

Dr.Müh. Gürol BANGER

Summary : In this paper, obliquity of the horizon in automatic levels is investigated. This kind of instrumental error causes accumulation of systematic errors in observations of precise levelling using automatic levels. A study has been made on obliquity of the horizon of automatic levels which have different kinds of compensators. As a result of this study, periodical change of this error according to levelling head of level has been obtained. Some experimental results are analysed and some measuring methods are also given to eliminate it.

GİRİŞ

Nivoların yöneltme eksenleri, kuruldukları noktadan geçen gerçek gravite doğrultusuna bir ara düzen yardımı ile dik duruma getirilir. Bu ara düzen bir çakıştırma vidasına bağlı silindirik düzeç veya bir kompensatör sistemidir.

Her tip nivoda, eksenlerin birbirlerine göre olan konumları kontrol edilerék, bu yüzden ortaya çıkacak hatalar önlenmeye çalışılır. Ancak, eksen koşulları tam yerine getirilemediği veya ölçmeler sırasında sürdürülemediğinden, bunların etkisi seçilen ölçme yolları ile en aza indirilmeye çalışılır.

Bu yazıda, kompensatörlü nivo kullanılan ölçmelerde, özellikle duyarlı nivelmanda^x) gözardı edilemeyecek sistematik hata birikimlerine neden olabilen 'eğik ufuk hatası' üzerinde durulmuş ve büyüklüğü üzerinde yapılan bir araştırmanın sonuçları verilmiştir.

x) Burada 'duyarlı nivelman' hassas nivelman karşılığı olarak kullanılmıştır. Hassasiyet (doğruluk), gerçek değerden olan sapmaların bir ölçütü olduğundan ve bu tip bir ölçme ile ancak duyarlı bir yükseklik farkı elde edileceğinden bu isim kullanılmıştır.

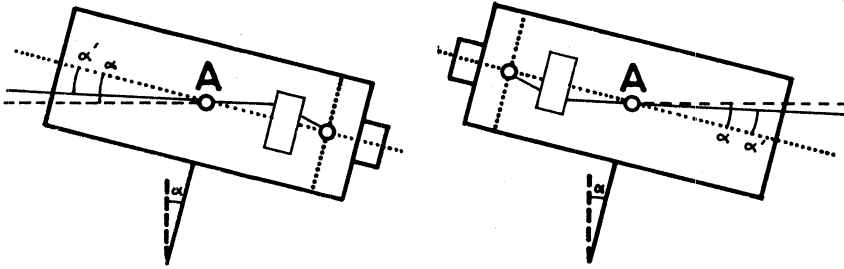
1. EĞİK UFUK HATASI

Eğik ufuk hatası, kompansatörlü nivoların yapılarından ileri gelen ve eksen kontrolleri ile yokedilemeyen bir eksen hatasıdır. Bu hata, aşağıda sıralanacak olan nedenlerden kaynaklanır ve uygun bir ölçme yolu seçilmediği takdirde ölçülerde oldukça önemli sistematik hata birikimlerine neden olabilir. Hatanın büyüklüğü ve işareti nivonun alt ve üst yapılarının birbirlerine olan konumlarına bağlı olarak değişir.

1.1. Nedenleri

Kompansatörlü nivoların bu tipik hatası genel olarak aşağıdaki nedenlerden kaynaklanır :

a- Kompansatörlü nivolarda, bakış ışını kendiliğinden yataylayan sistem, bu işlemi sınırlı duyarlılıkta yapar ($\sim \pm 0''.2$). Bunun sonucu olarak yataylama, gerçekten (küçük bir değerde) az veya çok olabilir (şekil:1). Hatasız bir küresel düzeye yardımcı ile nivo asal ekseninin belirlendiği varsayılınsın. Bu durumda hatalı yataylama yüzünden, α açısı ile nivoya giren bakış ışını sırtlar şebekesi kesişme merkezine düşmesi gerekirken, α' açısı ile nivoya



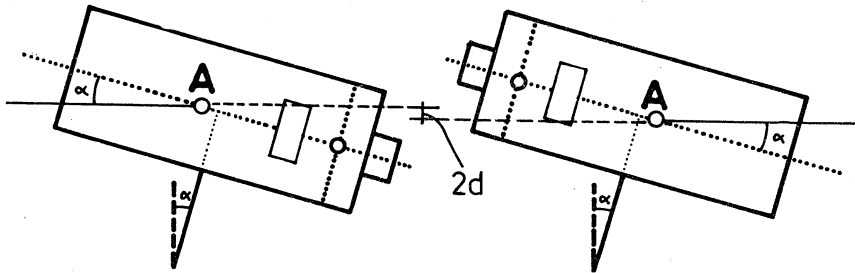
Şekil :1.

giren hatalı ışına göre gözlem yapılır. Nivo, ters yöndeki ikinci miraya çevrildiğinde, asal eksen konumu değişmediğinden, ilk duruma benzer fakat ters yönde hatalı bir doğrultu ile nivoya giren ışın gözlenir. Bu durumda hata geri ile ileri okumalar farkının alınması ile giderilemez.

b- Kompansatörün ayarlandığı uzaklıktan farklı olan uzaklıklarda çalışılması sırasında A analaktik noktanın asal eksenin önüne veya arkasına doğru uzaklaşması benzer hataya neden olur (şekil:2).

c- Her kompansatörlü nivoda; yaklaşık düzeçlemede kullanılan ve duyarlılıkları 8'~ 15' arasında bulunan bir küresel düzeç bulunur. Küresel düzeçlerin ayar hataları veya sınırlı duyarlılıkları doğru çalışan bir kompansatörde asal eksenin eğikliğine neden olabilir.

d- Düşey cisim düzlemi ile kompansatör salınım düzlemlerinin birbirlerine paralel olmaması da bu hataya neden olabilir (DRODOFSKY, 1957; ÖZGEN, 1962; SCHWARZ, 1966, 1978; STOBER, 1979) .



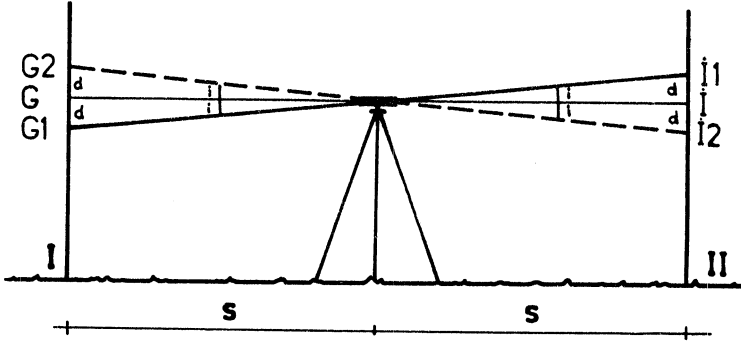
Şekil: 2

1.2. Sistematik hata özelliği

Bir durak noktasında, eğik ufuk hatasına sahip olan bir nivonun, küresel düzeç ile yaklaşık yataylandığı varsayılınsın. Bu durumda eğik ufuk hatası nedeniyle geri mirada olduğundan d kadar az olan G_1 okuması, ileri mirada ise asal eksenin konumu değişmediğinden d kadar fazla olan I_1 okuması yapılırlar (şekil.3). Böylece mira noktaları arasındaki yükseklik farkı

$$h = G_1 - I_1 = (G - d) - (I + d) = G - I - 2d$$

olarak elde edilir. Bulunan yükseklik farkı eğik ufuk hatası yüzünden $2d$ kadar hata ile yüküldür. Nivonun yaklaşık düzeçlenmesi genellikle geri



Şekil : 3.

mira doğrultusunda yapıldığından, hata her durak noktasında aynı işaretli olarak ölçülere giren sistematik hata özelliğindedir. Son yıllarda bu hata üzerine yapılan bir araştırmada, çeşitli kompensatörlere sahip nivolar için ortalama eğik ufuk hataları

nivo	Ni 1(65025)	Ni2(85120)	Ni2 (29148)	Ni2(22561)	Ni2(148277)
\bar{i}	$-0^{cc}.80$	$-0^{cc}.34$	$-0^{cc}.09$	$-0^{cc}.19$	$-1^{cc}.20$

olarak verilmektedir (STOBER,1979). Buradan örnek alarak, 1^{cc} lik eğik ufuk hatası gidiş ve dönüş ölçülerinde 3.2 mm/km lik hata birikimine neden olur.

1.3. Nivonun üst ve alt yapılarının konumuna bağımlılığı

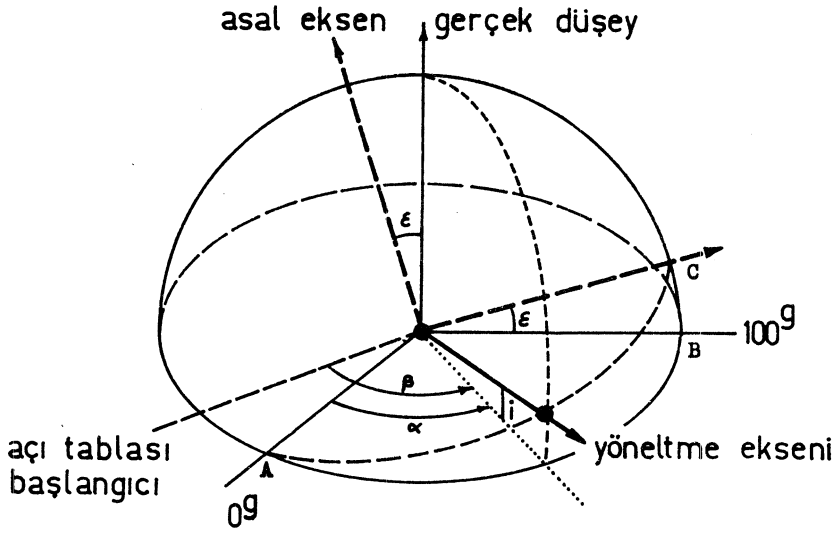
Bölüm 1.1 de açıklanan nedenlerden biri veya birkaçı yüzünden ortaya çıkan eğik ufuk hatası, genel olarak bir asal eksen eğikliği şeklinde ölçüleri etkiler. Buna göre nivonun kurulduğu noktadan geçen gerçek gravite doğrultusu ile asal eksen arasında genel olarak bir ϵ uzay açısı bulunur (FITZEN,1978). Nivonun yöneltme eksenini, asal eksen ile gerçek düşeyi içine alan düşey düzlem içinde bulunursa, eğik ufuk hatası en büyük değeri ile ölçüleri etkiler. Bu konuma dik doğrultuda ise hatanın etkisi sıfır olacaktır. Şekil:4 de gösterilen ABC küresel dik üçgeninde

$$\tan i = \tan \epsilon \cdot \sin \alpha$$

yazılabilir. Ancak i ve ϵ açıları küçük açılar olduğundan bunların tanjant değerleri yerine radyan değerleri alınır bu bağıntı

$$i = \epsilon \cdot \sin \alpha$$

şeklini alır. Bu bağıntıdan da görüldüğü gibi, eğik ufuk hatasının büyüklük ve işareti (yatay açı tablasının başlangıcından bağımsız olarak), yöneltme ekseninin nivonun alt yapısı ile olan konumuna da bağlı olmaktadır (BANGER, 1982).



Şekil:4

2. UYGULAMA

2.1. Laboratuvar uygulaması

Eğik ufuk hatasının büyüklüğünü ve bölüm 1.3 de verilen bağıntıya uygunluğunu ortaya koymak amacı ile KTÜ Jeodezi ve Fotogrametri Bölümü ölçü bodrumunda test ölçmeleri yapılmıştır (KARADENİZ/KIRCI,1981). Dış etkilerden olduğunca korunabilmek için kapalı test alanı seçilmiştir. Aralarında 70 m uzaklık bulunan iki özel mira doğrultusunun ortasına bir pilye yerleştirilmiştir. Test edilen nivoların çeşitli doğrultulardaki eğik ufuk hatalarını elde etmek amacı ile ölçmeler, yatay açı tablasına göre 0-200, 50-250, 100-300, 150-350... 350-50 grad olmak üzere sekiz ayrı doğrultuda yapılmıştır. Test edilen nivo, herbir ayrı doğrultuda, önce I mirasına yöneltilerek düzeçlenmiştir (şekil:3). Bu mirada 20 okuma yapılmış, daha sonra ters doğrultudaki II mirasına çevrilerek bu mira üzerinde de aynı sayıda okuma yapılmıştır. Bundan sonra nivo II mirası doğrultusunda yeniden düzeçlenmiş ve yukarıdakine benzer olarak ikinci II ve I mira okumaları yapılmıştır. Bu işlemler nivonun her yeni doğrultusu için tekrarlanmıştır. Bu ölçme şekline

göre iki mira noktası arasındaki yükseklik farkları, birinci durumda

$$G_1 = G - d \quad \text{ve} \quad i_1 = i + d$$

olduğundan

$$h_1 = G_1 - i_1 = (G - d) - 2d$$

olarak yazılabilir, ikinci durumda ise

$$G_2 = G + d \quad \text{ve} \quad i_2 = i - d$$

olduğundan

$$h_2 = G_2 - i_2 = (G + d) + 2d$$

olarak yazılabilir. Nivonun bu doğrultusundaki eğik ufuk hatası, h_1 ve h_2 yükseklik farkları arasındaki farklardan elde edilecektir. Bu büyüklük,

$$D = h_1 - h_2 = -4d$$

şeklindedir. d farkı için radyan olarak $d = i.s$ yazılabileceğinden her iki durum arasındaki fark

$$D = -4. i . s$$

veya eğik ufuk hatası

$$i = - \frac{D}{4.s} \rho$$

(2)

olarak elde edilir. \bar{i} değeri, her iki durumda yapılan mira okumalarının aritmetik ortalamalarından hesaplanmıştır. Buna göre \bar{i} ortalama eğik ufuk hata -sının standart sapması

$$s_{\bar{i}} = \frac{\rho}{4.s} \sqrt{s_{G1}^2 + s_{G2}^2 + s_{I1}^2 + s_{I2}^2} \quad (3)$$

olmak üzere

$$s_{\bar{i}} = s_i / \sqrt{n} \quad (4)$$

bağıntısından elde edilmiştir. Burada,

n = Ölçü sayısı,

$s_{G1}, G2, I1, I2$ = Mira okumalarının standart sapmalarıdır.

Anlam düzeyi $\alpha = 0.05$ alınarak ;

a- Hesaplanan \bar{i} değerlerinin kitle ortalamalarının sıfırdan farklılıkları ek.a da açıklandığı şekilde test edilmiştir. Yapılan test sonucunda kitle ortalamalarının büyük ölçüde sıfırdan farklı oldukları görülmüştür.

b_ Her nivo için çeşitli konumlara göre hesaplanan örnek standart sapmaları kullanılarak kitle varyanslarının eşit kabul edilebilecekleri ek-b de açıklanan Bartlett testi kullanılarak görülmüştür.

c- Kitle ortalamalarının ayrı ayrı sıfırdan farklı oldukları bölüm.a da açıklanan şekilde gösterilmiştir. Ayrıca, kitle ortalamalarının birbirlerine eşit olup olmadıkları ek-c de açıklanan şekilde varyans analizi kullanılarak araştırılmıştır. Bunun sonucu olarak, kitle ortalamalarının eşit alınmayacakları görülmüştür.

Eğik ufuk hataları, genel olarak yatay açı değerlerine göre periyodik bir değişim göstermektedir. Ölçülerin sürekli bir fonksiyon ile gösterilmesinde, hesaplanan \bar{i} ve β yatay açı değerleri

$$\bar{i} = A_0 + A_1 \cdot \sin\beta + A_2 \cdot \cos\beta = A_0 + B_0 \cdot \sin(\beta + \phi) \quad (5)$$

bağıntısında kullanılarak A_1 bilinmeyenleri en küçük kareler yolu ile tahmin edilmiştir (tablo:2). Burada ;

$$B_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad , \quad \phi = \arctan(A_2/A_1)$$

dir.

Bu çalışmada altı kompensatörlü nive kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar tablo :1,2 ve şekil:5,6 da verilmiştir.

2.2. Arazi uygulaması

Eğik ufuk hataları deneysel olarak bulunan Jena Ni007 (139040) ve Wild NAK2 (113714) nivoları arazide, aşağıda açıklandığı şekilde denenmiştir.

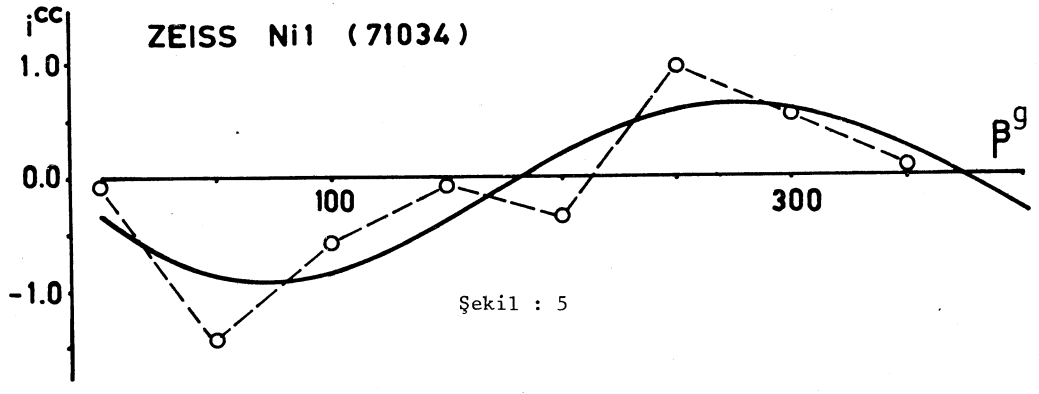
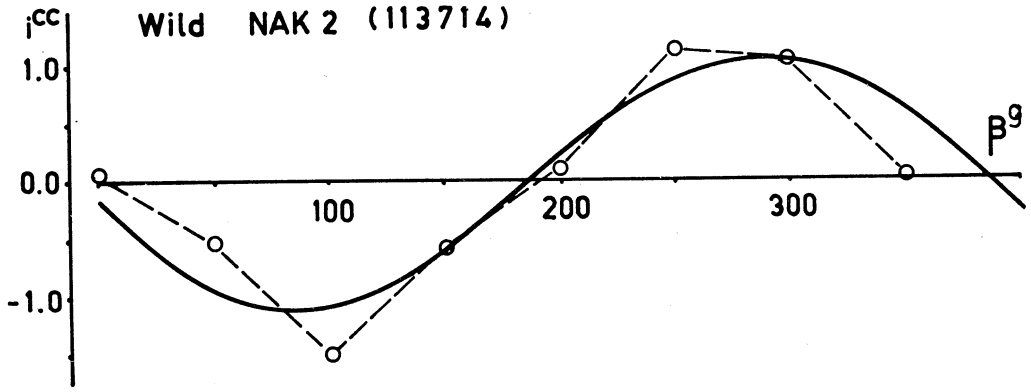
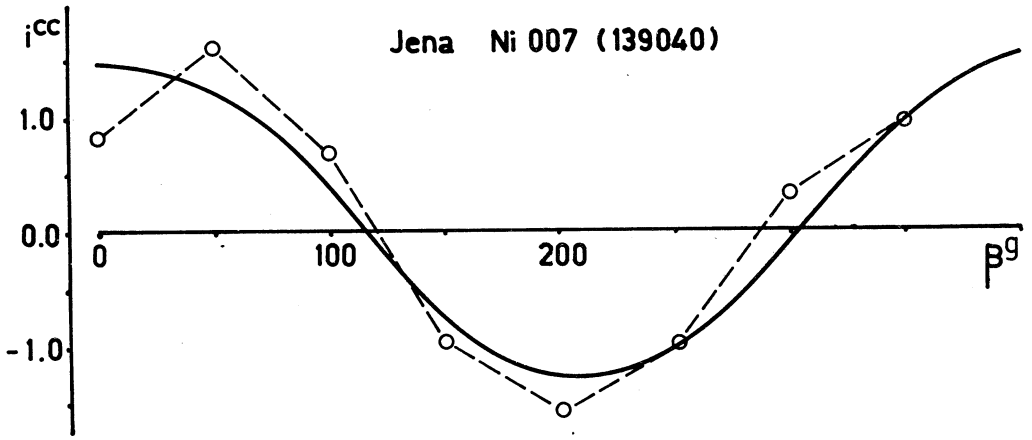
Eğik ufuk hatalarına ait 5 bağıntısından bu nivoların en büyük ve en küçük eğik ufuk hatasına sahip yaklaşık doğrultuları hesaplanmıştır.

Nivo	Doğrultular (grad)								
	0	50	100	150	200	250	300	350	
	200	250	300	350	0	50	100	150	
1 Jena Ni007 (139047)	\bar{i}^{cc}	+0.805	+1.620	+0.684	-0.936	-1.557	-0.959	+0.315	+0.900
	s_i	0,053	0,050	0,052	0,063	0,052	0,055	0,045	0,042
	t	15,19	32,40	13,25	14,77	30,10	17,46	6,96	21,51
2 Wild NAK2 (113714)	\bar{i}^{cc}	+0,059	-0,531	-1,449	-0,626	+0,144	+1,148	+1,085	+0,023
	s_i	0,095	0,104	0,119	0,119	0,097	0,096	0,091	0,084
	t	0,62	5,11	12,20	5,27	1,48	11,90	11,89	0,27
3 ZEISS Ni1 (71034)	\bar{i}^{cc}	-0,054	-1,382	-0,621	-0,099	-0,351	+0,954	+0,549	+0,072
	s_i	0,110	0,105	0,117	0,111	0,107	0,108	0,107	0,086
	t	0,49	13,16	5,31	0,89	3,28	8,83	5,13	0,84
4 ZEISS Ni2 (101959)	\bar{i}^{cc}	-1,301	-1,229	+0,135	+0,770	+1,026	-0,095	-0,792	-0,779
	s_i	0,107	0,102	0,087	0,087	0,109	0,084	0,101	0,086
	t	12,18	12,05	1,54	8,83	9,40	1,13	7,87	9,06
5 ZEISS Ni2 (101953)	\bar{i}^{cc}	-1,132	-0,809	-0,118	+1,523	+0,532	+0,605	-1,170	-1,103
	s_i	0,088	0,087	0,066	0,082	0,087	0,093	0,082	0,094
	t	12,87	9,25	1,79	18,50	6,13	6,51	14,23	11,77
6 ZEISS Ni2 (101948)	\bar{i}^{cc}	+0,373	-0,114	-0,005	+0,464	-0,718	-0,732	-0,177	+0,614
	s_i	0,087	0,076	0,077	0,102	0,092	0,091	0,072	0,089
	t	4,29	1,50	0,07	4,55	7,80	8,04	2,46	6,90

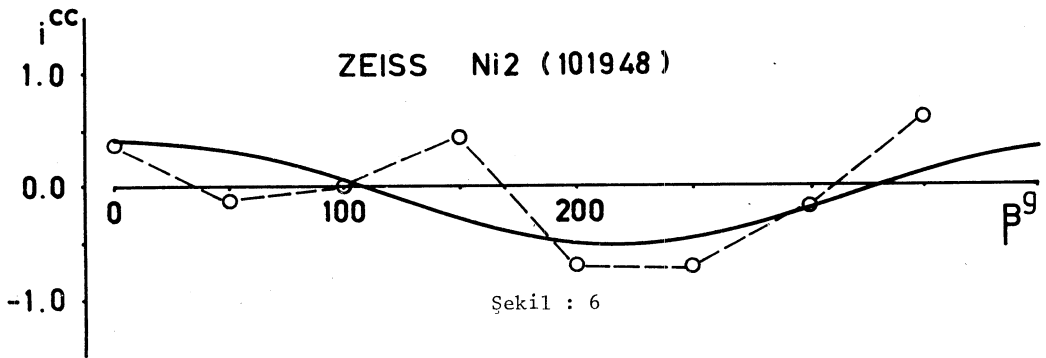
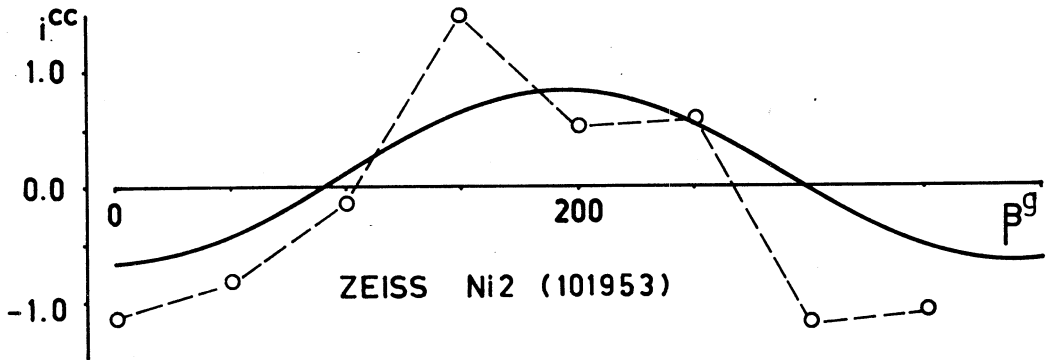
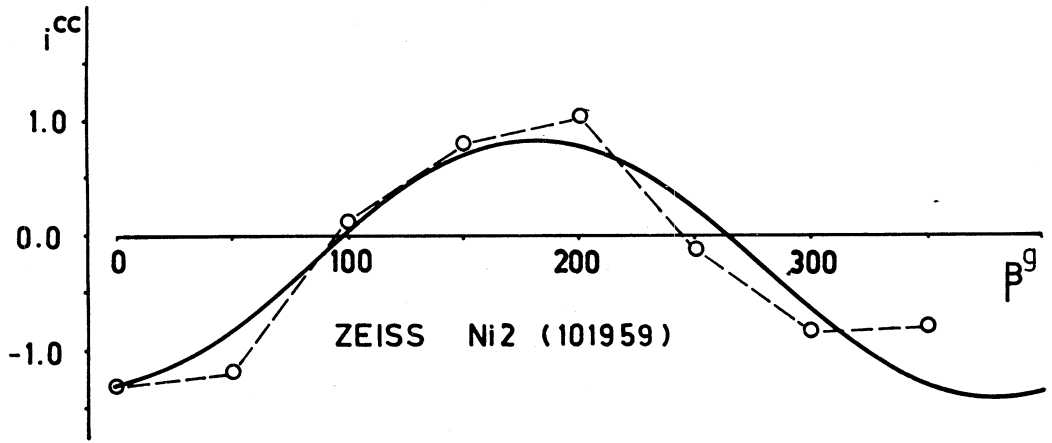
Tablo 1. Araştırmada kullanılan nivoların farklı konumlarda ölçülen eğik ufuk hataları, standart sapmaları ve t değerleri.

Nivo	A_o	B_o	ϕ^g	s	χ^2	i	s_i^2	s_b^2	F
1	+0.109	+1.389	89.71	0.460	3.94	+0.109	1.253	0.054	466.23
2	-0.018	+1.065	212.23	0.389	4.06	-0.018	0.756	0.205	73.64
3	-0.117	+0.798	225.28	0.446	1.96	-0.117	0.506	0.228	44.44
4	-0.283	+1.099	317.91	0.357	3.07	-0.283	0.781	0.184	84.98
5	+0.067	+0.745	307.47	1.024	2.93	+0.067	1.067	0.145	146.74
6	-0.037	+0.427	81.00	0.466	3.57	-0.037	0.259	0.149	34.81

Tablo 2. Araştırmada kullanılan nivoların 5 bağıntısına ait katsayıları, hesaplanan χ^2 ve F test istatistikleri.



Şekil : 5



Şekil : 6

Karadeniz Teknik Üniversitesinde, duyarlı nivelman üzerine yapılan bir araştırma için mira noktaları özel çivilerle işaretlenmiş olan 500 m lik düz bir nivelman hattında çift yüzlü invar miralar kullanılarak gidiş-dönüş olmak üzere test ölçmeleri yapılmıştır. Ölçmeler ;

a- Nivelman pozitif en büyük eğik ufuk hatasına sahip doğrultusu daima geri mira doğrultusunda ve düzeçleme sadece bu doğrultuda yapılarak,

b- Nivelman en küçük eğik ufuk hatasına sahip doğrultusu daima geri mira doğrultusunda ve düzeçleme sadece bu doğrultuda yapılarak,

c- Nivelman en büyük eğik ufuk hatasına sahip doğrultusu yine geri mira doğrultusunda, ancak birinci düzeçlemenin G1 , İ1 okumaları için geri mira, ikinci düzeltmenin İ2 , G2 okumaları için ileri mira doğrultularında yapılarak,

yürütülmüştür. Tablo : 3 de eğik ufuk hatasının hesaplanan ve ölçülen değerleri ile c ölçme şekline göre gidiş-dönüş farkının önemli derecede azaltılabileceği görülmektedir.

nivo	en büyük i doğrultusu	i _{cc}	a mm	hesap.	en küçük i doğrultusu	i _{cc}	b mm	hesap.	c mm
Ni007	10 ^g _210 ^g	1.50	2.55	2.36	110 ^g -310 ^g	0.11	-0.59	0.17	-0.71
NAK2	290 ^g _90 ^g	1.08	1.65	1.70	390 ^g _190 ^g	0.02	-0.06	0.03	-0.50

Tablo:3

3. EĞİK UFUK HATASININ ÖLÇÜLERDEN SÜZÜLMESİ VE SONUÇ

Önceki bölümde verilen değerlerden görüldüğü gibi, eğik ufuk hatası, nivelman arazide kullanılış doğrultusuna bağlı olarak önemli hata birikimlerine neden olabilmektedir. Ortaya çıkan hata, yapılan nivelmandan istenen inceliğe bağlıdır. Teknik nivelmanda bu hata kolaylıkla gözardı edilebilir. Ancak duyar-

lı veya özel amaçlı yüksek duyarlıklı nivelmanda bu hatanın elden geldiğince ölçülerden süzülmesi gerekir. Önceki bölümde açıklanan yol izlenerek her nivoya ait hata değerleri hesaplanarak ölçülere bir düzeltme getirilebilir. Ancak, bu ek bir hesaplama işlemi gerektirir. En iyi çözüm, seçilecek bir ölçme şekline göre ölçmelerin yürütülmesidir. Bu ölçme şekilleri aşağıda verilmiştir ;

- Ölçmelerde çift yüzlü miralar kullanılıyor veya tek yüzlü miralarla aynı durak noktasında iki ölçme yapılıyorsa, küresel düzeç geri mira doğrultusunda düzeçlenerek G1 , İ1 okumaları yapılır. Daha sonra küresel düzeç ileri mira doğrultusunda düzeçlenerek İ2 , G2 okumaları yapılır. Her iki durumda, eğik ufuk hatası, ölçülere aynı büyüklükte fakat ters işaretli olarak gireceğinden giderilmiş olur.

- Ölçmeler, her durak noktasında birer mira okuması ile sürdürülüyorsa, düzeçlemenin tek sayılı duraklarda geri, çift sayılı duraklarda ileri mira doğrultusunda yapılarak hatanın giderilmesine çalışılır. Ancak, bu nivonun her yeni noktada alt ve üst yapıya göre aynı doğrultuda kurulması ile geçerlidir. Bu durumun her zaman sağlanması güç olduğundan ilk ölçme şekli kadar kesin değildir.

FAYDALANILAN KAYNAKLAR

- AKSOY, A. (1974) : "Matematik istatistik yöntemlerle jeodezik ölçülerin irdelenmesi" , İTÜ, İstanbul
- BANGER,G.(1982) : "Hassas nivelmanda hata kaynakları", İÜ Orman Fakültesi Dergisi, İstanbul (baskıda)
- BJERHAMMAR,A.(1973): "Theory of errors and generalized matrix inverses", Elsevier Sci.Pub.Com.,Amsterdam
- DRODOFSKY,M.(1957) : "Prazisionsnivellement mit Zeiss Ni2 ", Zeitschrift für Vermessungswesen, 1957/12,s:430-434
- FITZEN,H.P.(1978): "Untersuchungen zur Invarianz der Ziellinie bei Kompensatornivellieren höher und höchster Genauigkeit", Veröff. Geo.Inst. der Rheinischwestfalischen. Tech. Hochschule, Aachen, No:25
- KARADENİZ,K./ : "Kompansatörlü nivolarda ufuk hatasının araştırılması", KIRCI,Ü.(1981) KTÜ Jeodezi ve Fotog. Bölümü Bitirme Ödevi, Trabzon
- ÖZGEN,M.G.(1962) : "Kompansatörlü nivolar, özellikleri, tipleri ", İTÜ Dergisi, 1962/1, İstanbul, s:22-35
- SCHWARZ,E.(1966) : Zur Elimination von systematischen Fehlern im Nivellement", Zeitschrift für Vermessungswesen, 1966/12, s:486-493
- SCHWARZ,E.(1978) : "II. Neue Ergebnisse aus Wiederholungsnivellements im Oberrheingraben ", Zeitschrift für Vermessungswesen, 1978/9, s:420-424
- STOBER,M.(1979) : "Zur Erfassung rezenter vertikaler Krustenbewegungen durch Prazisionsnivellements", DGK,C-251, München
- WINER,B.J.(1971) : "Statistical princibles in experimental design", McGraw-Hill, Second Edition
- WONNACOTT,T.H/WONNACOTT,R.J.(1977):"Introductory Statistics", John Wiley,Third edition

E K L E R :

a- Normal dağıldığı varsayılan bir kitleden alınan n sayıda gözlemin ortalaması \bar{I} ve standart sapması $s_{\bar{I}}$ hesaplanmıştır. Örneğe ait kitle ortalaması μ ın sıfırdan olan farkı belirlenen bir anlam düzeyinde

$H_0 : \mu = 0$ sıfır hipotezi

$H_a : \mu \neq 0$ alternatif hipotezi

karşısında test edilecektir. Bunun için

$$t = (\bar{I} - 0) / s_{\bar{I}}$$

test istatistiği kullanılmıştır. H_0 hipotezinin kabul edilebilmesi için

$$- t_{\alpha/2} (n-1) < t < t_{\alpha/2} (n-1)$$

olması gerekir. Çalışmada $t_{0.025} (20-1) = 2.093$ dir.

b- Normal dağıldığı varsayılan k sayıda örneğin alındığı kitle varyanslarının eşit kabul edilip edilemeyeceği test edilecektir. Burada ;

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ sıfır hipotezi

$H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \dots \neq \sigma_k^2$ alternatif hipotezi

karşısında test edilir. Bunun için n_j , örneklerdeki gözlem sayısı,

$f_j = n_j - 1$ serbestlik dereceleri ve s_j örneklerin standart sapmaları olmak üzere, birleştirilmiş varyans

$$s_o^2 = \frac{\sum_{j=1}^k f_j \cdot s_j^2}{f_o} \quad \text{ve} \quad f_o = \sum_{j=1}^k f_j$$

dir. Pratik hesaplamalarda

$$X^2 = \frac{2.303}{c} (f_o \cdot \log s_o^2 - \sum_{j=1}^k f_j \cdot \log s_j^2)$$

test istatistiği kullanılır. Burada

$$c = 1 + (\sum 1/f_j - 1/f_o) / (3(k-1))$$

dir. H_o hipotezinin kabul edilebilmesi için $X^2 \leq X_{\alpha, (k-1)}^2$ olmalıdır. çalışmada $X_{0,05, (8-1)}^2 = 14.067$ dir.

c- Normal dağıldığı ve varyanslarının eşit oldukları varsayılan k sayıda örneğin alındığı kitlelerin ortalamalarının eşit kabul edilip edilemeyeceği test edilecektir. Başka bir deyişle, k sayıda örneğin aynı genel kitleden alınıp alınmadığı test edilecektir. Burada :

$H_o : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ sıfır hipotezi

$H_a : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \dots \neq \mu_k$ alternatif hipotezi karşısında

karşısında test edilir. Eşit sayıda gözlemlere sahip k sayıda örnek için \bar{I}_j örnek ortalamalarının ortalaması

$$\bar{I} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \bar{I}_j$$

ve ortalamaların standart sapması

$$s_{\bar{i}}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k (\bar{i}_j - \bar{i})^2$$

bulunur. Ayrıca ortalama standart sapma, örnek standart sapmalarından

$$s_o^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k s_j^2$$

olarak hesaplanabilir. Test istatistiği olarak n bir örnekteki gözlem sayısı olmak üzere

$$F = n \cdot \frac{s_{\bar{i}}^2}{s_o^2}$$

oranı kullanılır. H_0 hipotezinin kabul edilebilmesi için $F < F_{\alpha}$, k-1, k (n-1) olmalıdır. Çalışma a $F_{0.05, 8-1, 8(20-1)} = 2.08$ dir.

AKSOY, 1974, s:47 ; BJERHAMMAR , 1973, s:53-54, 83-86; WINER, 1971,s:205-210;
WONNACOTT, 1977, s:207-211, 276-288)