KLOTOİD EĞRİSİ HESABI İÇİN GENEL BİR YAKLAŞIM

Mehmet Zeki COŞKUN
Cengizhan İPBÜKER

ÖZET

Uluslararası karayollarında, yada küçük yarıçaplı bağlantı yollarında emniyeti artırmak için birleştirme eğrisi olarak birçok eğriler kullanılmaktadır. Bu eğrilerden en çok kullanılanı değişik mertebelerden farklı türlerde klotoid eğrileridir. Klotoidin mertebesi değiştikçe parametrelerinin ve dik koordinatlarının hesabı da farklı eşitliklerle hesaplanmaktadır. Bu çalışmada klotoid eğrilerinin çözümü için genel bir yaklaşım sunulmaktadır.

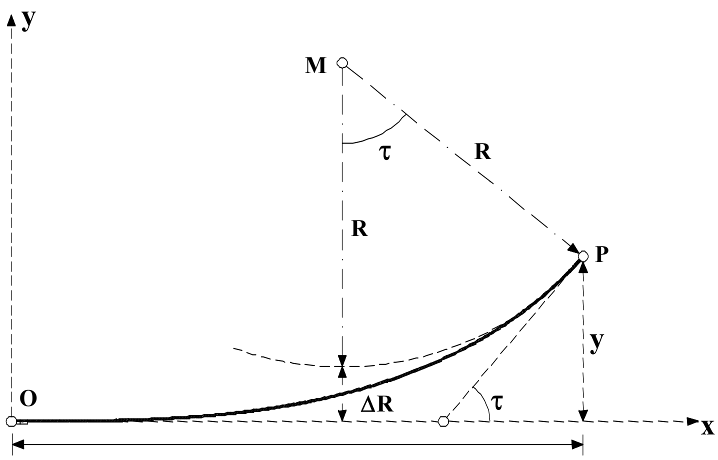
ABSTRACT

In International highways, railways or metro, especialy at the parts in short radius, the two parameter clothoid is used as a transition curve to increase the security. Naturaly, the equations belong to the calculation of the right coordinates of the clothoid change even for the variably exponents. In this paper, a common expression is presented for the solution of the clothoid curve.

1. GİRİŞ

Birleştirme eğrisi olarak klotoid (CORNU spirali) ülkemizde yüksek standartlı karayollarının, demiryollarının, metro veya hafif raylı sistemlerin projelendirilmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu gibi geçkilerde, geçkilerin özellikle küçük yarıçaplı ve dar, şehir içi ayrım ve katılımları gibi süratin değişken olduğu kesimlerde savrulmayı önlemek ve konforu arttırmak, uzun yollarda da monotonluğu gidermek için birleştirme eğrisi boyu uzatılmaktadır. Bu çalışmada bu türden yolların tasarım ve aplikasyonunda değişken mertebeli klotoid eğrilerinin çözümü için bilgisayarda veya cep hesap makineleri için genel bir eşitlik verilmektedir.

2. KLOTOİDİN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ



Şekil – 1: Klotoid Eğrisi

Klotoid eğrisinin eğriliği ($k = 1/R$) genel olarak

$$k = \frac{l^m}{A^{m+1}} \tag{1}$$

eşitliği ile verilmektedir /2/. Klotoidin herhangi bir P noktasındaki teğetinin ana teğet ile yaptığı açı

$$\tau = \int_0^l k dl \tag{2}$$

integrali ile hesaplanmaktadır. Bu ise

$$\tau = \frac{1}{m+1} \frac{l^{m+1}}{A^{m+1}} \tag{3}$$

eşitliğini verir. Burada l eğri uzunluğu, A ölçek faktörü, m ise kullanılacak (iki parametreli eğriler grubundan) klotoidin mertebesidir. $m = 1$ özel durumunda basit klotoide ait eşitlikler elde edilir.

Klotoidin x ve y dik koordinatları,

$$x = \int_0^l \cos \tau dl \quad , \quad y = \int_0^l \sin \tau dl \tag{4}$$

formülleri ile ifade edilmektedir. Fresnel integralleri olarak tanımlanan bu denklemlerin çözümleri kuvvet serileri yada simpson kuralı yardımı ile yaklaşık olarak yapılır /1/, /2/, /3/.

4 eşitliğinin seriye açılıp integrali alındığında klotoidin dik koordinatları için aşağıdaki eşitlikler elde edilir /2/;

$m = 1$ için,

$$\begin{aligned} x &= l - \frac{l^5}{40A^4} + \frac{l^9}{3456A^8} - \frac{l^{13}}{599040A^{12}} + \frac{l^{17}}{175472640A^{16}} - \ldots \\ y &= \frac{l^3}{6A^2} - \frac{l^7}{336A^6} + \frac{l^{11}}{42240A^{10}} - \frac{l^{15}}{9676800A^{14}} + \frac{l^{19}}{3530960640A^{18}} - \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

$m = 2$ için,

$$x = l - \frac{l^7}{126A^6} + \frac{l^{14}}{25272A^{12}} - \dots$$

$$y = \frac{l^4}{12A^3} - \frac{l^{10}}{1620A^9} + \frac{l^{16}}{466560A^{15}} - \dots \tag{6}$$

$m = 3$ için,

$$x = l - \frac{l^9}{228A^8} + \frac{l^{17}}{104448A^{16}} - \dots$$

$$y = \frac{l^5}{20A^4} - \frac{l^{13}}{4992A^{12}} + \frac{l^{21}}{2580480A^{20}} - \dots \tag{7}$$

Burada yeni terimler eklenerek koordinat hesabında doğruluk yükseltilebilir. Fakat her seferinde fonksiyonları seriye açmak ve integralini almak gerekecektir. Bu çalışmada, fonksiyonları daha genel bir yapıya kavuşturarak hesap kolaylığı sağlanmasının yolları aranmıştır. Müller, aşağıdaki formda bir eşitliğin yeterli incelikte olduğunu belirtmiştir /4/:

$$x_i = \underbrace{l_i}_{a_1} + \underbrace{\frac{\tau_i^2 (7-4n)}{(4n-3)(2n-3)(2n-2)} a_{n-1}}_{a_2} + \dots$$

$$y_i = \underbrace{\frac{\tau_i \, l_i}{3}}_{2a_1} + \underbrace{\frac{\tau_i^2 (5-4n)}{(4n-1)(2n-2)(2n-1)} a_{n-1}}_{a_2} + \dots \tag{8}$$

Burada,
n : Hesaplanacak terim sayısı,
a : Seri açılımda yer alan ardışık terimler

$$\tau_i = \frac{l_i}{2A^2} = \frac{l_i^2}{2Rl} \tag{9}$$

3. GENEL EŞİTLİKLERİN ÇIKARILMASI

(4) eşitlikleri Maclauren serisine açıldığında,

$$x = \int_0^l \left(1 - \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} - \frac{\tau^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\tau^{2n-2}}{(2n-2)!}\right) dl$$

$$y = \int_0^l \left(\tau - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^5}{5!} - \frac{\tau^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\tau^{2n-1}}{(2n-1)!}\right) dl \tag{10}$$

integral eşitlikleri elde edilir. Burada en sonda yer alan, serinin genel ifadesinde τ yerine (3) eşitşiğini koyarak integrali alındığında, m kullanılacak klotoidin mertebesi ve n seride açılacak terim sayısı olmak üzere,

$$x = \sum_{n=1}^{i} (-1)^{n-1} \frac{1}{((m+1)(2n-2)+1)} \frac{L^{(m+1)(2n-2)+1}}{(2n-2)!\,A^{(m+1)(2n-2)}} \frac{1}{(m+1)^{(2n-2)}}$$

$$y = \sum_{n=1}^{i} (-1)^{n-1} \frac{1}{((m+1)(2n-1)+1)} \frac{L^{(m+1)(2n-1)+1}}{(2n-1)!\,A^{(m+1)(2n-1)}} \frac{1}{(m+1)^{(2n-1)}} \qquad (11)$$

genel eşitlikleri bulunur.

$m = 1$ basit klotoidi için

$$x = \sum_{n=1}^{i} (-1)^{n-1} \frac{1}{(4n-3)} \frac{L^{4n-3}}{(2n-2)!\,A^{4n-4}} \frac{1}{2^{(2n-2)}}$$

$$y = \sum_{n=1}^{i} (-1)^{n-1} \frac{1}{(4n-1)} \frac{L^{4n-1}}{(2n-1)!\,A^{4n-2}} \frac{1}{2^{(2n-1)}} \qquad (12)$$

eşitlikleri elde edilir. Aşağıda (5) eşitlikleri ve (12) eşitliklerinden hesaplanan klotoid dik koordinatları ve aralarındaki farklar verilmiştir (Tablo-1).

Tablo-1: Her İki Eşitlikle Hesaplanmış Klotoid Koordinatları (A=100, m=1 ile)

	Seri Açılımı ile		Yeni eşitlikler ile		Farklar	
l (m)	x (m)	y (m)	x (m)	y (m)	dx (m)	dy (m)
10	9.99997500	0.01666664	9.99997500	0.01666664	-	-
20	19.99920001	0.13332952	19.99920001	0.13332952	-	-
30	29.99392557	0.44993491	29.99392557	0.44993491	-	-
40	39.97440759	1.06617915	39.97440758	1.06617915	0.00000001	-
50	49.92193151	2.08100934	49.92193149	2.08100934	0.00000002	-
60	59.80589160	3.59167716	59.80589138	3.59167716	0.00000022	-
70	69.58099264	5.69220327	69.58099102	5.69220322	0.00000162	0.00000005
80	79.18468361	8.47112146	79.18467445	8.47112109	0.00000916	0.00000037
90	88.53498508	12.00839265	88.53494275	12.00839053	0.00004233	0.00000212
100	97.52893519	16.37141504	97.52876882	16.37140474	0.00016637	0.00001030

4. SONUÇ

İstenilen mertebede ve terim sayısında hesap yapma olanağı veren (11) ve (12) formülleri, (5) formüllerinden daha analitik yapıdadır. Tablo- 1' de görüldüğü gibi eğriselliği fazla olan kurb hesaplarında l boyu uzadıkça seri formülleri ile verilen terim sayısı yeterli olmamaktadır. Ayrıca (11) ve (12) eşitliklerinin matematiksel yapı olarak cep hesap makinaları ve bilgisayarda programlamaya da son derece uygun olduğu EK-A da verilen BASIC program parçacığının kısalığından da bellidir.

KAYNAKLAR

/1/ Kahler, D., : Die Anwendung des Übergangsbogens im Ingenieurbau, VR 47/2, s.87-98, 1985

/2/ Kahler, D., : Stauchklotoide als Übergangsbogen in engen Ausfahrten, VR 51/2, s.116-124, 1989

/3/ Kasper, H., Shürba, W., Lorenz, H., : Die Klothoide als Trassierungs Element. Ferd. Dümmlers Verlag. Bonn, 1968.

/4/ Müller, : Ingenieur-Geodesie Verkehrsbau, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1984.

EK-A

```
1 INPUT "A=";A: INPUT "L=";L: INPUT "M=";M: INPUT "N=";N
2 Z = M + 1: P = -1: X = 0: Y = 0
3 FOR I = 1 TO N
4 T = 2 * I - 2: GOSUB 7: X = X + C / F
5 T = 2 * I - 1: GOSUB 7: Y = Y + C / F
6 NEXT I: PRINT X, Y: END
7 W = Z * T + 1: K = (P ^ (I - 1)) / W * L ^ W
8 C = K / (Z ^ T) / A ^ (Z * T): F = 1
9 FOR J = 2 TO T: F = F * J: NEXT J
10 RETURN
```