordinatların fonksiyonları biçiminde yazılır ve bunlara göre dik koordinatlar için diferansiyel eşitlikleri (8) ve (9) da yerlerine konursa küçültülmüş bilinmeyenleri $\delta\phi_i$ , $\delta\lambda_i$ , $\delta h_i$, $\delta\phi_k$ , $\delta\phi_k$ , $\delta\lambda_k$ , $\delta h_k$, $\delta\Phi_i$ , $\delta\Lambda_i$ olan dengeleme modeline geçilir (H.Wolf, 1963). Refraksiyon etkileri nedeniyle 1.grupta konum, 2.grupta yükseklik ve çekül sapması bilinmeyenleri olmak üzere dengeleme için iteratif bir çözüm önerilmektedir.

Bu model bölgesel ağlarda denenmiş, ama 1.derece ağlara uygulanmamıştır. Refraksiyon etkileri modelin uygulanmasında sorun olarak gözükmektedir.

Yukarıda açıklanan geometrik modelin genelleştirilmişi olarak görülen ve G.Hein (1982) tarafından geliştirilen bütünleştirilmiş modelde geometrik ölçüler; yatay doğrultular, başucu açıları, uzaklıklar, astronomik enlem, boylam ve azimutlar 1.grup ölçüler, fiziksel büyüklükler; gravite, gravite farkları, nivelman yardımıyla belirlenen potansiyel farklar, gravite gradyentleri ve torsiyon terazisi büyüklükleri 2.grup ölçüler olarak ele alınmaktadır. Problem, kollokasyon yöntemi ile iki adımda çözülmektedir. 1.adımda model, 1.grup ölçüler ve geometrik bilinmeyenlerden (koordinatlar,yönlendirme parametreleri, kırılma faktörü) oluşmakta, 2. adımda buna fiziksel ölçüler eklenerek potansiyel ve onun türevleri (2.grup bilinmeyenler) sinyal büyüklükleri olarak elde edilmektedir. Çözüm, gerekli kovaryans fonksiyonların doğru olarak bilinmesine bağlıdır.

Bu yöntemde elipsoid gerekli olmamakta, varsayımlara dayanan ölçü indirgemeleri ortadan kalkmakta ve jeodezik ölçülerin her türü birlikte değerlendirilebilmektedir.

Elipsoid yükseklikleri sabit (hatasız) kabul edilirse geometrik üç boyutlu hesaplamalar iki boyutluya dönüşür. Ülke ölçmesinde iki boyutlu konum modeli, üç boyutlu uzayın elipsoid yüzeyine ortogonal izdüşümünden elde edilir. Bu işlemde üçüncü boyut olarak elipsoid yüksekliği, astronomik koordinatlar ya da çekül sapmaları ve bunlara göre jeoid ondülasyonları hatasız kabul edilir. Yalnızca elipsoid yüzeyine indergemeler noksansız olmalıdır.

Elipsoid yüzeyinde (iki boyutlu) dengeleme aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Ölçüler (elipsoid yüzeyine indirgenmiş) :

$s$ Elipsoid yay uzunlukları,

$r$ yatay doğrultular,

$\alpha'$ astronomik azimutlar.

Bilinmeyenler :

$\phi$, $\lambda$ enlem ve boylamlar,

$o$ yönlendirme bilinmeyenleri,

$\Delta$ uzaklık ölçerler için ölçek faktörleri.

$\phi^o$, $\lambda^o$ yaklaşık koordinat değerleri ile uygun çözüm eşitliklerinden,örneğin Gauss-ortalama enlem formüllerinden $\alpha^o$, $s^o$yaklaşık azimut ve elipsoid yay uzunlukları bulunur. Bu değerler (8) de $f_o$ a karşılıktır. $P_i$ ve $P_k$ noktaları arasında küçültülmüş bilinmeyenlerin doğrusal fonksiyonları için ;

$$ds_{ik} = f_1\ (\delta\phi_i\ ,\ \delta\lambda_i\ ,\ \delta\phi_k\ ,\ \delta\lambda_k\ ,\ \delta\Delta)\ \ ,\ \ -\ \ell^s_{ik} = s^o_{ik}\ -\ s_{ik}$$

$$dr_{ik} = f_2\ (\delta\phi_i\ ,\ \delta\lambda_i\ ,\ \delta\phi_k\ ,\ \delta\lambda_k\ ,\ \delta o_i)\ \ ,\ \ -\ \ell^r_{ik} = \alpha^o_{ik}\ -\ r_{ik}\ -\ o^o_i$$

$$d\alpha'_{ik} = f_3\ (\delta o_i \text{ sıfır ile } dr_{ik} \text{ daki gibi}) \tag{10}$$

$$-\ell'_{ik} = \alpha^o_{ik} - \alpha'_{ik} + (\Lambda'_i - \lambda^o_i)\ \sin\phi^o_i$$

eşitlikleri elipsoid jeodezisinin diferansiyel denklemlerinden elde edilir (N.Wolf, 1975). $P_i$ noktasındaki kesin yönlendirme $o_i = o^o_i + \delta o_i + \delta\lambda_i \sin\phi_i$ dir. Eşitliğin sağındaki son terim durulan noktanın boylamındaki değişimin meridyen yaklaşma açısına olan etkisini göstermektedir.

Dengelemede jeodezik koordinatlar yerine bilinmeyenler olarak metrik büyüklükler kullanılması kolaylıklar sağlar. Buna göre düzeltme denklemlerinde, $M_i$ ve $N_i$ büyüklükleri $P_i$ noktasındaki meridyen ve normal eğrilik yarıçapları olmak üzere,

$$\delta\bar{x}_i = M_i\ \delta\phi_i/\rho \quad , \quad \delta\bar{y}_i = N_i\ \cos\phi_i\ \delta\lambda_i\ /\rho \tag{11}$$

bilinmeyenler olarak alınmalıdır. Benzer şekilde $P_k$ noktası için $\delta\bar{x}_k$ ve $\delta\bar{y}_k$ geçmelidir.

Nirengi ağı tüm noktalara ya da belli sayıda noktaya göre serbest konumlandırılmak istenirse fonksiyonel modele 4 koşul denklemi eklenmelidir.Koşul denklemlerinin katsayılar matrisi Helmert benzerlik dönüşümü ile elde edilir. Bu koşullar ile normal denklem katsayılar matrisinin defekti giderilir ve dönüşüme sokulan noktaların küçültülmüş koordinat bilinmeyenlerinin kareleri toplamının min. olması sağlanır. Ağın sınırlı sayıda noktaya göre serbest dengelenmesi durumunda dönüşüme girmeyen noktalara ilişkin bilinmeyenler yerine, koşul denklemlerinde sıfır yazılır. Bunun gibi doğrultu ölçülerine ilişkin yönlendirme ve uzaklık ölçüleri için ölçek bilinmeyenleri de bu dönüşümde etkisizdir.

Koşul denklemlerinin katsayılar matrisi, ağ noktalarının $\phi$ , $\lambda$ enlem ve boylamlarının, dönme merkezi olarak seçilen herhangi bir $P_o$ noktasının $\phi_o$ enlemine, $\lambda_o$ boylamına $\alpha_o$ azimutuna ve $\bar{\Delta}$ ölçek faktörüne göre türevleri alınarak oluşturulur. Düzlemdeki gibi basit olmayan bu eşitlikler D.Ehlert (1984) de verilmiştir.

Dengelemenin tüm kontrolları yapılmalı, bilinmeyenlerin başlangıçta yazılan ilk fonksiyonel modeli sağlamadığı durumda bunlar yaklaşık değerler anlamında kabul edilerek dengeleme baştan sona yinelenmelidir.

Mühendislik ölçmeleri ve deformasyon analizleri için oluşturulan yatay kontrol ağları genellikle küçüktür. Duyarlı ölçme aletleri ile ağ noktaları arasındaki uzaklıklar ve yatay doğrultular gözlenir. Dengeleme ile ağ noktalarının konum koordinatları belirlenir.

Ölçüler :

- s uzaklıklar,
- r yatay doğrultular.

Bilinmeyenler :

- X, Y noktaların koordinatları,
- Δ ölçek faktörleri,
- C uzaklık ölçerler için toplam sabiteler,
- o yönlendirme bilinmeyenleri.

Ağın bir $P_i$ noktasından $P_k$ noktasına yapılan $r_{ik}$ doğrultu ve $s_{ik}$ uzaklık ölçüleri için,

$$
\begin{aligned}
r_{ik} + v_{ik}^{r} &= \arctan\{(Y_k - Y_i)/(X_k - X_i)\} - 0_i \\
s_{ik} + v_{ik}^{s} &= C + \Delta \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2}
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

denklemleri, yaklaşık koordinat değerleri ve $C^o = 0$ , $\overset{o}{\Delta} = 1$ ile $\delta X_i$ , $\delta Y_i$, $\delta X_k$ , $\delta Y_k$ , $\delta C$ , $\delta\Delta$ , $\delta o_i^o$ bilinmeyenli doğrusallaştırılmış modele kolayca dönüştürülebilir. Alet sabiteleri ve ölçek faktörleri ağda kullanılan uzaklık ölçerlerin sayısına bağlıdır. Ayrıca, hangilerini bilinmeyen olarak modele sokmanın anlamlı olup olmayacağı asıl dengelemeden önce istatistik test yöntemleri ile araştırılmalıdır.

Bir koordinat sisteminde ağın konum, dönüklük ve uzaklık ölçülmemişse ölçek bakımından belirli olmasını mümkün kılacak yeterli sayıda parametre serbestçe seçilerek ya da küçültülmüş koordinat bilinmeyenlerinin kareleri toplamının min. olması öngörülerek datum defekti giderilir. Buna göre ağ dayalı ya da serbest dengelenir.

## 2.3 Nirengi ağlarında stokastik model

Stokastik modeli oluşturabilmek için ölçülerin varyanslarını ve aralarındaki kovaryansları bilmek gerekir. Genellikle bunlar apriori bilgilere dayanır. Asıl dengelemeye geçmeden önce ön dengelemeler ile ölçülerin duyarlıkları araştırılır.

Doğrultu ölçülerinin varyansları istasyon dengelemeleri ile belirlenir. Ağ yalnızca doğrultu ölçülerine göre dengelenerek de bir doğrultu ölçüsünün varyansı bulunabilir. Ağ noktalarında yapılan dengelemeler sonucu bir doğrultu ölçüsü için bulunan varyanslar arasındaki farkların anlamlı (signifikant) olup olmadığı Bartlett-testi ile araştırılır. Test sonucu birbirinden farkları anlamlı görülmeyenler yerine onların ağırlıklı (= serbestlik derecesi) ortalamaları alınır ve bunlar yardımıyla asıl dengelemeye giren doğrultu ölçülerinin (istasyon dengelemesi sonuçlarının) varyansları hesaplanır (W.Niemeier, 1980).

Uzaklık ölçülerinin varyanslarını tahmin edebilmek için kullanılan uzaklık ölçerlere göre ağ gruplara ayrılır (gruplar dengeleme için yeterli sayıda ölçü içermelidir) ve ayrı ayrı dengeleme yapılır. Sonuçta birim ağırlıklı uzaklık ölçüleri için varyans değerleri ve ölçülerin varyansları elde edilir.

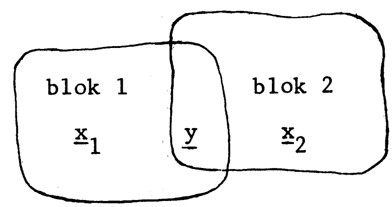
Çift ölçü farkları ve üçgen kapanmaları yardımıyla da uzaklık ve doğrultu ölçülerinin varyansları tahmin edilebilir.

Doğrultu ve uzaklık ölçülerinin varyanslarını belirlemede başka bir yol da Helmert'e göre aposteriori varyans tahmin yöntemidir. Bu yöntemde ölçüler doğrultular ve uzaklıklar olmak üzere iki gruba ayrılır. Tüm ölçüler için geçerli dengeleme modeline dayanan çözüm eşitlikleri ile doğrultu ve uzaklık ölçülerinin varyansları bulunur (W.Welsch, 1980). Ölçüler, gerektiğinde çok sayıda gruplara da ayrılabilir.

Ölçüler arasındaki korelasyonların hesabı çoğunlukla güç ya da olanaksızdır. Deneyimlere ve kovaryans fonksiyonlara dayanan tahmin hataları dengeleme sonuçlarını etkileyebilir. Cebrik ve fiziksel korelasyonları etkisiz kılmak için uygun ölçme yöntemleri seçilir ve fonksiyonel modele etki parametreleri sokulur. Stokastik model, genellikle köşegeni üzerinde ölçülerin varyanslarını içeren ve köşegeni dışındaki elemanları (kovaryanslar) sıfıra eşit olan bir matris olarak öngörülür. Bu matrisin tersi uygun bir $\sigma^2$ varyans faktörü ile çarpılarak $\underline{P}$ ağırlık matrisi elde edilir.

## 3. NİRENGİ AĞLARININ BİRLEŞTİRİLMESİ

Günümüzde bilgisayarlar ile binlerce bilinmeyenli dengeleme problemleri çözülebilmekte ve programlama tekniğine elverişli olması nedeniyle dolaylı ölçüler dengelemesi yöntemi yeğlenmektedir. Bir üst sisteme yönelik olarak ülke nirengi ağlarının uluslararası düzeyde birleştirilmesi ya da uydu ağları ile birlikte değerlendirilmesi gerektiğinde Helmert blok dengelemesi yöntemi uygulanabilir. Kullanılan bilgisayar tümden dengeleme için yeterli olsa bile sonuçların güvenliği açısından bir ülke ağının gruplar halinde dengelenmesi zorunlu görülebilir. Ölçüleri tamamlanan bir ağ bölümünde kesin sonuçlara gereksinme duyulabilir. Ayrıca çok sayıya ulaşabilen yönlendirme bilinmeyenlerinin normal denklemlere geçilmeden önce yok edilmesinde Helmert blok dengelemesi yöntemi uygun gözükmektedir.




Yöntem, şekilde gösterilen iki blok ile açıklanabilir. B. 1 ve b. 2 bir nirengi ağının iki bölümüdür. $\underline{y}$ ortak bilinmeyenler olarak her iki blokta, $\underline{x}_1$ ve $\underline{x}_2$ yalnızca b. 1 ve b. 2 de geçmektedir. $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ blokların iç bilinmeyenleri, $\underline{y}$ de bağlantı bilinmeyenleri anlamındadır. İç bilinmeyenler arasında ortak ölçü yoktur. B.1 ve b. 2 için ayrı ayrı normal denklemler kurulur. İndirgeme sonucu b.1 den $\underline{x}_1$ ve b. 2 den $\underline{x}_2$ iç bilinmeyenleri yok edilerek yalnızca $\underline{y}$ bilinmeyenli indirgenmiş iki normal denklem elde edilir. Bunlar toplanarak bağlantı bilinmeyenleri vektörü $\underline{y}$ ve sonra geriye dönülerek b. 1 ve b.2 ye ilişkin ilk normal denklemlerden iç bilinmeyenler $\underline{x}_1$ , $\underline{x}_2$ bulunur (H.Wolf, 1975 ; W.Höpcke, 1980).

Yönlendirme bilinmeyenlerinin yok edilmesinde, bir yönlendirme bilinmeyeninin geçtiği düzeltme denklemleri bir blok kabul edilir. Bloklarda iç bilinmeyenler olarak yönlendirme bilinmeyenleri yok edilirken art arda birleştirmeler ile bir yandan normal denklemler de oluşturulur (D.Ehlert, 1984).

## 4. İSTATİSTİK ANALİZLER

Dengeleme sonuçlarına ve onların duyarlıklarına ilişkin yargılar, matematiksel modelin gerçeği yansıtma durumunda doğrudur. Model hataları ya da sistematik hatalar dengeleme sonuçlarını etkiliyebilmektedir. Bu nedenle ortalama hata, konum hatası v.b. duyarlık ölçütleri yalnız başlarına sonuçların iyiliğini tanımlamada yetersiz kalır. Bir ölçünün ötesi ölçüler tarafından ne oranda kontrol edilebildiğini ya da model hatalarına karşı ne ölçüde duyarlı olduğunu gösteren iç güvenirlik, ayrıca istatistik test yöntemleri ile ortaya çıkarılamayan model hatalarının dengeleme sonuçlarına olan etkilerini gösteren dış güvenirlik ölçütlerinin belirlenmesi gerekir.

## 4.1 Matematiksel modelin test edilmesi

Model testi için hipotez olarak, matematiksel modelin geometrik ve fiziksel ilişkileri ve ölçülerin stokastik özelliklerini doğru ve noksansız bir biçimde tanımladığı ileri sürülür. Dengeleme ile belirlenen birim ağırlıklı ölçünün $\hat{\sigma}^2$ varyansı ile apriori $\sigma^2$ varyansı karşılaştırılır. Model hipotesi doğru ise $H_o : F(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ sıfır hipotezi geçerli olmalıdır. $\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ test büyüklüğü F ya da $\chi^2$ dağıtım tablosundan alınan güven sınırından büyük,

$$\hat{\sigma}^2 \;/\; \sigma^2 \;>\; F_{f,\infty\;,\;1-\alpha} = \chi^2_{f,1-\alpha} \tag{13}$$

ise sıfır hipotezi reddedilir ve model hatası olduğuna karar verilir. Burada $f = n - u$, $\hat{\sigma}^2$ için serbestlik derecesi, $\alpha$ yanılma olasılığı (1.tür hata), $1-\alpha$ istatistik güven, $\infty$ varyans $\sigma^2$ (apriori öngörülen) için serbestlik derecesi anlamındadır. Matematiksel model testine global test denir.

## 4.2 Uyuşumsuz ölçü testleri

$\underline{v}$ düzeltmeleri için (4) eşitliğinden bir $\ell_i$ ölçüsündeki sistematik hatanın temelde düzeltmelerin tümünü etkiliyebileceği görülmektedir. Bir ölçüdeki sistematik hatayı belirleyebilmek için onun tüm dengeleme sonuçlarına, özellikle düzeltmelerin kareleri toplamı $\underline{v}^T \underline{P}\, \underline{v}$ ye olan etkisini araştırmak gerekir.

(2) modelinden $\ell_i$ ölçüsüne ilişkin düzeltme denklemi çıkarılarak oluşturulan yeni modelde düzeltmeler vektörü $\underline{v}_1$, $\ell_i$ dışında kalan ölçülere ilişkin ağırlık matrisi $\underline{P}_{11}$ ile gösterilirse, ölçüler arasında korelasyon olmadığı durumda $\Omega_1 = \underline{v}_1^T \underline{P}_{11} \underline{v}_1$ ile (6) eşitliğinden

$$\Theta_i^2 = \Omega - \Omega_1 = v_i^2 \;/\; q_{v_i v_i} \tag{14}$$

elde edilir (J.Trüger, 1980 ; B. Heck, 1980). $v_i$ düzeltmesinin $q_{v_i v_i}$ ağırlık katsayısı, (4) de verilen $\underline{Q}_{vv}$ matrisinin i.köşegen elemanıdır. İkinci modelden birim ağırlıklı ölçünün varyansı için

$$\hat{\sigma}_1^2 = \Omega_1 \;/\; f_1 \;,\quad f_1 = n - u - 1 \tag{15}$$

bulunur. (13) eşitliği sıra ile dengelemeden önce öngörülen varyans faktörü $\sigma^2$, bunun tahmin değerleri olarak tüm ölçülerin dengelenmesi sonucu bulunan $\hat{\sigma}^2$ ve $\ell_i$ ölçüsü dışında kalan ölçülerin dengelenmesi ile elde edilen $\hat{\sigma}_\imath^2$ değerlerine bölünürse, $\ell_i$ ölçüsünün uyuşumsuz olup olmadığı konusunda bir yargıya varabilmek için ;

Baarda'ya göre (data-snooping) $$T_{i,B} = v_i \;/\; \sigma \sqrt{\sigma_{v_i v_i}} \sim N(0,1) \qquad (16)$$

Pope'ye göre (τ-ölçütü) $$T_{i,P} = v_i \;/\; \hat{\sigma} \sqrt{q_{v_i v_i}} \sim \tau_f \qquad (17)$$

t - testi $$T_{i,t} = v_i \;/\; \hat{\sigma}_\imath \sqrt{q_{v_i v_i}} \sim t_{f-\imath} \qquad (18)$$

test büyüklükleri elde edilir. N (0,1) standart normal dağılım, $\tau_f$ serbestlik derecesi f olan τ - dağılımı, $t_{f-\imath}$ serbestlik derecesi f - ı olan t - dağılımı anlamındadır.

Yukarıda verilen test büyüklükleri, $v_i$ düzeltmesinin ağırlık katsayısı sıfırdan garklı olmak koşulu ile tüm ölçüler için yazılabilir. Genel olarak ölçü sayısı kadar hipotez test edilir. Tüm $T_i$ (i = 1 , 2, ... , n) lerin aynı zamanda çıkması olasılığı bunların olasılıkları çarpımına eşittir. Test büyüklükleri arasındaki korelasyonlar hesaba katılmazsa toplam olasılık $\alpha \simeq 1 - (1 - \alpha_o)^n$ dir. $\alpha_o$, bir tek ölçünün testi için yanılma olasılığını (1.tür hata) göstermektedir. Toplam olasılık α verilirse (örneğin α = 0.05) yaklaşık olarak $\alpha_o \simeq 1 - (1 - \alpha)^{1/n} \simeq \alpha/n$ elde edilir. Ölçü sayısı büyük olduğunda öngörülen α değerine göre belirlenen $\alpha_o$ çok küçük çıkabilir. Bu durumda test duyarlı olmaz. Baarda'ya göre uyuşumsuz ölçü testinde olduğu gibi, bir boyutlu test geçerli $\alpha_o$ yanılma olasılığını sabit, örneğin $\alpha_o$=0.001 almak ve gerekirse toplam olasılık α yı buna göre hesaplamak uygun olur (B. Heck, 1981b).

Baarda'ya göre uyuşumsuz ölçü testinde önce global test yapılır. (13) bağıntısına göre, matematiksel modelin gerçeği yansıttığı biçimindeki sıfır hipotezi reddedilir ve model hatası olduğuna karar verilirse, bu hatanın bir ölçüdeki kaba hatadan ileri geldiği kabul edilir ve tek boyutlu uyuşumsuz testi ile ölçülerden her biri kontrol edilir. Test büyüklüklerinin en büyüğü, $T_{max,B}$ = max ($T_{i,B}$, i = 1,2, ... ,n) standart normal dağılım tablosundan alınan $k_{1-\alpha_o/2}$ güven sınırını aşıyorsa;

$$T_{max,B} > k_{1-\alpha_o/2} = \sqrt{F_{1,\infty,1-\alpha_o}} \qquad (19)$$

ilgili ölçünün uyuşumsuz olduğuna karar verilir. Gerekli kontrollar yapılır. Duruma göre ölçüler arasından çıkarılır. Dengeleme yenilenir. Daha da uyuşumsuz ölçü olup olmadığını saptamak amacıyla yukarıdaki iki aşamalı test yinelenir.

Pope'ye göre $\tau$ - ölçütünde

$$T_{max,P} > \tau_{f,1-\alpha_o/2} \qquad (20)$$

ise test büyüklüğü en büyük olan ölçünün uyuşumsuz olduğuna kararverilir.

Baarda'ya göre test yönteminde olduğu gibi art arda dengelemeler ile uyuşumsuz ölçülerin araştırılması sürdürülür. $\tau$ - dağılımı ile $\tau$ - ve F - dağılımları arasında

$$\tau_{f,1-\alpha_o/2} = \sqrt{f\, t^2_{f-1,1-\alpha_o/2} \; / \; (f - 1 + t^2_{f-1,1-\alpha_o/2})}$$

$$t^2_{f-1,1-\alpha_o/2} = F_{1,f-1,1-\alpha_o} \qquad (21)$$

ilişkileri olduğundan $\tau$ - dağılımına ilişkin güven sınırları $\tau$ - ve F - dağılımlarının sınır değerleri ile hesaplanabilir.

$\tau$ - testine göre uyuşumsuz ölçü testinde $T_{i,t}$ test büyüklüklerinden $T_{max,t}$ için

$$T_{max,t} > t_{f-1,1-\alpha_o/2} \qquad (22)$$

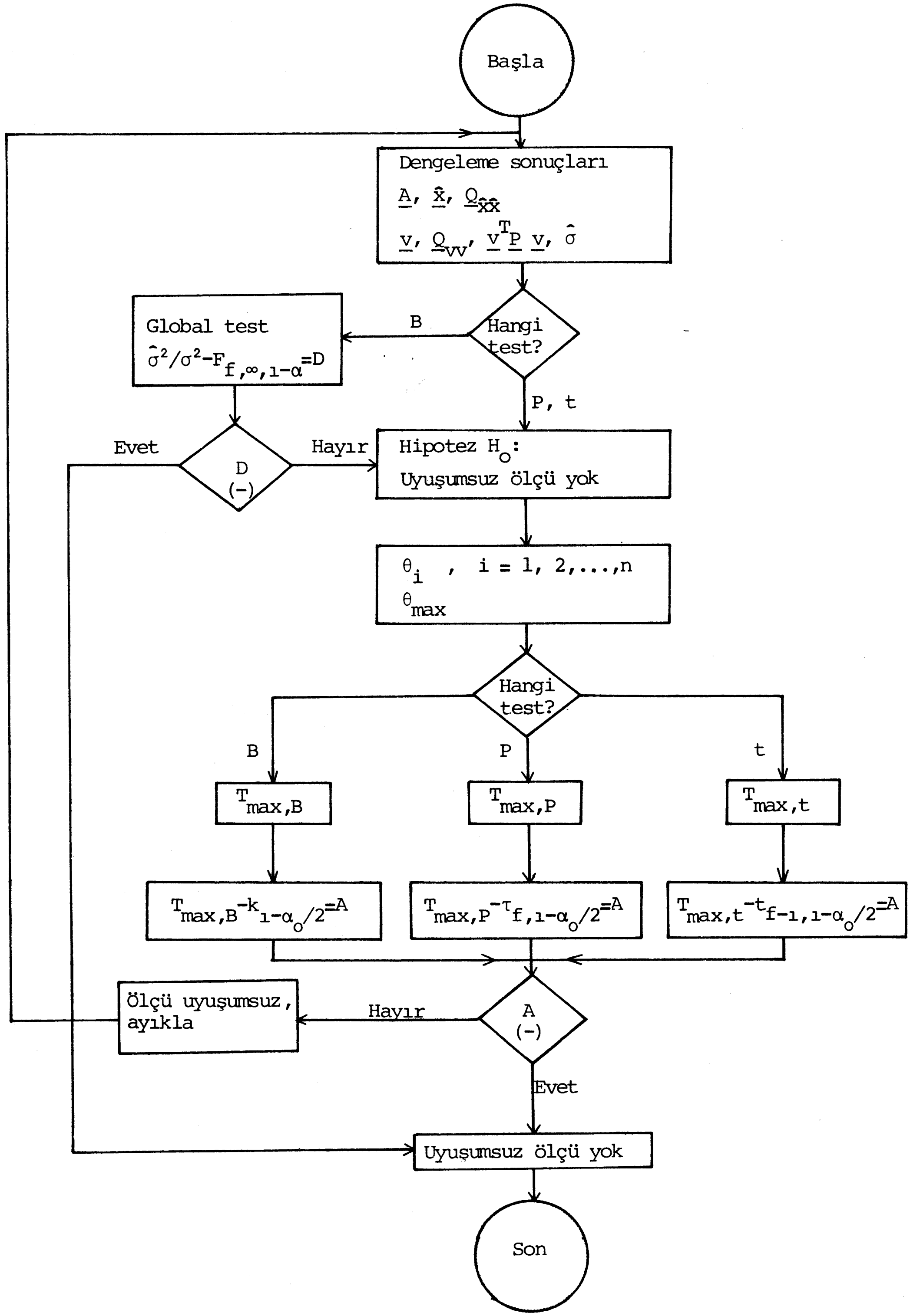
ise ilgili ölçü uyuşumsuz olarak değerlendirilir ve duruma göre ölçüler arasından çıkarılır. Yinelemeli dengeleme ve test işlemleri ile uyuşumsuz ölçü araştırması, tüm $T_{i,t}$ test büyüklükleri t - dağılım çizelgesinden alınan $t_{f-1,1-\alpha_o/2}$ sınır değerinden küçük kalıncaya dek sürdürülür.

Yukarıda tanımlanan üç uyuşumsuz ölçü testinden ikisi, t - testi ve $\tau$ - ölçütü aynı bir $\alpha_o$ olasılığı için özdeş sonuçlar verir. Serbestlik derecesi büyük olduğunda t - ve $\tau$ - dağılımları normal dağılıma dönüştüğünden aynı bir $\alpha_o$ olasılığı için söz konusu üç test de ($\sigma$ ve $\sigma$ yaklaşık eşitse) özdeş yargılara götürür (B.Heck, 1981b).

Uyuşumsuz ölçü testlerine ilişkin işlemler, aşağıda verilen akış diyagramında özetlenmiştir.

## 4.3 İç güvenirlik

Bir jeodezik ağın iç güvenirliği ölçülerin hatalar karşısında kontrol




Uyuşumsuz ölçü testi akış diyagramı

edilebilirliği anlamına gelmekte ve model hataları için belli bir test gücü ile signifikant olarak kanıtlanabilecek en küçük sınır değerleri ile tanımlanmaktadır. $\underline{v}$ düzeltmeleri için (4) eşitliğinden gidilerek bir $\ell_i$ ölçüsündeki $\nabla\ell_i$ kaba hatasının $\underline{v}$ düzeltmelerine olan etkisi bulunabilir. Ölçüler arasında korelasyon yoksa, başka bir deyişle $\underline{P}$ köşegen matris ise $\nabla\ell_i$ hatasının aynı ölçünün $v_i$ düzeltmesine olan etkisi

$$\nabla v_i = - q_{v_i v_i} P_i \nabla\ell_i = - r_i \nabla\ell_i \tag{23}$$

çıkar. İz $(\underline{Q}_{vv}\underline{P}) = \Sigma r_i = r = n - u$ olduğu düşünülürse $r_i$ nin fazla ölçü sayısı r içinde i. ölçünün payı ya da kısmi fazla ölçü (redundanz) anlamına geldiği görülür (T. Ayan, 1981). $r_i$ büyüklüğü ağın geometrisini tanımlar ve i. ölçüdeki sistematik ya da kaba hataların $v_i$ düzeltmesi içindeki payını verir.

Güvenilir bir ağda $r_i$ ler olabildiğince büyük ve homojen olmalıdır.Ölçülerin kontrol edilebilirliği için $0.1 \leqslant r_i \leqslant 1$ olmalıdır. $0.3 \leqslant r_i \leqslant 1$ ise ölçüler iyi kontrol edilebilir (M.Mürle; R.Bill, 1984).

$\nabla\ell_i$ hatasının Baarda'ya göre uyuşumsuz ölçü test büyüklüğüne etkisi (mutlak değer olarak) (23) eşitliği ile (16) dan

$$\nabla w_i = \nabla v_i \ / \ \sigma \sqrt{q_{v_i v_i}} = \sqrt{r_i}\, \nabla\ell_i \ / \ \sigma_{\ell_i} \tag{24}$$

çıkar. $\sigma_{\ell_i} = \sigma \ / \ \sqrt{P_i}$ , $\ell_i$ ölçüsünün ortalama hatasıdır. Bir $\nabla\ell_i$ hatasının büyüklüğü bilinmediğinden öngörülen istatistik güven $S = 1 - \alpha_o$ için (16) test büyüklüğü ile hangi büyüklükte bir hatanın $\gamma_o$ test gücü ile ortaya çıkabileceği sorusuna yanıt aranır. Yanılma olasılığı $\alpha_o$ ve test gücü $\gamma_o$ a bağlı olarak seçenek hipotezinin konumu, başka bir deyişle merkez dışı parametre $\delta_o = \nabla_o w_i$ belirlenir. Örneğin, $\alpha_o = 0.001$, $\gamma_o = 0.80$ için $\delta_o = 4.13$ tü-. $\gamma_o$ test gücü ile signifikant olarak kanıtlanabilen bir hata için $\nabla_o\ell_i$ alt sınır değeri (24) den

$$\nabla_o\ell_i = \sigma_{\ell_i}\, \delta_o \ / \ \sqrt{r_{ii}} \tag{25}$$

bulunur. İyi bir jeodezik ağda olabildiğince küçük hataların ortaya çıkarılabilmesi ve $\nabla_o\ell_i$ lerin olabildiğince birbirine yakın büyüklükler olması istenir. Özet olarak, $\nabla_o\ell_i$ hata sınır değerleri ölçülerin ortalama hatalarına, $r_i$ kısmi fazla ölçüleri ile tanımlanan ağ geometrisine, $1 - \alpha_o$ istatistik güveni ile $\gamma_o$ test gücüne göre belirlenen $\delta_o$ parametresine bağlanır.

## 4.4 Dış güvenirlik

Ağın dış güvenirliği, ortaya çıkarılamayan ölçü hatalarının dengeleme sonuçlarına olan etkileri ile açıklanır. Bir $\ell_i$ ölçüsüne ilişkin $\nabla_o \ell_i$ sınır hatasının $\hat{\underline{x}}$ bilinmeyenler vektörüne $\nabla_o \underline{x}_i$ etkisini bulabilmek için (3) eşitliğinde $\underline{\ell}$ yerine $|0,\ldots,0,\nabla_o \ell_i,0,\ldots,0|^T$ yazmalıdır. Ölçüler arasında korelasyon olmadığı varsayılır ve $\nabla_o \ell_i$ nin (25) deki eşiti göz önünde bulundurulursa

$$\nabla_o \underline{x}_i = \underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\, \underline{a}_i \frac{\sigma}{\sqrt{q_{v_i v_i}}}\, \delta_o \qquad (26)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı $\underline{a}_i^T$ ile çarpılarak, bilinmeyenlerin i. dengelenmiş ölçüye etkisi $\nabla_o \hat{\ell}_i$ için,

$$\bar{\delta}_{o,i} = \sqrt{\underline{a}_i^T\, \underline{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\, \underline{a}_i \,/\, q_{v_i v_i}}\; \delta_o \qquad (27)$$

ile

$$|\nabla_o \hat{\ell}_i| = \bar{\delta}_{o,i}\, \sigma_{\hat{\ell}_i} \qquad (28)$$

bulunur. Ortaya çıkarılamayan bir hatanın bilinmeyenlerin herhangi bir f fonksiyonuna etkisi $\nabla_o f_i$ için

$$|\nabla_o f_i| \leqslant \bar{\delta}_{o,i}\, \sigma_f \qquad (29)$$

eşitsizliği geçirlidir (W.Förstner, 1979).

$\bar{\delta}_{o,i}$ etki faktörü, datumdan bağımsız bir dış güvenirlik ölçütüdür ve bilinmeyenlerin bir fonksiyonunun i. ölçüye ilişkin $\nabla_o \ell_i$ sınır hatasından ne ölçüde etkilenebileceğini gösterir. Bu etkilenme fonksiyonun ortalama hatasının 3-4 katını aşmamalıdır. İyi bir ağda $\bar{\delta}_{o,i}$ etki faktörünün olabildiğince küçük olması istenir.

## 5. SONUÇ

Jeodezik ağların dengelenmesinde, yalnızca dengeleme sonuçları ve bunlara ilişkin doğruluk ölçütleri artık yeterli görülmemektedir. Matematiksel modelin doğruluğu istatistik test yöntemleri ile araştırılmalı ve model hataları ortaya çıkarılmalıdır. Hangi büyüklükteki ölçü hatalarının öngörülen test gücüne bağlı olarak tanınabileceği (iç güvenirlik) ve tanınamayan hataların dengeleme sonuçlarını ne ölçüde etkileyebilecekleri (dış güvenirlik) belirlenmelidir. İyi bir iç güvenirlik bütün ölçülerin dengeleme ile aynı ölçüde iyi kontrol edilebilmesi, iyi bir dış güvenirlik ise ortaya çıkarılamayan hataların dengeleme sonuçlarına etkilerinin küçük olması ile sağlanır.

## K A Y N A K L A R


/1/ AKSOY, A. (1984) : Uyuşumsuz ölçüler testi. Harita Dergisi,Sayı 93, S. 1-27

/2/ AYAN, T. (1981) : Jeodezik ağların optimizasyonu, Doçentlik Tezi, İ.T.Ü. İstanbul

/3/ DEMİREL, H. (1984) : Jeodezik ağlarda duyarlık ve güven ölçütleri. Y.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü Yaz Okulu, İstanbul

/4/ EHLERT, D. (1984) : Die Diagnoseausgleichung 1980 des Deutschen Hauptdreiecksnetzes. DGK, Reihe B, Heft Nr. 267, Teil I, München

/5/ FÖRSTNER, W. (1979) : Das Program TRINA zur Ausgleichung und Gütebeurteilung geodatischer Lagenetze. ZfV, Heft 2, S. 61-72

/6/ HECK, B. (1981a) : Der Einfluss eizelner Beobachtungen auf das Ergebnis einer Ausgleichung und die Suche nach Ausreissern in den Beobüchtungen. AVN, Heft 1, S. 17-34

/7/ HECK, B. (1981b) : Statistische Ausreisserkriterien zur Kontrolle geodatischer Beobacntungen. In: Ingenieurvermessung 80, Band 1, S.B 10, Ferdunand Dümmlers Verlag, Bonn

/8/ HEİN, G. (1982) : A Contrubution to 3D-Operational Geodesy. DGK, Reihe B, Heft Nr. 258/VII, München

/9/ HÖPCKE, W. (1980) : Fehlerlehre und Ausgleichungrechnung. Walter de Gruyter, Berlin, New York

/10/ KOCK, K.R. (1980) : Parameterschatzung und Hyothesentests in linearen Modellen. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn

/11/ KRÜGER, J. (1980) : Elimination grober Becbachtungsfehler in geodatischen Netzen. In: Geodatische Netze in Landes-und Ingenieurvermessung, S.499-509, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart

/12/ MÜRLE, M.-BILL, R. (1984) : Zuverlassigkeits-und Genauigkeitsuntersuchung ebener geodatischer Netze. AVN, Heft 2, S. 45-62

/13/ NIEMEIER, W. (1980) : Funktionales und stochastisches Modell für Lage-Höhen-und Schwerenetze. In: Geodatische Netze in Landes-und Ingenieurvermussung, S. 181-212, Verlag Konrad Wittwer, Stutttgart

/14/ NIEMEIER, W. (1984) : Zur Fehlertheorie von Nivellementsnetzen. VR, Heft 2, S.78-96

/15/ PELZER, H. (1981) : Überprüfung von Ausgleichungsmodellen durch Hypothesentest. In: Ingenieurvermessung 80, Band 1, S.B 8, Ferdunand Dümmlers Verlag, Bonn

/16/ TORGE, W. (1975) : Geodesie. Walter de Gruyter, Berlin, New York

/17/ WELSCH, W. (1980) : Aposteriori Varianzenschatzung im erweiterten Ausgleichungsmodell nach der Metnode der kleinsten Quadrate. In: Geodatische Netze in Landes-und Ingenieurvermussung, S.213-226, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart

/18/ WOLF, H. (1963) : Die Grundgleichungen der dreidimensionalen Geodesie in elementarer Darstellng. ZfV, Heft 6, S. 225-233

/19/ WOLF, H. (1975) : Ausgleichungrsechnung, Formeln zur pratischen Anwendung. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn

/20/ WOLF, H. (1983) : Erdmessung und Landesvermessung in ihren heutigen Wechselbeziehungen. ZfV, Heft 1, S.1-7