

Logaritmlar ve sıhhat dereceleri

Yazan :
Yüks. Müh.
Sami Aykaç

$$\log (1-x) = -\mu \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

bu formülde $|x| < 1$ olduğuna göre sayıların logaritmaları hesaplanır.

$\mu = 0.43429448$ dir. Merfu yazılmadığından (0.9) un logaritması aynı zamanda 9, 90; 900 gibi adetlerin logaritmaları olacağı aşikârdır. Şu halde bu formülle bütün adetlerin logaritmalarını hesaplayabiliriz. Formülün sağ tarafı bir silsile olduğundan ilk bakışta kaçınıcı hadde kadar hesaplarımızı yürüteceğimizi düşünür, ve cevap olarak neticeye tesir etmiyen hadlerin hesaplanmasını lüzumsuz buluruz. Buda hesaplarımızı hangi haneye kadar hatasız olmasını istememize bağlıdır. Bu arzu muhtelif haneli logaritmaları meydana getirmiştir. Biz yalnız altı haneli logaritmayı tetkik edelim.

Her adedin logaritmasını sekiz hane olarak hesaplayalım sondaki iki rakımın (50) den büyük veya küçük olduğuna göre altıncı haneye irca edelim. Bu suretle elde ettiğimiz logaritmanın hatası altıncı hanede (0.5) i geçmez bu hatadan kaçınmak mümkün olmadığına göre her logaritmanın son hanesinin hatasını 0.5 olarak kabul edeceğiz.

Yukarıdaki formülde (x) birden büyük alındığı takdirde silsilenin sonsuza doğru gideceği malûmdur. Konvergent bir silsile elde edebilmek için (x) in mutlak kıymetinin birden küçük olması lâzım ve şarttır. Bu itibarla biz bütün sayıları (0) ile (1) arasına sıralayalım.

Log (0.9) için $x = 0.1$ dir.

$$x = 0.100\ 000\ 00$$

$$\frac{x^2}{2} = 0.005\ 000\ 00$$

$$\frac{x^3}{3} = 0.000\ 333\ 33$$

$$\frac{x^4}{4} = 0.000\ 025\ 00$$

$$\frac{x^5}{5} = 0.000\ 002\ 00$$

$$\frac{x^6}{6} = 0.000\ 000\ 17$$

$$\frac{x^7}{7} = 0.000\ 000\ 01$$

$$\frac{x^8}{8} = \frac{0.000\ 000\ 00}{0.105\ 360\ 51}$$

$$\log (0.9) = -0.43429448 \times 10536051$$

$$= -0.04575749 = \underline{\underline{9.95424251 \cdot 10}}$$

Log (0.8) için $x = 0.2$ dir.

0.200 000 00

0.020 000 00

0.002 666 67

0.000 400 00

$$0.000\ 064\ 00 \quad \log (8) = \log (0.8) = -0.43429448 \times 0.22314355$$

$$0.000\ 010\ 67 \quad = -0.09691000 = \underline{\underline{9.90309000 \cdot 10}}$$

0.000 001 83

0.000 000 32

0.000 000 06

0.000 000 00

0.223 143 55

log (0.7) için $X = 0.3$ tür.

0.300 000 00

0.045 000 00

0.009 000 00

0.002 025 00

$$0.000\ 486\ 00 \quad \log (7) = \log (8) = -0.03429448 \times 0.356\ 674\ 94$$

$$0.000\ 121\ 50 \quad = -0.15490196 = \underline{\underline{9.84509804 \cdot 10}}$$

0.000 051 24

0.000 008 20

0.000 002 19

0.000 000 59

0.000 000 17

0.000 000 04

0.000 000 01

0.000 000 00

0.356 674 94

Logaritmanın hassalarından istifade edilerek 9, 8, 7, nin logaritmalarından diğer sayıların logaritmalarını bulalım.

$$\log (3) = \log (9)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log (9) = 0.954 \ 242 \ 51$$

$$\log (3) = 0.477 \ 121 \ 25$$

$$\log (2) = \log (8)^{\frac{1}{3}}$$

$$\log (2) = 0.30103 \ 000$$

$$\log (4) = 2 \log (2)$$

$$\log (2) = 0.301 \ 030 \ 00$$

$$\log (4) = 0.602 \ 060 \ 00$$

$$\log (6) = \log (2) + \log (3)$$

$$\log (2) = 0.301 \ 030 \ 00$$

$$\log (3) = 0.477 \ 121 \ 25$$

$$\log (6) = 0.778 \ 151 \ 25$$

$$\log (5) = \log (10) - \log (2)$$

$$\log (10) = 1.000 \ 000 \ 00$$

$$\log (2) = 0.301 \ 030 \ 00$$

$$\log (5) = 0.698 \ 970 \ 00$$

Bu suretle elde edilen (1) ile (10) arasındaki sayıların logaritmalarından istifade edilerek bir çok sayıların logaritmaları elde edilir. (11), (13), (17); (19) gibi asal sayıların logaritmaları ayrıca hesap edilir. 100 den itibaren sayıların logaritmaları interpolate usulü ile kolayca elde edilir.

Interpolasyon :

$$f(a - 3h)$$

$$I_{\frac{5}{2}}$$

$$f(a - 2h)$$

$$II_{-2}$$

$$I_{-\frac{3}{2}}$$

$$III_{-\frac{3}{2}}$$

$$f(a - h)$$

$$II_{-1}$$

$$IV_{-1}$$

$$I_{-\frac{1}{2}}$$

$$III_{-\frac{1}{2}}$$

$$V_{-\frac{1}{2}}$$

$$f(a)$$

$$II_0$$

$$IV_0$$

$$VI_0$$

$$I_{+\frac{1}{2}}$$

$$III_{+\frac{1}{2}}$$

$$V_{-\frac{1}{2}}$$

$$f(a + h)$$

$$II_{+1}$$

$$IV_{+1}$$

$$I_{+\frac{3}{2}}$$

$$III_{+\frac{3}{2}}$$

$$f(a + 2h) \quad II_{+2}$$

$$f(a + 3h) \quad I_{+\frac{3}{2}}$$

$f(a \mp nh)$ verilen logaritmaları ve

(I) logaritmaların birinci farkı

(II) » ikinci farkı

(III) » üçüncü farkı

(IV) » dördüncü farkı göstermek üzere

(II), (III), (IV) farkları (O) dan farklı olduğu zaman hatti olarak interpolate edemeyiz bu gibi meseleleri halledebilmek için bir çok formül mevcuttur. Bunlar arasında en kullanışlı olanı :

Stirling interpolasyon formülü

$$f(a + nh) = f(a) + nI_m + \frac{n^2}{2} II_m + \frac{n(n^2 - 1)}{6} III_m + \frac{n^2(n^2 - 1)}{24} IV_m$$

$$I_m = \frac{1}{2} \left(I_{-\frac{1}{2}} + I_{+\frac{1}{2}} \right), \quad III_m = \frac{1}{2} \left(III_{\frac{1}{2}} + III_{-\frac{1}{2}} \right)$$

log. ve farkları 8 inci hane kıymetleri cinsinden gösterilerek

Sayı	Log.	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	IV. Diff.
90	954 242 51	479 888			
91	959 041 39	474 644	5 244	112	
92	963 787 83	469 512	5 132	110	2
93	968 482 95	464 490	5 022	108	2
94	973 173 75	459 576	4 94	100	8
95	977 723 61	454 762	4 814		
96	982 271 23		bulunur ve buradan		

(n) Cetveli :

n	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n(n^2 - 1)}{2}$	$\frac{n^2(n^2 - 1)}{24}$
0.1	0.005	-0.0165	-0.0004
0.2	0.020	-0.0320	-0.0016
0.3	0.045	-0.0455	-0.0034
0.4	0.080	-0.0560	-0.0056
0.5	0.125	-0.0625	-0.0068
0.6	0.180	-0.0640	-0.0096
0.7	0.245	-0.0571	-0.0104
0.8	0.320	-0.0480	-0.0096
0.9	0.405	-0.0285	-0.0064

90, 91, 92, 93, 94, 95, 96 sayılarının logaritmaları malûm ikên 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939 sayılarının logaritmalarını hesaplayalım.

$$f(a) = 968\ 482\ 95$$

$$I_m = \frac{469\ 512 + 464\ 490}{2} = 467\ 001$$

$$II_o = 5022$$

$$III_m = \frac{110 - 108}{2} = 109$$

$$IV_o = 2$$

Misalimizde :

$$f(a) = 968\ 482\ 95$$

$$a = 93$$

$$f(a + nh) = \text{aranılan logaritmalar}$$

$$a + nh = \text{logaritmaları istenen sayılar}$$

$$h = \text{malûm olarak verilen sayıların arasındaki fark}$$

931 in logaritması ile 93.1 in logaritmaları yalnız merfularda fark edeceklerinden :

$$a + nh = 93.1 \quad 93 + n = 93.1$$

$$a = 93$$

$$h = 1$$

$$n = 0.1 \quad \text{bulunur.}$$

ve sıra ile :

Sayı	n
93.1	0.1
93.2	0.2
93.3	0.3
93.4	0.4
93.5	0.5
93.6	0.6
93.7	0.7
93.8	0.8
93.9	0.9

kıymetleri kolayca hesaplanırlar.

formülün sağ tarafını teşkil eden I_m , II_o , III_m , IV_o hadlerinin emsalleri (n) in muhtelif kıymetlerine göre hesaplanmış ve bir cetvel halinde gösterilmiştir.

	n = 0.1	n = 0.2	n = 0.3	n = 0.4	n = 0.5
f (a)	968 482 95	968 482 95	968 482 95	968 482 95	968 482 95
nl	+ 467 00.1	+ 934 00.2	+1 401 00.3	+1 868 00.4	+2 335 00.5
nll ₀	- 25.1	-1 00.4	-2 26.0	-4 01.8	-6 27.8
n (n-1) III _a	- 1.8	- 3.5	- 5.0	- 5.9	- 6.8
f (n + nh) =	968 949 68.2	969 415 91.3	969 881 64.3	970 346 87.7	970 881 60.9
	(931)	(932)	(933)	(934)	(935)

n=0.6	n=0.7	n=0.8	n=0.9
968 482 95	965 482 95	968 482 95	968 482 95
2 802 00.6	3 269 00.7	3 736 00.8	4 203 00.9
9 04.0	12 30.4	16 07.0	20 33.0
7.0	6.2	5.2	3.1
971 275 84.6	961 739 59.1	972 202 83.6	972 665 58.9
(936)	(937)	(938)	(939)

İkinci farklar (0) veya (1) oluncaya kadar hesaplara devam edilir. Altı haneli logaritma cetvellerini tetkik edersek her sayfanın kenarında bulunan interpolate cetvelleri birinci farkları göstermektedir. Bu farklar beşinci sayfada 44, 43, 42, 41, 40 olarak birer farkla küçülerek sayı logaritmasının son sayfası olan 154 cü sayfada, 5,4 olmuştur.

İkinci farklar (1) olduğundan yapılan hesaplarda ikinci derece interpolateye ihtiyacı yoktur.

Sayı logaritmalarının sıhhat dereceleri :

$$\log (x) = \mu \ln (x)$$

$$y = \mu \ln (x)$$

$$dy = \mu \frac{dx}{x}$$

$$x = \frac{\mu dx}{dy}$$

(dy) logaritma hatası

(dx) sayı hatası

Logaritmanın hatasından dolayı hesaplarımıza tesir edecek hatayı 0.5 santim yani santimetre garanti edilmiş olsun.

Şuhalde :

Altı haneli logaritma cedvelleri için :

$$dy = 0.5 \cdot 10^{-6}$$

$$dx = 0.5 \cdot 10^{-5} \text{ klm.}$$

$$x = \frac{\mu 0.5 \cdot 10^{-5}}{0.5 \cdot 10^{-6}} 10. \mu = 4,343 \text{ Klm.}$$

Yedi haneli logaritma cedvelleri için :

$$dy = 0.5 \cdot 10^{-7}$$

$$dx = 0.5 \cdot 10^{-5}$$

$$X = 100 \mu \quad = 43,43 \text{ Klm. dir.}$$

Altı haneli logaritmalar dılları 4.3 klm. den küçük olan üçgen hallerinde ve yedi haneli logaritmalar ise dılları 43.4 klm. yi geçmeyen üçgenlerin hallerinde kullanılır.

