NİRENGİ AĞLARINDA A POSTERİORİ HATA YAYILMASI

Yazan: Dr.M. Tamer ÜNAL
İ.D.M.M.A.

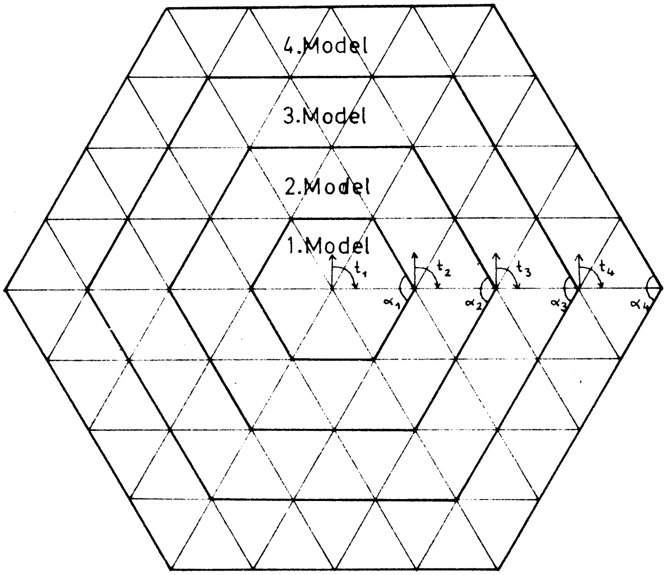
1. GİRİŞ

Ne amaçla tesis edilirse edilsin bir nirengi ağında a posteriori ortalama hatanın (dengelemeden sonra) homojen olması istenir. Böylece ağın her bölgesi için aynı kalan bir hassasiyet elde edilmiş olur. Fakat ölçülerin aynı incelikte olmaları halinde bile, a posteriori ortalama hatalar homojen değildir. Ağın geometrisine bağlı olarak değişen, çeşitli dengeleme yöntemleri neticesinde hesaplanan a posteriori ortalama hataların uygun şekildeki karşılaştırılmalarında ağ içindeki dağılımların gelişi güzel olmadıkları görülür. Bu dağılımın belirlenmesi içinde çeşitli modeller alınıp dengelenerek bulunan sonuçların analizi [1] de yapılmıştır.

2. GEOMETRİK MODEL ve DENGELEME YÖNTEMİ

Bilindiği gibi en stabil ağ eşkenar üçgenlerden oluştuğundan, altı eşkenar üçgeni içeren altıgen ana model olarak alındı. Böylece 1. modeli oluşturan altıgene bir halka ilavesi ile 2. model, bir ikinci halkanın ilavesi ile de 3. model ve devamla 4. modeller oluşturuldu (şekil 1). Çekirdeği kenarları eşit bir altıgen olan farklı büyüklükteki bu dört ayrı modelde kenar uzunluklarının ve istikametlerin ölçüldüğü kabul edilmekle birlikte hata araştırmasında sadece varianz - kovarianz matrisi yeterli olduğundan işlemlerde ölçülerin sayı değerlerine gerek yoktur. Programlama kolaylığı nedeni ile endirekt ölçüler dengelemesi yeğ tutulmuştur. Ölçülerin korelasyonsuz ve aynı ağırlıkta oldukları varsayılarak, karışık ağlarda hata denklemlerini homojenleştirirken a priori kenar hatası olarak ∓ 3 cm, istikamet hatası olarakta ∓ 5" alınmıştır.

Sadece istikametlerin veya açıların ölçüldüğü trigonometrik ağlarda, ağın yönü, ölçeği ve konumu hakkında bilgi vermeyen bu ölçülerle noktaların kesin koordinatlarının bulunmasına olanak yoktur. Bunun için konum belirlemek üzere x,y eksenleri doğrultusundaki iki öteleme, yön ve ölçek belirlemek içinde birer tane olmak üzere toplam dört ek parametreye gerek vardır. Bunlar ağın dış parametreleridir(äussere Parameter). Sadece kenarların ölçüldüğü kenar ağlarında veya hem kenar ve hem de açıların ölçüldüğü karışık ağlarda ise ölçek ölçülerle belirlendiğinden dış parametre sayısı üç olur. Pratikte genellikle ağda dış parametre sayısına eşit sayıda büyüklük hatasız olarak verilmiş kabul edilerek klasik dengeleme yöntemlerine göre işlem yapılır. Bağlı nirengi ağı olarak tanımlanan dış parametre sayısına eşit büyüklüğün hatasız olarak alındığı ağlara ait varianz - kovarianz matrisleri hatasız alınan büyüklüklerin yerine karşı invaryant değildir. Dolayısıyla bu şekilde elde edilen varianz - kovarianz matrisleri (äussere Fehlermatrix) noktalar arasındaki iç hassasiyeti ve hata dağılımı araştırmasında bir ölçüt olamazlar. Bunun için ağların serbest ağ (freies Netz) olarak dengelenmeleri gerekir.



Şekil : 1

Hiçbir sabit büyüklüğü içermeyen serbest ağlarda

$$v^T Pv = min.$$

koşuluna göre kurulan denklem matrisi singüler olup, bozukluk derecesi (rangabfall=Defekt) ağın dış parametre sayısına veya ağın serbestlik derecesine (freiheitsgrade) eşittir. Determinantı sıfır olan singüler normal denklem matrisinin tersinin bulunuşuna ait birçok yöntem vardır [2] , [3] , [4], [5] .

Endirekt ölçüler dengelemesinde

$$v = Ax - l \qquad (1)$$

lineerleştirilmiş hata denklemlerinden

$$v^T Pv = min. \qquad (2)$$

koşuluna göre kurulan

$$A^T PAx = A^T Pl \qquad (3)$$

singüler normal denklem sisteminin

$$x^T x = \min. \tag{4}$$

koşuluna göre bulunacak çözümü

$$x = N(NN)^{-1} A^T Pl \quad , \quad N = A^T PA \tag{5}$$

tek ve belirlidir. P. Messl'a göre iç hata matrisi (innere Fehlermatrıx), H. Wolf'a göre Helmert-Invers olarak hesaplanabilen ağırlık katsayıları matrisi (5) den hata yayılma kanununa göre

$$Q_{xx} = N(NN)^{-1} N(NN)^{-1} N \tag{6}$$

olur. Stokastik dairesel ters olarak isimlendirilen Q_{xx} matrisinin izi minimum olduğundan noktalar arasındaki gerçek hassasiyetin belirlenmesinde ve hata a - raştırmasında bir ölçüttür.

3. HATA ARAŞTIRMASINA KONU OLAN BÜYÜKLÜKLER

3.1. DEĞİŞMEYEN BÜYÜKLÜKLER

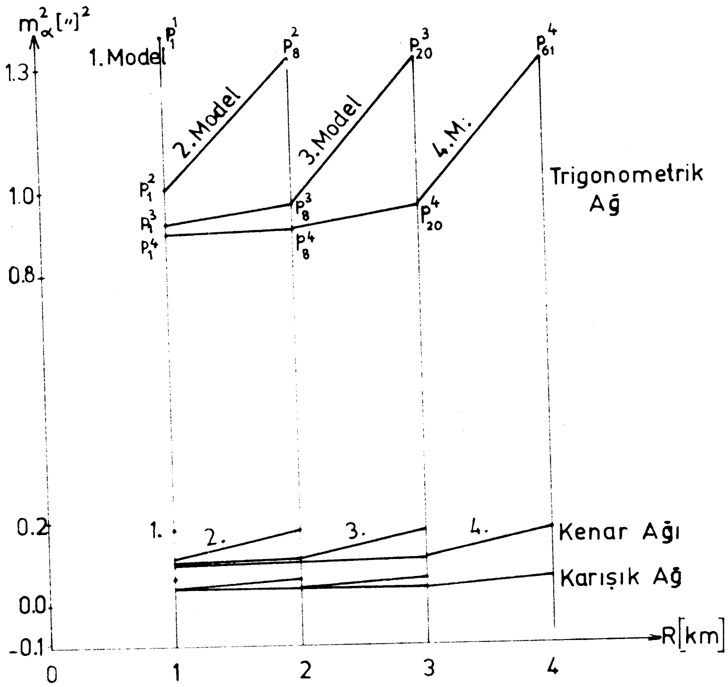
Bir lineer transformasyon neticesinde değerleri değişmeyen büyüklüklere ağın değişmeyen büyüklükleri denir. Bu büyüklüklerin a posteriori ortalama hataları ağın serbest veya bağlı dengelemelerinden bulunacak varianz - kovarianz matrislerine karşı invaryanttır.

Trigonometrik ağlarda açılar, kenar oranları, alan oranları değişmeyen büyüklükleri oluştururken, kenar ve karışık ağlarda bunlara ek olarak alan ve a posteriori ortalama hataları aynı görünümde olduklarından, burada sadece açılara ait bir örnek verilmiştir (şekil 2).

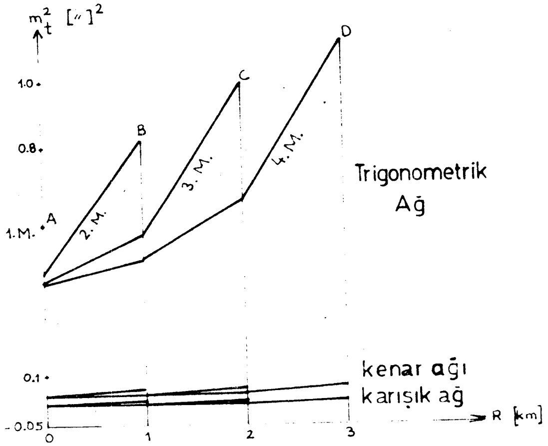
3.2. DEĞİŞEN BÜYÜKLÜKLER

Değişmeyen büyüklüklerin aksine lineer transformasyon neticesinde değeri değişen büyüklüklere denir. Serbest ağ olarak dengeleme neticesinde bu değişen büyüklüklerin a posteriori ortalama hataları belirli ve bir tek olur. Bağlı ağ olarak dengelenmeleri halinde ise her defasında farklı değerler elde edilir.

Kenar ve karışık ağlarda semtler, koordinatlar ve dolayısıyle nokta konum hataları, hata elipsleri, relatif hata elipsleri değişen büyüklükleri oluştururken, trigonometrik ağlarda bunlara ek olarak kenarlar ve alanlarda değişen büyüklüklerdir. Burada da değişen büyüklüklerden sadece semtlere ait bir örnek verilmiştir (şekil 3).



Şekil : 2. İşaretli açıların (şekil 1) a posteriori ortalama hatalarının karelerinin çeşitli modellerdeki değerleri ([1] den alınmıştır).



Şekil : 3. İşaretli semtlerin (şekil 1) a posteriori ortalama hatalarının karalerinin çeşitli modellerdeki değerleri ([1] den alınmıştır).

4. SONUÇ

Yukarıda belirtilen dört farklı büyüklükteki modelin trigonometrik ağ, kenar ağı ve karışık ağ olarak serbest ağ şeklinde dengelenmelerinden sonra hesaplanan değişen ve değişmeyen büyüklüklerin a posteriori ortalama hatalarının değerlendirilmeleri ile aşağıdaki sonuçlara varılmıştır.

a. Değişen ve değişmeyen büyüklüklerin a posteriori ortalama hataları, her modelde ağın ortasından itibaren kenarlara doğru büyümektedir

(şekil 2 : $P_1^4 - P_8^4 - P_{20}^4 - P_{61}^4$).

b. Bu büyüme ortadan kenarlara doğru daima artan bir şekilde olur ve bu artışa en çok uyan eğri dengeleyici paraboldür $(P_1^4 - P_8^4 , P_8^4 - P_{20}^4 , P_{20}^4 - P_{61}^4)$.

c. Ağ büyüdükçe belirli bir büyüklüğün a posteriori ortalama hatası sürekli küçülerek belli bir değere yaklaşır ve bu küçülme devamlı azalan bir şekilde olur ($P_1^1 - P_1^2$, $P_1^2 - P_1^3$, $P_1^3 - P_1^4$).

d. Her modelin son halkasındaki a posteriori ortalama hata artışı aynı kalır ($P_{20}^4 - P_{61}^4$, $P_8^3 - P_{20}^3$, $P_1^2 - P_8^2$) ve modellerin ortalarına doğru bu artışlar küçülerek sıfıra yaşlaşırlar. Buradan da daha büyük ağlarda son halkadaki artışın aynen elde edileceği ve m^2 a posteriori ortalama hata fonksiyonunun ağın ortalarında sabit kalacağı neticesine varılır.

e. Ağ kenarlarındaki (son halka) hata artışları trigonometrik ağlarda hissedilir derecede ortaya çıkarken, kenar ve karışık ağlarda bu artışlar daha az olur.

f. Her modelde son halkada bulunan değişmeyen büyüklüklerin a posteriori ortalama hataları model büyüklüğü ile ters orantılı olarak parabolik azalırken (şekil 2: $P_1^1 - P_8^2 - P_{20}^3 - P_{61}^4$), değişen büyüklüklerin a posteriori ortalama hataları model büyüklüğü ile doğru orantılı olarak logaritmik bir artış gösterir (şekil 2: A-B-C-D).

g. Pratik açıdan bakıldığında varılan sonuç ise homojen bir hassasiyet elde edilmek istendiğinde, nirengi ağının haritası yapılacak sahayı taşacak bir şekilde tesis edilmesi gerektiğidir.

LİTERATÜR

1 M.T. Ünal : Randeffekte in geodätischen Netzen und ihre Gesetzmässigkeiten. Diss. Bonn 1977

2 A.Bjerhammer : A generalized matrix algebra. Stockholm 1958

3 P.Meissl : Zusammenfassung und Ausbau der inneren Fehlertheori eines Punkthaufens. DGK Reihe A, Heft 61 München 1969, S. 8-21

4 E.Mittermayer : Eine Verallgemeinerung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung freier Netze. ZfV 1971 S. 401-409

5 H.Wolf : Die Helmert - Inverse bei freien geodätischen Netzen. ZfV 1973, S. 396.