

Mesaha işlerinin esasını teşkil eden üçgenin muhtelif maksatlara en uygun şekli

Yazan :
Yüks. Müh.
Ziyaettin Soydan

Gerek her ölçüdeki harta alımı işlerinin ve gerekse tapu kadastro ve madencilikte rastlanan çeşitli mesaha işlerinin esasını üçgen ölçülmesi teşkil eder. Şu halde hangi iş olursa olsun üçgen şekillerini lâielettâyin seçmek veya aynı çeşit üçgeni her işte tatbik etmek olurmu? Sıhhat ve maliyet işi hesaba katılmazsa şüphesizki olur. Ancak sinus ve Tg. gibi tirigonometrik fonksiyonların muhtelif büyüklükteki açılarda muhtelif değişme göstermesi ve bir saniyelik bir açıya tekabül eden logaritma artış miktarının muhtelif açılarda çok farklı olması hakikatı karşısında bu ciheti göz önünde tutmak ve mümkün olan yerlerde üçgenlerin hesaba girecek açılarını buna göre ayarlamak sıhhat aranan işlerde bilhassa lüzumludur.

Mesaha işlerinde kullanılan üçgenler muhtelif maksatlara hizmet ederler. Meselâ nirengi işlerindeki üçgenlerin vazifesi doğru ve hatasız bir şekilde (uzunluk) nakli olduğu halde maden kuyusu, tonel hafriyatı gibi yerlerde kullanılan mesaha üçgenlerinin asıl vazifesi (cihet) naklidir.

Meçhulü yani hesaplanacak olan faktörü bir açı olan bir üçgenin en uygun şekli diye o üçgenin diğer açı ve kenar ölçülerinde yapılan ölçü hatalarının hesaplanacak olan açıya en az müessir olan şeklidir. Keza, bir kenar uzunluğunun bulunması veyahut bir alan hesabı maksadiyle kullanılan bir üçgenin en uygun şekli, ölçülen kenar ve açılardaki hataların aradığımız neticeye en az müessir olacak şeklidir. En ekonomik üçgen şekli ise arzu edilen doğruluktaki neticenin en az emek ve dolayısıyla en az masrafla kabil olan şeklidir.

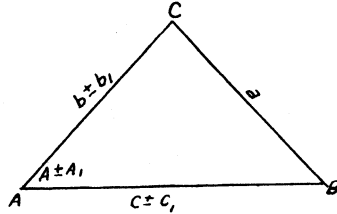
Şimdi tatbikî bir kaç misâl alalım ve her misâl için olan en uygun üçgen şeklini bu misâller üzerinde göstermeğe çalışalım :

1 — Alan hesabında en uygun üçgen şekli :

Bunun için şekilde görülen üçgeni alalım ve bunun b ve c kenarlarıyla arasındaki A açısının ölçülmüş bulunduğunu kabul edelim. Ölçülen bu elementlerin muhtemel hatalarında b_1 , c_1 , A_1 ile gösterirsek üçgen alanı,

$$X = 1/2 b. c. \sin A \quad (1)$$

olur. Ölçü hatalarından dolayı alan hata miktarını da X_1 ile gösterirsek bu hata, hataların tesiri kanununa göre :



$$\Delta X_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{dx}{db}\right)^2 b_1^2 + \left(\frac{dx}{dc}\right)^2 c_1^2 + \left(\frac{dx}{dA}\right)^2 A_1^2}$$

$$(2) \quad = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} c b_1 \sin A\right)^2 + \left(\frac{1}{2} b c_1 \sin A\right)^2 + \left(\frac{1}{2} b c A_1 \cos A\right)^2}$$

bulunur. (2) formülünün (1) formülüne bölünmesiyle izafi hata olarak :

$$\frac{\Delta X_1}{X} = \pm \sqrt{\left(\frac{b_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 + A_1^2 \cot^2 A} \quad (3)$$

elde edilir. Bu formülde görüleceği üzere $\frac{\Delta X_1}{X}$ izafi hatasının asgari olması açı noktai nazarından A'nın dik açı yani 90 derece olmasıyla mümkündür.

Uzunluk ölçülerindeki hataya gelince burada hata bildiğimiz gibi mesafenin kökleriyle artar. Yani :

$$\frac{b_1}{V_b} = \frac{c_1}{V_c} = K$$

$$b_1 = V_b \cdot K \quad c_1 = V_c \cdot K$$

dır. Buradaki K sabit bir katsayıdır. Şimdi bu değerleri (3) formülünde yerlerine koyarsak :

$$\frac{X_1}{X} = \pm \sqrt{K \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + A_1^2 \cot^2 A \right)} \quad (4)$$

olarak bulunur ki buradan izafi hatanın küçük olabilmesi için kenarların uzun olmasının gerekli olduğu kolayca görülür. Netice olarak :

1 — Alan hesabında kullanılacak üçgenin en doğru netice verebilmesi için ölçülen ara açısının imkân nisbetinde dik bir açı olması, kenarların da kısa olmaması lâzımdır.

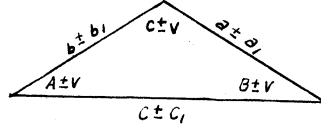
2 — Böyle dik açılı bir üçgen aynı zamanda en ekonomik olan bir şekildir. Çünkü alan için kullanılacak üçgenlerin sayısı bu suretle en az miktarda olur.

2 — Nirengi Üçgeni :

Bir nirengi sistemine ait bir üçgen genel olarak bir kenarı ile üç açısı verilmiş olan üçgendir. Bir nirengi sisteminin bütün üçgen açıları arazide teodolitle ölçülür ve uzunluk hesapları için de yalnız başlangıç üçgeninin tek bir kenarı Baz olarak ölçülür. Bütün üçgenlerin kenar uzunlukları bu suretle hesaplanmak suretiyle bulunduklarından ölçülen açılarının ve

bazın hatası yalnız ilk üçgenin hesaplanacak kenarlarına tesir etmekle kalmaz, aynı zamanda kendinden sonraki üçgenlerede intikal eder.

C kenarı baz olan bir üçgenin en uygun şeklinin tayininde a kenarının sıhhat derecesi b den dolayı müteessir olmamalı ve b nin sıhhat derecesi de a dan dolayı zarar görmemelidir.



Bu şart her iki kenarın yalnız birbirine eşit olmalarıyla mümkün olacağı neticesini verir. Bir nirengi üçgeninin asıl vazifesi uzunluk nakli olduğundan böyle bir üçgende en uygun şeklin bu işi en az hata ile nakil eden üçgen şekli olacağı tabiidir. Her iki kenar yukarıda bildirildiği gibi birbirine eşit olacağından en uygun üçgende,

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \text{minimum}$$

olur. Açı ölçü hataları açıların aynı ölçü, alet ve şahısla ölçülmesi halinde birbirinin aynı olduğundan bu hatayı V ile gösterirsek a (veya b) nin hesaplama formülü :

$$a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C} \quad (5)$$

ve bunun hata miktarı da (2) formülüne göre,

$$a_1 = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} c_1^2 + a^2 V^2 \cot^2 A + a^2 V^2 \cot^2 C}$$

izafi hata da,

$$\frac{a_1}{a} = \pm \sqrt{V^2 (\cot^2 A + \cot^2 C) + \left(\frac{c_1}{c}\right)^2} \quad (6)$$

olur. $a = b$ olduğundan karşılardaki açılar da $A = B$ olup buradan,

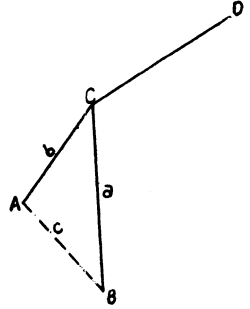
$$C = 200 - 2A \text{ ve son olarak}$$

$$\frac{a_1}{a} = \pm \sqrt{V^2 (\cot^2 A + \cot^2 2A) + \left(\frac{c_1}{c}\right)^2} \quad (7)$$

elde edilir. Buradaki $\frac{c_1}{c}$ değeri sabit olarak kabul edildiğinden (7) formülünün minimum olması ancak $\cot^2 A + \cot^2 2A$ toplamının minimum yapılmasıyla kabildir. Bu toplamın A ya göre diferansiyelini alıp sıfıra eşit yapmak suretiyle A açısı için $56^\circ 15'$ veya 62.50 grat değeri bulunmuş olur. Netice olarak teorik bir şekilde bulunan en uygun nirengi üçgeni iki kenarı birbirine eşit olan ve baz kenarlarındaki açıları 62.50 grat, baz karşısındaki açısı da 75 grat olan bir üçgendir. Bu ciheti hatırd tutarak üçgen açılarının imkân nisbetinde birbirine eşit olmasına çalışılır. Bu üçgen açıları en kötü şartlarda dahi 30 derece veya 33 grattan daha aşağı yapılmaz.

3 — Toprak altı mesaha işlerinde üçgen şekli :

Toprak altı mesaha işlerinde cihet nakli bazı ahvalde yukardan aşağıya şakuli bir şekilde inen dik bir kuyu yardımı ile yapılır. Bunun için kullanılan pratik usul kuyunun yukarisından aşağıya doğru birbirinden aralıklı iki şakuli ip sarkıtmak ve bu iki ipin arasındaki hattı toprak altında başlayacak poligon hattına baz hattı olarak almaktan ibarettir. Bundan sonra bu hattın semti toprak üstünde herhangi bir usulle tayin edilir ve bu semt aynen toprak altı mesahasına esas olarak intikal ettirilir.



Yapılacak mesaha işi geniş mikyasta ise ölçülerin çok dikkatle yapılması gerekli olur. Bu takdirde ölçü hatalarının neticeye olan tesiri ve hangi şartlarda hataların neticeye en az tesir edeceği sorusu önem kazanır.

Şekil üzerinde A ve B noktalarının mevkileri tayin edilmiş ip yerleri olduğunu kabul edelim ve A B hattına ait semtin toprak altı poligonuna intikaline çalışalım. Teodoliti C noktasına koyarak hem A, B noktalarını ve hem de poligonun ilk D istasyonunu görmeye çalışalım. C D hattının semtini AB hattının semtinden hesaplamak suretile bağlantı işi filen tamamlanmış olur. Bunun için C açısını teodolitle ve a, b, c kenarlarını da çelik şeritle dikkatli bir şekilde ölçelim. Bundan sonra :

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin C}{c} \quad \sin A = \frac{a \cdot \sin C}{c} \quad (8)$$

hesaplamasıyla ve BCD açısının da ölçülmesiyle CD hattının semti kolay bir şekilde bulunmuş olur.

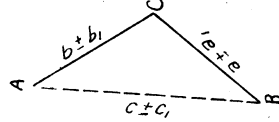
B_1 hatası evvelki misallerde yapıldığı gibi hesaplanarak ve $b_1 = c_1$ kabul edilmek suretiyle :

$$B_1 = \pm \sqrt{\frac{c_1^3 \cdot \sin^3 C (b^2 + c^2)}{c^2 (c^2 - b^2 \sin^2 C)} + \frac{b^3 c_1^3 \cdot \cos^2 C}{c^2 - b^2 \sin^2 C}} \quad (9)$$

açı ve kenarları ihtiva eden hata düsturu elde edilmiş olur. C açısının ne tesir yapacağını anlamak maksadile (9) denkleminin C ye göre türevini alıp sıfıra eşit kılınırsa $C = 0$ bulunurki buda B_1 in en az hatalı olabilmesi için yani üçgenin en uygun olabilmesi için C açısının sıfır olmasının gerekli bulunduğunu anlaşılmış olur. Aynı şekilde (9) formülünde göüleceği üzere B_1 in minimum olması için $\frac{b}{c}$ nisbetinin de imkân nisbetinde küçük olması yani c nin büyük ve b ninde küçük alınması lâzımdır.

4 — Kırık baz ölçülmesi :

Arızalı arazide tesis edilecek tali bir nirengi şebekesinde kâfi uzunlukta baz yeri bulmak bazı ahvalde mümkün olmaz. Bu takdirde yapılan iş şekilde görüldüğü üzere a ve b gibi iki parçadan ibaret kırık bir baz teşkil etmekten ibarettir. Bundan sonra a ve b yi ölçü telleriyle ve C açısını da teodolitle ölçmek suretiyle c baz uzunluğu hesaplanarak bulunur. Burada dikkat edilecek şey A ve B noktalarının seçilmesinde bunların birbirini görebilmelerinin mümkün olmasıdır. Hesaplamak suretile bulunacak c baz hattı ölçülen üç açı A, B, C ve iki kenar a ve b nin yardımlarıyla iki şekilde bulunarak kontrol edilir :



$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C} \quad (10)$$

$$c = b \cdot \cos A + A \cdot \cos B \quad (11)$$

En uygun üçgene gelince buda evvelce bildirildiği gibi c_1/c izafi hatası minimum olan üçgendir. Yani,

$$\frac{c_1}{c} = \pm \sqrt{\frac{a_1^2 (a \cdot b \cdot \cos C)^2 + b_1^2 (b - a \cdot \cos C)^2 + a^2 b^2 c_1^2 \cdot \sin^2 C}{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}}$$

formülü ile bulunan ifadenin minimum olması lâzımdır. Bunu minimum kılan değeri bulmak için ifadenin C ye göre türevini alıp sıfıra eşit kılınmak suretiyle $C = 180$ derece olmasının gerekli olduğu hesaplanır. Aynı işi (11) formülü için de yapar ve a, b kenarlarının da birbirine eşit olduğu kabul edilirse $A = B$, $A_1 = B_1$, $a = b$, $a_1 = b_1$ alınarak,

$$\frac{c_1}{c} = \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{2a^2} + \frac{A_1^2 \cdot \tan^2 A}{2}}$$

hesaplanırken bu ifadenin minimum kılınması için $A = 0$ olmasının gerekli olduğu görülür. Bu suretle en uygun üçgende iki kenar birbirine eşit ve C açısı da mümkün olduğu kadar 180 dereceye yakın olmalıdır. Bu neticeye göre hülâsa olarak, doğru bir bazın daima kırık bir bazdan daha uygun olduğunu söyleyebiliriz.

5 — Bir açının hesaplanması için üç kenarı ölçülen bir üçgen :

Böyle bir açının hesaplanması üç kenarı verilen bir üçgende ;

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$$

formülüyle yapılır. Burada $S = \frac{1}{2} (a + b + c)$ dir. Yukardaki formül

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

formülünden çıkarılmış olduğundan hata miktarının hesaplanmasında da daha uygun olması dolayısıyla bu son formül kullanılacaktır. A_1 hata miktarı bu formülden evvelki misallerde yapıldığı gibi bulunup en uygun bir üçgende her iki kenarın da birbirine eşit olması gerektiğinden $a = b$ alınırsa A_1 hata miktarı için,

$$A_1 = \pm \frac{a}{b} \sqrt{\frac{4b^2 + 2a^2}{4b^2 - a^2}}$$

bulunurki bunun minimum olması $\frac{a}{b}$ nin minimum yani a nın sıfır olmasına bağlıdır. Şu halde teorik olarak en uygun bir üçgende hesaplanacak açının sıfır ve bu açığa ait iki kenarın da birbirine eşit olması lâzımdır. Şimdi bu neticenin tatbikatta ne dereceye kadar mümkün olduğunu görmeğe çalışalım. Bunun kullanıldığı yer maden kuyularına ait mesaha işleridir. Şekildeki AP hattının semtini AQ hattından bulabilmek için usul olarak üçgenin a, b, c kenarları ölçülür ve bunların yardımıyla de A açısı hesaplanarak bulunur. Bu suretle bulunan A açısı teoriye göre çok küçük olması icap edersede bu şekilde ilerlemenin fazla miktarda hatta ihtiyaç göstereceğinden ekonomik olmaz. Bunun için tatbik edilen pratik usul açılardan takribi olarak 100 grata alınması şeklindedirki buda her iki şartı tatmin edecek en uygun bir şekildir.

