KARAYOLLARINDA DENGELEYEN DAİRE PROBLEMİ

Orhan BAYKAL
Olcay ÖZTAN

1. GİRİŞ

Karayollarımız sürekli bir gelişme içindedir. Bir yandan yeni yollar yapılırken diğer yandan mevcut yolların bakım ve onarımı sürdürülmektedir. Bunlara ek olarak, mevcut yolların standartlarını yükseltme çalışmaları da son yıllarda oldukça yoğunlaşmıştır.

Mevcut bir yolun standardını yükseltmek için yapılan çalışmalar arasında kurba yapıçaplarının büyütülmesi, eğimlerin düşürülmesi, yeni şeritler eklenerek yolun genişletilmesi, hemzemin kesişmelerin köprülü kavşaklara ya da alt-üst geçitlere dönüştürülmesi sayılabilir.

Standart yükseltmeye yönelik bir çalışmanın sağlıklı biçimde projelendirilebilmesi için, mevcut yolun yatay ve düşey geometrisinin çok iyi bilinmesi zorunludur. Aksi halde, projenin uygulanması sırasında önemli uyuşmazlıklar ve zorluklar ortaya çıkabilir.

Projesi bulunmayan mevcut yolun geometrisini belirlemenin tek yolu ölçmedir. Eski tarihli projelerin de kuşkuyla karşılanması gerekir; çünkü yapım sırasındaki aplikasyon hataları ile bakım ve onarım çalışmaları (asfaltlama, trafik çizgilerinin yenilenmesi v.d.) yolun geometrisini az, ya da çok değiştirmiş olabilir. Bu kuşkuyu ortadan kaldırmanın tek yolu, yine ölçme ile mevcut geometrinin belirlenmesidir.

Yapılacak proje, mevcut yolun kurbadaki bir bölümüne rastlıyorsa yatay geometriyi elde etmek için, mevcut kurbanın konumunun ve büyüklüğünün yeterli doğrulukta belirlenmesi gerekir. Bu yazıda, yapılan ölçmelerle yeterli sayıda noktasının koordinatları hesaplanan bir kurbanın konumunun (merkezinin koordinatlarının) ve büyüklüğünün (yarıçapının) belirlenmesi üstünde durulacak ve elden geldiğince basit hesap bağıntıları verilmeye çalışılacaktır.

2. ÖLÇMELERİN YAPILMASI

Çalışma bölgesi yakınında koordinatları bilinen güvenilir sabit noktalar varsa, bu noktalara bağlanan uygun bir poligon dizisi geçirilir, Sözü edilen güvenilir noktaların bulunamaması durumunda, en iyisi bir kapalı poligon dizisi oluşturmaktır.

Mevcut kurba üzerindeki detay noktaları yeterli sıklıkta (5-10 m aralıkla) alınmalı ve noktaların yerlerinin belirlenmesinde titiz davranılmalıdır. Mevcut yolun eksenini belirlemek ve detayları eksen kurbası üstünde almak, hem trafiğin engellenmesi, hem de yeni bir hata kaynağı oluşturması açısından sakıncalıdır. Bu bakımdan yolun her iki kenarı üstünde detay noktalarının alınması ve yol kenarlarına ait kurbaların belirlenmesi daha uygun olacaktır.

Detay ölçmeleri, tek poligon noktasından takeometrik yöntemle (burada elektronik takeometri söz konusudur), ya da iki poligon noktasından kestirme ile yapılabilir. Daha sonra, seçilen uygun bir yerel koordinat sisteminde detay noktalarının koordinatları hesaplanır. Böylece kurbaya ait n adet N_i noktasının

$$N_i \ (x_i \ ; \ y_i); \ i = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

koordinatları elde edilir.

N_i noktalarına en iyi uyan dairenin (dengeleyen dairenin) parametrelerinin (merkezinin koordinatlarının ve yarıçapının) belirlenmesinde, aşağıdaki çözüm yolları düşünülebilir:

1) Grafik çözüm,

2) Kombinasyon yöntemi,

3) $(x_i \ ; \ y_i)$ gözlemeleri ile yapılacak dengeleme hesabı,

4) Fonksiyon düzeltmelerine göre yapılacak dengeleme hesabı.

3. GRAFİK ÇÖZÜM

N_i noktaları, koordinatları yardımıyla mümkün olduğu kadar büyük ölçekte kağıt üzerine geçirilir. Bu noktalar, ikişer ikişer dairenin kirişlerini belirler. Herhangi iki kirişin orta dikmelerinin kesim noktası dairenin merkezidir. Birçok kiriş için bu kesiştirme yapılırsa daire merkezine ait bir noktalar yığını elde edilir. Bu yığının ağırlık noktası, dengeleyen dairenin merkezini verir. Daire merkezinin koordinatları grafik olarak plan üzerinden alınır.

Merkez belirlendikten sonra, dairenin yarıçapını elde etmek için, N_i noktalarına en iyi uyan daire yayı yine grafik yoldan araştırılır.

Planı elde etmek için ölçek yardımıyla bir küçültme işleminin ve buna ek olarak birçok çizim işleminin yapılması, yöntemin doğruluğunu fazlasıyla etkiler. Bu bakımdan sonucun yeterli olduğu kolayca savunulamaz. Hele büyük yarıçaplı kurbalarda grafik yönteme hiç bir zaman güvenmemek gerekir.

4. KOMBİNASYON YÖNTEMİ

Gözleme hataları ihmal edilerek, N_i noktalarının aranan daireye ait noktalar olduğu düşünülürse, bu noktalar ikişer ikişer birer daire kirişi belirler. Her bir kirişin orta dikmesinin denklemi, analitik geometri kurallarına göre kolaylıkla yazılabilir. Bu orta dikmelerden herhangi ikisi kesiştirilerek daire merkezinin koordinatları ve yarıçap hesaplanabilir.

Kiriş orta dikmelerinin kesişme yazısı, $N_i(x_i\ ;\ y_i)$; $(i = 1,\ldots\ldots,n)$ detay noktalarının sayısına bağlıdır. (4)'te bu sayı n'nin üçlü kombinasyonu olarak verilmiş ise de gerçekte olay çok daha karışıktır. Söz konusu kesişme sayısı

$$K = \frac{(n^2 - n)\ (n^2 - n - 2)}{8} \tag{4.1}$$

bağıntısından hesaplanır.

Tüm kesişmeler dikkate alınırsa M daire merkezinin koordinatları (X,Y) ve yarıçap (R) için K adet değer elde edilir;

$$M_j\ (X_j\ ;\ Y_j)\ ;\ R_j\ ;\ j = 1\ ,\ \ldots.,K \tag{4.2}$$

Bu değerlerin aritmetik ortalaması dengeleyen dairenin parametrelerini verir (4) ;

$$X = \sum_{j=1}^{K} X_j\ /K\ ;\ Y = \sum_{j=1}^{K} Y_j\ /K\ ;\ R = \sum_{j=1}^{K} R_j\ /K \tag{4.3}$$

(4.3) te tüm kesişmelerin dikkate alınması büyük sakıncalar doğurabilir. Bir jeodezik ağda hesaba başlamadan önce "kural dışı" hataya sahip gözlemelerin ayıklanması gerekir (6). Kombinasyon yönteminde, benzer nitelikteki kötü kesişmelerin ayıklanması çok daha fazla gerekli olmaktadır. Ancak bu işlem yapıldıktan sonra (4.3) bağıntıları grafik çözümden çok daha iyi sonuçlar verir (bak Bölüm 7).

Detay noktası sayısına bağlı olarak (4.1) den hesaplanan K nın büyük değerlere ulaşması ve kötü kesişmelerin ayıklanması zorunluluğu, kombinasyon yönteminin cep hesap makinalarına uygulanmasını olanaksız kılar. Yöntem, ancak, bir bilgisayar yardımıyla kullanılabilir. Bir kaç kesişmeden hesap yapılması ise oldukça yanıltıcı sonuçlar verebilir (bak Bölüm 7).

5. $(x_i\ ;\ y_i)$ GÖZLEMLERİ İLE DENGELEME

Dengeleyen daireyi belirlemenin en sağlıklı yolu, en küçük kareler yöntemine göre yapılacak dengeleme hesabıdır. Dengeleme hesabının en genel şekli, poligon ve detay ölçmelerinin önceden dengelenmesi, buradan elde edilecek varyanskovaryans matrisinin (ağırlık katsayılarının), daire parametrelerinin belirlenmesinde dikkate alınmasıdır (4). Fakat bu durumda hesabın boyutları çok büyür, ayrıca karayollarındaki uygulama açısından önemli bir değişiklik görülmez. Bu bakımdan

$$x_i \text{ (ağırlığı } p_{x_i}) \text{ ve } y_i \text{ (ağırlığı } p_{y_i}) \ ; \ i = 1,\ldots,n \qquad (5.1)$$

gözlemelerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayılacaktır(6). Gözlemelerin dengelenmiş değerleri

$$\bar{x}_i = x_i + v_{x_i} \ ; \ \bar{y}_i = y_i + v_{y_i} \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (5.2)$$

ve hesaplanacak parametreler (merkezin koordinatları ve yarıçap)

$$(X\ ;\ Y) \text{ ve } R, \qquad (5.3)$$

bilinen daire denklemini sağlamak zorundadır (Şekil 1) ;

$$F_i = (\bar{x}_i - X)^2 + (\bar{y}_i - Y)^2 - R^2 = 0\ ;\ i = 1\ ,\ \ldots,n \qquad (5.4)$$

(5.4) başlangıç şart denklemleri lineer değildir. Lineerleştirmeyi gerçekleştirmek için parametrelerin yaklaşık değerleri $(X_o\ ;Y_o\ ;R_o)$ gereklidir. (2) de yaklaşık değerlerin, ilk üç N_i detay noktasından, kombinasyon yönteminde açıklanan şekilde bulunabileceği söylenmektedir. Fakat bu durumda kötü kesişme ile karşılaşılabilir ve yaklaşık değerler, kesin değerlerden çok fazla uzaklaşabilir. Bunun önüne geçmek için yaklaşık değerler, grafik yöntemle veya kombinasyon yöntemiyle ve elden geldiğince çok kesişmeden bulunmalı, bu arada kötü kesişmeler dikkate alınmamalıdır.

Yaklaşık değerlerle kesin değerler arasında

$$X_o + \Delta X = X \ ; \quad Y_o + \Delta Y = Y \ ; \quad R_o + \Delta R = R \tag{5.5}$$

bağıntıları geçerlidir. (5.2) ve (5.5), (5.4) te yerine konursa

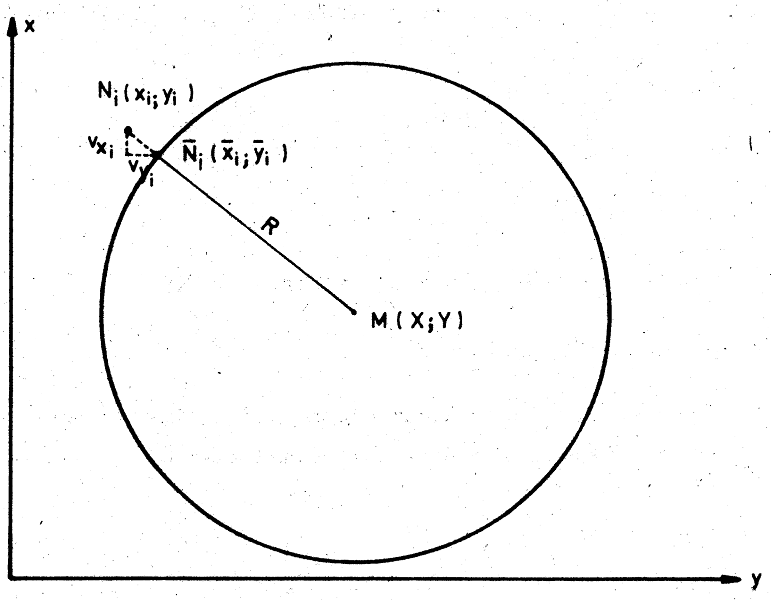
$$F_i = \{(x_i + v_{x_i}) - (X_o + \Delta X)\}^2 + \{(y_i + v_{y_i}) - (Y_o + \Delta Y)\}^2 - (R_o + \Delta R)^2 = 0 \tag{5.6}$$

$$i = 1 , \ldots , n$$

elde edilir. Lineerleştirmek için (5.6), (x_i ; y_i ; X_o ; Y_o ; R_o) yerinde Taylor Serisine açılır ve yalnızca birinci terimler dikkate alınırsa

$$(x_i - X_o)^2 + (y_i - y_o)^2 - R_o^2 + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} v_{x_i} + \frac{\partial F_i}{\partial y_i} v_{y_i} + \frac{\partial F_i}{\partial X_o}\Delta X + \frac{\partial F_i}{\partial Y_o}\Delta Y + \frac{\partial F_i}{\partial R_o}\Delta R = 0 \tag{5.7}$$

olur {2} ,{3} ,{6} .



Şekil 1 : (x_i ; y_i) gözlemleri ile dengeleme hesabının geometrik anlamı

Burada ;

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 2(x_i - X_o) = A_i \quad ; \quad \frac{\partial F_i}{\partial y_i} = 2(y_i - Y_o) = B_i$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial X_o} = -2(x_i - X_o) = C_i = A_i \quad ; \quad \frac{\partial F_i}{\partial Y_o} = 2(y_i - Y_o) = D_i = -B_i \qquad (5.8)$$

$$i = 1,\ldots\ldots,n$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial R_o} = -2R_o = E \; ; \; (x_i - X_o)^2 + (y_i - Y_o)^2 - R_o^2 = R_i^2 - R_o^2 = W_i$$

denirse (5.7) ve (5.8) den

$$F_i' = A_i \, v_{x_i} + B_i \, v_{y_i} + C_i \Delta X + D_i . \Delta Y + E . \Delta R + W_i = 0 \; ; \qquad (5.9)$$

$$i = 1 \, , \ldots\ldots , n$$

lineerleştirilmiş şart denklemleri elde edilir.

Bilinen $[P \; v \; v]$ = min şartı yanında (5.9) şart denklemleri de düşünülürse minimum fonksiyonu

$$S = \sum_{i=1}^{n} P_{x_i} . v_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} P_{y_i} . v_{y_i}^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} k_i . F_i' = \text{Min} \qquad (5.10)$$

veya Gauss notasyonunda

$$S = \left[P_x v_x v_x\right] + \left[P_y v_y v_y\right] - 2 \;\; k.F \;\; = \text{Min} \qquad (5.11)$$

olur. Burada k_i ler, korelatlardır.

(5.10), ya da (5.11)'in minimum olması için, düzeltmelere ve bilinmeyenlere göre kısmi türevleri sıfıra eşit olmalıdır:

$$\frac{\partial S}{\partial v_{x_i}} = 2P_{x_i} \, v_{x_i} - 2k_i \, A_i = 0 \rightarrow v_{x_i} = \frac{A_i}{P_{x_i}} k_i$$

$$i = 1, \ldots\ldots, n \qquad (5.12)$$

$$\frac{\partial S}{\partial v_{y_i}} = 2P_{y_i} \, v_{y_i} - 2k_i \, B_i = 0 \rightarrow v_{y_i} = \frac{B_i}{P_{y_i}} k_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta X} = -2k_1C_1-2k_2C_2 -\ldots-2k_nC_n = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_iC_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta Y} = -2k_1D_1-2k_2D_2 -\ldots-2k_nD_n = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_iD_i = 0 \qquad (5.13)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta R} = -2k_1E-2k_2E-\ldots-2k_nE=0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_iE = 0$$

(5.12), (5.9) da yerine konursa

$$F'_i = \left(\frac{A_i^2}{P_{x_i}} + \frac{B_i^2}{P_{y_i}}\right) k_i + C_i\ \Delta X+D_i\ \Delta Y+E\ \Delta R+W_i = 0\ ;\quad i=1,\ldots,n \qquad (5.14)$$

olur.

$$\frac{A_i^2}{P_{x_i}} + \frac{B_i^2}{P_{y_i}} = H_i\ ;\qquad i=1,\ldots,n \qquad (5.15)$$

ile (5.14) ten

$$-k_i = \frac{C_i}{H_i}\ \Delta X + \frac{D_i}{H_i}\ \Delta Y+\frac{E}{H_i}\ \Delta R+\frac{W_i}{H_i}\ ;\quad i=1,\ldots,n \qquad (5.16)$$

elde edilir. (5.16),(5.13) te yerine konarak aşağıdaki üç normal denkleme ulaşılır :

$$\Delta X. \sum_{i=1}^{n}\frac{C_i^2}{H_i} + \Delta Y \sum_{i=1}^{n}\frac{C_iD_i}{H_i} + \Delta R \sum_{i=1}^{n}\frac{C_iE}{H_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{C_iW_i}{H_i} = 0$$

$$\Delta X. \sum_{i=1}^{n}\frac{C_iD_i}{H_i} + \Delta Y \sum_{i=1}^{n}\frac{D_i^2}{H_i} + \Delta R \sum_{i=1}^{n}\frac{D_iE}{H_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{D_iW_i}{H_i} = 0 \qquad (5.17)$$

$$\Delta X. \sum_{i=1}^{n}\frac{C_iE}{H_i} + \Delta Y \sum_{i=1}^{n}\frac{D_iE}{H_i} + \Delta R \sum_{i=1}^{n}\frac{E^2}{H_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{EW_i}{H_i} = 0$$

(5.17) normal denklem takımının Gauss notasyonunda yazılışı şu şekildedir:

$$\left[\frac{C\ C}{H}\right]\Delta X+ \left[\frac{C\ D}{H}\right]\Delta Y+ \left[\frac{C\ E}{H}\right]\Delta R+ \left[\frac{C\ W}{H}\right] = 0$$

$$\left[\frac{C\ D}{H}\right]\Delta X+ \left[\frac{D\ D}{H}\right]\Delta Y+ \left[\frac{D\ E}{H}\right]\Delta R+ \left[\frac{D\ W}{H}\right] = 0 \qquad (5.18)$$

$$\left[\frac{C\ E}{H}\right]\Delta X+ \left[\frac{D\ E}{H}\right]\Delta Y+ \left[\frac{E\ E}{H}\right]\Delta R+ \left[\frac{E\ W}{H}\right] = 0$$

Özet olarak hesapta aşağıdaki yol izlenir {5} :

1) (5.8) den A_i, B_i, C_i, D_i, E, W_i ve (5.15) ten H_i değerlerinin hesabı ve (5.17) ye göre normal denklem katsayılarının oluşturulması,

2) (5.17) normal denklem takımının çözümünden ΔX, ΔY ve ΔR bilinmeyenlerinin ve (5.5)'ten dengeleyen daire parametrelerinin elde edilmesi,

3) (5.16) dan k_i korelatlarının hesabı,

4) (5.12) den v_{x_i} , v_{y_i} düzeltmelerinin hesabı,

5) (5.2) den dengelenmiş gözlemelerin hesabı,

6) Kontrol hesapları (en kesin kontrol, 5) ten bulunan değerlerin (5.4) te yerine konmasıyla yapılır.

7) Hata hesabı

İterasyon Hesabı : (5.6) bağıntısı, Taylor Serisine açılarak lineerleştirilirken, serinin yalnızca birinci terimleri alınmış, yüksek dereceden terimler ihmal edilmiştir. İhmal edilen terimler dengeleme sonucunu etkileyeceğinden hesabın bir kez yapılması yeterli olmaz. Bu durumda bilinmeyenlerin kesin değerlerine ulaşmak için iterasyon (ardışık yaklaşımlar) yöntemi uygulanır. İterasyon hesabında iki durum söz konusudur {1} :

A) Klasik Dengeleme : Birinci iterasyon sonunda elde edilen, bilinmeyenlerin dengelenmiş değerleri

$$X_o^{(1)} + \Delta X^{(1)} = X_o^{(2)} ; \quad Y_o^{(1)} + \Delta Y^{(1)} = Y_o^{(2)} ; \quad R_o^{(1)} + \Delta R^{(1)} = R_o^{(2)} \qquad (5.19)$$

ikinci iterasyon için yaklaşık değerler olarak kabul edilir. (5.6) fonksiyonu, ikinci iterasyonda (x_i ; y_i ; $X_o^{(2)}$; $Y_o^{(2)}$; $R_o^{(2)}$) yerinde seriye açılır. Diğer bir deyişle (5.8) ve (5.15) ten A_i, B_i, C_i, D_i, E, W_i ve H_i değerleri hesaplanırken, detay noktalarının x_i ; y_i verilen koordinatları ve bilinmeyenlerin, (5.19) dan bulunan yeni yaklaşık değerleri kullanılır. Böylece elde edilen (5.17) normal denklem takımı tekrar çözülür.
Sonuçta elde edilen

$$X_o^{(2)} + \Delta X^{(2)} = X_o^{(3)} ; \quad Y_o^{(2)} + \Delta Y^{(2)} = Y_o^{(3)} ; \quad R_o^{(2)} + \Delta R^{(2)} = R_o^{(3)} \qquad (5.20)$$

dengelenmiş değerleri, yaklaşık değerler kabul edilerek 3. iterasyon, benzer şekilde yapılır. Genel olarak, (m-1)'inci iterasyonda bulunan dengelenmiş parametreler m'inci iterasyonda yaklaşık değerler olarak kullanılırken $(x_i \; ; \; y_i)$ detay koordinatları, başlangıç değerlerini korumaktadır.

İterasyon sayısını sınırlamak için, ΔX ; ΔY ve ΔR bilinmeyenlerinin mutlak değerlerinin, pozitif olarak seçilen akla yakın küçüklükteki$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_r)$ değerlerinden küçük olması gerekir. Hesap,

$$|\Delta X^{(m)}| \leqslant \varepsilon_x \quad ; \quad |\Delta Y^{(m)}| \leqslant \varepsilon_y \; ; \; |\Delta R^{(m)}| \leqslant \varepsilon_r \qquad (5.21)$$

şartını sağlayan m'inci iterasyona kadar sürdürülür. Başlangıçtaki yaklaşık değerler kötü seçilmemişse, genellikle birkaç iterasyonda birkaç cm yaklaşıklıkla kesin sonuca varılır.

Her bir iterasyon için, yukarıda verilen hesap yolunun tümünü uygulamaya gerek yoktur. Ara iterasyonlarda yalnızca 1. ve 2. adımlar gereklidir (cep makinaları ile hesap yapılırken, hesap yanlışlığını önlemek için, dengeleme hesabından bilinen ara kontrollar mutlaka yapılmalıdır). Hesap yolundaki diğer adımlar, (5.21) şartı sağlandıktan sonra uygulanır.

B) Kesin Dengeleme : (5.6) bağıntısı lineerleştirilirken $(x_i \; ; \; y_i)$ koordinatlarına göre de türev alınmıştır. O halde detay noktalarının dengelenmiş koordinatları (v_{x_i} ; v_{y_i} düzeltmeleri) da bilinmeyen olarak düşünülmelidir. Bunun sonucu olarak (m-1) 'inci iterasyondan m'inci iterasyona geçilirken, (5.19) ve (5.20) bağıntıları yanında

$$\bar{x}_i^{(m-1)} = x_i^{(m-1)} + v_{x_i}^{(m-1)} = x_i^{(m)} \quad ; \quad \bar{y}_i^{(m-1)} = y_i^{(m-1)} + v_{y_i}^{(m-1)} = y_i^{(m)} \qquad (5.22)$$

dengelenmiş koordinatları da dikkate alınmalı, m'inci iterasyon için gerekli katsayılar, (5.19), (5.20) ve (5.22) oen bulunan değerlerle hesaplanmalıdır.

Birinci iterasyonda kesin ve klasik dengeleme arasında bir fark yoktur. Fakat 2.iterasyondan itibaren (5.22)'nin hesaba katılması ile, iki hesap yolu birbirinden ayrılır.

Kesin dengelemede iterasyon sınırı,

$$v_{x_i}^{(m)} \approx 0 \quad ; \quad v_{y_i}^{(m)} \approx 0 \qquad (5.23)$$

şartını sağlayan m'inci iterasyondur.

Kesin dengelemede her bir iterasyonda, verilen hesap yolunun ilk 5 adımının hesaplanması gerekir.

Teorik açıdan doğru olan kesin dengeleme hesabıdır. Fakat, mevcut kurba fazla deforme olmamışsa (v_{x_i} ; v_{y_i} düzeltmeleri büyük değerler almıyorsa), elde edilen sonuçlar açısından iki hesap yolu arasında uygulamayı etkileyecek bir fark yoktur {1} . Bu bakımdan daha az hesap yükü getiren klasik dengeleme tercih edilebilir.

Hata Hesabı : Ağırlığı bir olan gözlemenin karesel ortalama hatası

$$m_o = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (P_{x_i} v_{x_i}^2 + P_{y_i} v_{y_i}^2)}{n-3}} = \pm \sqrt{\frac{[p\,v\,v]_x + [p\,v\,v]_y}{n-3}} \qquad (5.24)$$

bağıntısından hesaplanır {6} Klasik dengelemede, (5.24) te hesaba girecek olan v_{x_i} ; v_{y_i} düzeltmeleri, son iterasyondan elde edilen değerlerdir. Kesin dengelemede ise bu düzeltmeler, son iterasyondan hesaplanan dengelenmiş detay koordinatları ile başlangıçta verilen detay koordinatlarının farkından elde edilir.

$$v_{x_i} = \bar{x}_i^{(m)} - x_i \quad ; \quad v_{y_i} = \bar{y}_i^{(m)} - y_i \qquad (5.25)$$

Hesaplanan daire parametrelerinin karesel ortalama hataları ise

$$m_X = \pm m_o \sqrt{Q_{XX}} \quad ; \quad m_Y = \pm m_o \sqrt{Q_{YY}} \quad ; \quad m_R = \pm m_o \sqrt{Q_{RR}} \qquad (5.26)$$

olur. Burada Q_{XX}, Q_{YY}, Q_{RR} ağırlık katsayıları, genişletilmiş normal denklem takımının Gauss algoritması ile çözümünden, ya da (5.17) normal denklemlerine ait katsayılar matrisinin inversi alınarak bulunur {2} ,{6}.

6. FONKSİYON DÜZELTMELERİ İLE DENGELEME

(5.4) daire denkleminde, $\bar{x}_i$; $\bar{y}_i$ dengelenmiş detay koordinatları yerine x_i ; y_i verilen koordinatları konursa $F_i = 0$ şartı sağlanamaz. Bu şartın sağlanması için V_i fonksiyon düzeltmelerinin dikkate alınması gerekir;

$$F_i = (x_i-X)^2+(y_i-Y)^2-R^2+V_i = 0, \qquad i=1,\ldots,n \qquad (6.1)$$

(6.1) den

$$-V_i = (x_i-X)^2+(y_i-Y)^2-R^2, \qquad i=1,\ldots,n \qquad (6.2)$$

düzeltme denklemleri elde edilir. Bundan sonra dengeleme hesabı,dolaylı gözlemlerle dengeleme kurallarına göre yürütülebilir{6}.

(6.2) düzeltme denklemlerini lineerleştirmek için, (5.5) bağıntısına uygun şekilde $(X_o;Y_o;R_o)$ yaklaşık değerleri bulunarak (6.2) de konur ve fonksiyon (X_o,Y_o,R_o) yerinde Taylor Serisine açılırsa

$$-V_i = C_i.\Delta X+D_i.\Delta Y+E.\Delta R+W_i \qquad i=1,\ldots,n \qquad (6.3)$$

lineerleştirilmiş düzeltme denklemleri elde edilir. Burada C_i,D_i, E ve W_i katsayıları (5.8) deki gibidir. Minimum fonksiyonu ise

$$S = \sum_{i=1}^{n} P_i V_i^2 = [P\,V\,V] = \text{Min} \qquad (6.4)$$

olur. (6.4) te P_i fonksiyon ağırlığı adını alır.$(x_i;y_i)$ detay koordinatlarına ait $(P_{x_i};P_{y_i})$ ağırlıkları verilmiş olduğuna göre, (6.1)'e hataların yayılması yasası uygulanırsa

$$\frac{1}{P_i} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)^2 \frac{1}{P_{x_i}} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right)^2 \frac{1}{P_{y_i}} = \frac{4(x_i-X_o)^2}{P_{x_i}} + \frac{4(y_i-Y_o)^2}{P_{y_i}} ; \qquad (6.5$$

$$i=1,\ldots,n$$

olur. Ayrıca (5.8) ve (5.15) bağıntılarından

$$P_i = \frac{1}{H_i} ; \qquad i=1,\ldots,n \qquad (6.6)$$

bulunur. (6.3) ve (6.6),(6.4) te yerine konarak

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{H_i} (C_i.\Delta X+D_i.\Delta Y+E.\Delta R+W_i)^2 = \text{Min} \qquad (6.7)$$

elde edilir. (6.7) nin ΔX, ΔY ve ΔR ye göre kısmi türevleri sıfıra eşit kılınırsa (5.17) normal denklem takımına varılır. Normal denklemlerin çözümü ΔX , ΔY ve ΔR yi verir.

Bu yöntemde de iterasyon gereklidir. Bitirilen iterasyondan elde edilen dengelenmiş daire parametreleri yeni iterasyonda yaklaşık değerler olarak kabul edilip (5.8) ve (5.15) ten gerekli katsayılar hesaplanır, $(x_i ; y_i)$ detay koordinatları sabit kalır. İterasyon sınırı için (5.21) bağıntıları geçerlidir. İterasyon hesabı bittikten sonra (6.3) ten V_i düzeltmeleri ve

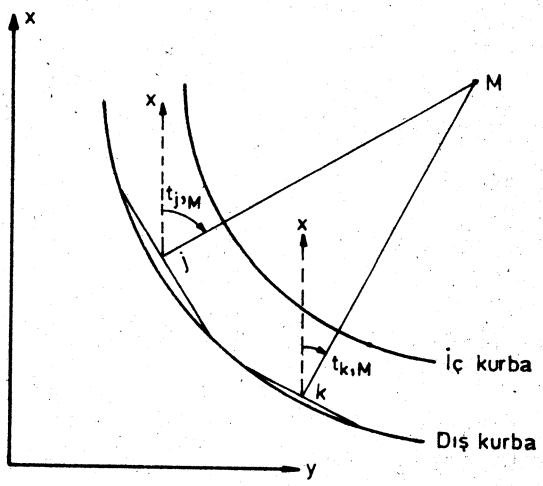
$$m_o = \pm \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i V_i^2}{n-3}} = \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{V\,V}{H}\right]}{n-3}} \qquad (6.8)$$

bağıntısından, ağırlığı bir olan gözlemenin karesel ortalama hatası hesaplanır. (6.8) deki H_i değerleri, son iterasyonda hesaplanan değerler olmalıdır. (5.26) bağıntıları burada da geçerlidir.

Yukarıda açıklanan hesap yöntemi, Bölüm 5 teki klasik dengelemeye karşılık gelir ve detay koordinatlarının dengelenmiş değerleri istenmiyorsa belbi bir hesap kolaylığı sağlar .Kesin dengelemede, her iterasyonda v_{x_i} ; v_{y_i} düzeltmelerinin bulunması gerektiğinden, bu hesap yöntemi Bölüm 5 teki ile özdeş olur.

7. ÖRNEK

KGM 1. Bölge Md.Ekspres Yollar Başmühendisliği ekiplerince ölçülüp detay koordinatları hesaplanan iki kurba örnek olarak alınmıştır (Şekil 2). Verilen detay koordinatları Çizelge 1 ve 2 de görülmektedir.



ŞEKİL 2 : Örnek kurbalar ve kombinasyon yönteminde kötü kesişmelerin ayıklanması

ÇİZELGE 1 : Dış Kurba Detay Koordinatları

Nokta No	Koordinatlar(m)	
	y_i	x_i
38	10116,4020	19083,4903
41	10124,1543	19077,2807
42	10132,0489	19070,9727
45	10139,9394	19064,8896
46	10147,4976	19058,9429
48	İ P T A L	
50	10163,8388	19046,7744
53	10171,8493	19040,7343
54	10180,1096	19034,6875
56	10185,8782	19030,5496
60	10194,4761	19024,3884
61	10202,8857	19018,5630
64	10210,9245	19013,1072
65	10219,2220	19007,5038
66	İ P T A L	
69	10235,7750	18996,4853
72	10244,2999	18991,0210
73	10252,7165	18985,7027

Nokta No	Koordinatlar(m)	
	y_i	x_i
76	10261,1506	18980,3909
77	10269,6591	18975,1574
80	10278,1253	18969,9837
81	10286,8996	18964,7276
84	10295,2507	18959,7268
85	10303,8710	18954,6831
88	10312,7825	18949,5940
89	10321,4856	18944,7123
92	10330,3114	18939,8276
93	10339,1114	18935,0507
96	10347,9955	18930,3018
97	10356,6392	18925,7500
100	10365,4263	18921,1691
101	10374,4810	18916,5656
104	10383,8240	18911,8460
105	İ P T A L	
108	10401,7483	18903,1511

ÇİZELGE 2: İç Kurba Detay Koordinatları

Nokta No	Koordinatlar(m)	
	y_i	x_i
39	10119,1828	19087,2279
40	10126,9730	19080,9113
43	10134,8043	19074,5920
44	10142,9044	19068,4589
47	10150,5745	19062,4597
49	İ P T A L	
51	10166,5606	19050,4769
52	10174,6257	19044,5370
55	10182,7532	19038,7075
58	10188,7197	19034,2382
59	10197,2983	19028,2232
62	10205,6206	19022,4278
63	10213,7135	19016,8466
66	10221,9669	19011,2133
67	10230,3623	19005,5350
70	10238,7710	19000,1164
71	10247,0661	18994,7900
74	10255,5215	18989,4235

Nokta No	Koordinatlar(m)	
	y_i	x_i
75	10263,9826	18984,1937
78	10272,4829	18978,9206
79	10281,0402	18973,7427
82	10289,5473	18968,6604
83	10298,1635	18963,5912
86	10306,8337	18958,5607
87	10315,5295	18953,6800
90	10324,2323	18948,7261
91	10333,0420	18943,9713
94	10341,7286	18939,1640
95	10350,5842	18934,4386
98	10359,4423	18929,8193
99	10368,3069	18925,1875
102	10377,2900	18920,5878
103	10386,1189	18916,1216
106	10395,0964	18911,7073
107	10404,0471	18907,2666

Grafik Çözüm : KGM 1.Bölge Md.Ekspres Yollar Başmühendisliği'nce yapılmış ve şu sonuçlar bulunmuştur.

Dış Kurba : X = 20192,1832 m ; Y = 11014,7829 m ; R_D = 1427,35 m

İç Kurba : X = 20192,1832 m ; Y = 11014,7829 m ; R_I = 1422,35 m

Sonuçlardan anlaşıldığına göre grafik çözüm, kurbalardan yalnız biri için yapılmış, bulunan merkez noktasının koordinatları sabit tutulup yol genişliği 5 m alınarak diğer kurba belirlenmiştir.

Kombinasyon Yöntemiyle Çözüm : Yalnızca çizelge 2 de detay koordinatları verilen iç kurba için hesap yapılmıştır. Detay noktası sayısı n = 34 olduğuna göre kesişme sayısı (4.1) den K = 157080 bulunur.

Kötü kesişmelerin ayıklanmasında, kesiştirilen herhangi iki yarıçap doğrultusunun açıklık açılarının tanjantları arasındaki fark, kötü kesişme kriteri olarak seçilmiştir. Söz konusu açıklık açıları $t_{j,M}$, $t_{k,M}$ olduğuna göre (Şekil 2),

$$|\tan t_{j,M} - \tan t_{k,M}| = |m_1 - m_2| = \Delta m \qquad (7.1)$$

farkları her kesişme için oluşturulmuştur. Ayrıca bir Δm_s sınır değeri seçilmiş ve

$$\Delta m \leqslant \Delta m_s \qquad (7.2)$$

şartını sağlayan kesişmeler, kurba parametrelerinin hesabına sokulmamıştır. Δm_s sınır değerinin değiştirilmesiyle parametrelerin ne şekilde değiştiği Çizelge 3 de görülmektedir.

Çizelge 3'ün incelemesinden şu sonuçlara varılabilir :

1) Kötü kesişmelerin yeterince ayıklanmaması (ilk üç satır), ya da çok az kesişme ile hesap yapılması (son üç satır) halinde çok kaba değerler elde edilir (dengeleme sonuçları ile karşılaştırın).

2) Dengeleme sonuçları ile karşılaştırıldığında en iyi sonucun Δm_s = 0,007 ye karşılık geldiği görülmektedir. Fakat, kötü kesişmelerin durumu detay noktası sıklığına,detay noktası koordinatlarındaki gözleme hatalarına, kurba yarıçapına bağlı olduğundan, en iyi çözüme karşılık gelen Δm_s için kesin bir değer verilemez. Çizelge 3'te kesikli çizgiler arasında kalan tüm çözümler,kombinasyon yönteminden beklenen doğruluğu sağlamaktadır.

ÇİZELGE 3 : Kombinasyon Yöntemi ile Çözüm (İç Kurba)

Δm_s	Hesaba Soku-lan Kesişme Sayısı	Hesaba Sokul-mayan Kesişme Sayısı	X (m)	Y (m)	R (m)
0,00001	157061	19	20210,36750	11025,89520	1537,62719
0,0001	156877	203	197,41895	17,65653	1479,24799
0,001	155506	1574	204,91376	22,17806	1450,51945
0,004	152733	4347	206,85258	23,43423	1441,86751
0,007	148296	8784	207,58210	23,88020	1441,10101
0,010	144394	12686	206,24220	23,04867	1439,16109
0,015	138086	18994	206,23828	23,08961	1438,90886
0,020	131851	25229	206,13664	23,08001	1438,70903
0,030	119599	37481	205,81000	22,91186	1438,27542
0,040	107714	49366	205,52531	22,92883	1437,98694
0,050	96266	60814	205,36399	22,95696	1437,86169
0,060	85351	71729	205,30415	23,05558	1437,86104
0,070	75036	82044	205,15293	23,10116	1437,75582
0,080	65337	91743	205,03934	23,17723	1437,70012
0,090	56453	100627	205,02476	23,32735	1437,76917
0,100	48259	108821	204,97457	23,46761	1437,80442
0,200	5193	151887	208,57904	27,76966	1443,27248
0,300	33	157047	192,12474	25,32026	1428,93413
0,310	13	157067	196,97443	29,10323	1435,08474
0,315	4	157076	180,92501	15,71451	1414,18401

C) Dengeleme Hesabıyla Kesin Çözüm : Çizelge 1 ve Çizelge 2 de detay noktalarının koordinatları verilen dış ve iç kurbaya, Bölüm 5 te açıklanan klasik dengeleme hesabı uygulanmış ve aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur. Her iki kurba için birinci iterasyonda parametrelerin yaklaşık değerleri olarak grafik çözüm sonuçları alınmış, ayrıca tüm hesaplarda

$P_{x_i} = P_{y_i} = 1$ kabul edilmiştir.

İç Kurba Hesabı 1. iterasyon

Parametrelerin yaklaşık değerleri :

$X_o^{(1)} = 20192,1832$ m ; $Y_o^{(1)} = 11014,7829$ m ;

$R_o^{(1)} = 1427,35$ m

Normal denklemler :

$$24,32534569\ \Delta X + 15,15643524\ \Delta Y - 28,83131974\ \Delta R - 143,34001348 = 0$$

$$9,67465431\ \Delta Y - 18,08789020\ \Delta R - 90,00913948 = 0$$

$$34,23857371\ \Delta R + 170,26409394 = 0$$

Hesaplanan bilinmeyenler ve parametreler :

$\Delta X^{(1)} = +\ 14{,}97001\ m$; $\Delta Y^{(1)} = +\ 9{,}92363\ m$; $\Delta R^{(1)} = +12{,}875499\ m$

$X^{(1)} = 20207{,}15321\ m$; $Y^{(1)} = 11024{,}70653\ m$; $R^{(1)} = 1440{,}225499\ m$

İç Kurba Hesabı 2. iterasyon

Parametrelerin yaklaşık değerleri :

$X_o^{(2)} = X^{(1)} = 20207{,}15321\ m$; $Y_o^{(2)} = Y^{(1)} = 11024{,}70653\ m$;

$$R_o^{(2)} = R^{(1)} = 1440{,}225499\ m$$

Normal Denklemler

$$\begin{aligned} 24.31765392\ \Delta X + 15.16470167\ \Delta Y - 28.72574978\ \Delta R + 1.56361483 &= 0 \\ 9.68234608\ \Delta Y - 18.03410089\ \Delta R + 0.98163458 &= 0 \\ 33.99743018\ \Delta R - 1.85056212 &= 0 \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Hesaplanan bilinmeyenler ve parametreler :

$$\Delta X^{(2)} = +\ 0{,}00076568\ m \ ;\ \Delta Y^{(2)} = +\ 0{,}00052493\ m \ ;\ \Delta R^{(2)} = +\ 0{,}05535782\ m \qquad (7.4)$$

$$X^{(2)} = 20207{,}15398\ m \ ;\ Y^{(2)} = 11024{,}70745\ m \ ;\ R^{(2)} = 1440{,}280857\ m \qquad (7.5$$

Bilinmeyenlerin (7.4) te verilen büyüklükleri, (5.21) bağıntısı uyarınca yeterli görülmüş ve 3.iterasyon yapılmamıştır. Bu durumda (7.5) te verilen değerler, iç kurbanın kesin parametreleridir.

İç kurba hata hesabı : (7.3) normal denklem takımının inversi alınmış ve aşağıdaki ağırlık katsayıları bulunmuştur :

$Q_{XX} = 4427{,}82$ $\quad Q_{XY} = 2785{,}22$ $\quad Q_{XR} = 5218{,}67$

$Q_{YY} = 1760{,}59$ $\quad Q_{YR} = 3287{,}24$

$Q_{RR} = 6153{,}22$

Bölüm 5 te verilen hesap yolu izlenerek v_{x_i} , v_{y_i} , düzeltmeleri hesaplanmış ve $p_{x_i} = p_{x_i} = 1$ alındığından

$\left[v_x v_x\right] + \left[v_y v_y\right] = 0.1633461$ bulunmuştur. Buna göre ağırlığı bir olan gözlemenin (herhangi bir x_i , ya da y_i koordinatlarının) karesel ortalama hatası, (5.24) bağıntısından hesaplanmıştır ;

$$m_{x_i} = m_{y_i} = m_o = \pm\sqrt{\frac{0.1633461}{34-3}} = \pm 0.07259$$

(5.26) bağıntısı uyarınca, kesin daire parametrelerinin karesel ortalama hataları için

$$m_X = \pm\ 0{,}07259\ \sqrt{4427{,}82} = \pm\ 4{,}8303\ \text{m}$$

$$m_Y = \pm\ 0{,}07259\ \sqrt{1760{,}59} = \pm\ 3{,}0458\ \text{m}$$

$$m_R = \pm\ 0{,}07259\ \sqrt{6153{,}22} = \pm\ 5.6941\ \text{m}$$

değerleri elde edilmiştir.

Dış kurba hesabı 1.iterasyon

Parametrelerin yaklaşık değerleri :

$X_o^{(1)} = 20192{,}1832$ m ; $Y_o^{(1)} = 11014{,}7829$ m ;

$R_o^{(1)} = 1422{,}35$ m

Normal denklemler :

$$23{,}62809871\ \Delta X + 14{,}69632503\ \Delta Y - 27{,}80296993\ \Delta R + 132{,}03251337 = 0$$
$$9{,}37190129\ \Delta Y - 17{,}41612416\ \Delta R + 82{,}49605228 = 0$$
$$32{,}78126177\ \Delta R - 155{,}56116126 = 0$$

Hesaplanan bilinmeyenler ve parametreler :

$\Delta X^{(1)} = -\ 1.989348$ m ; $\Delta Y^{(1)} = +\ 0{,}015937$ m ; $\Delta R^{(1)} = +\ 3{,}066659$ m

$X^{(1)} = 20190{,}19385$ m ; $Y^{(1)} = 11014{,}79884$ m ; $R^{(1)} = 1425{,}41666$ m

Dış kurba hesabı 2. iterasyon

Parametrelerin yaklaşık değerleri :

$X_o^{(2)}=X^{(1)}=20190,19385$ m ; $Y_o^{(2)}=Y^{(1)}=11014,79884$ m ; $R_o^{(2)}=R^{(1)}=1425,41666$ m

Normal denklemler :

$$\begin{aligned}23,60592320\,\Delta X + 14,70662786\,\Delta Y - 27,88242799\,\Delta R - 0,05331230 &= 0\\ 9,39407680\,\Delta Y - 17,49482093\,\Delta R - 0,03345157 &= 0\\ 33,00008853\,\Delta R + 0,06309810 &= 0\end{aligned} \qquad (7.6)$$

Hesaplanan bilinmeyenler :

$\Delta X^{(2)} = -\,0,0010565$ m ; $\Delta Y^{(2)} = -\,0,00066131$ m ;

$\Delta R^{(2)} = -\,0,00315533$ m

(5.21) e göre 3. iterasyona gerek yoktur.

Dış kurbanın kesin parametreleri :

$X^{(2)} = 20190,19279$ m ; $Y^{(2)} = 11014,79818$ m ;

$R^{(2)} = 1425,413505$ m

Dış kurba hata hesabı

(7.6) normal denklem takımının inversi :

$Q_{XX} = 4217,75$ $Q_{XY} = 2655,06$ $Q_{XR} = 4987,81$

$Q_{YY} = 1679,75$ $Q_{YR} = 3144,28$

$Q_{RR} = 5900,88$

$[v_x v_x] + [v_y v_y] = 0.4821233$; $P_{x_i} = P_{y_i} = 1$

Ağırlığı bir olan gözlemenin karesel ortalama hatası :

$$m_{x_i} = m_{y_i} = m_o = \pm\sqrt{\frac{0,4821233}{33-3}} = \pm\,0,12677 \text{ m}$$

Kesin daire parametrelerinin karesel ortalama hataları :

$m_X = \pm\,0,12677\sqrt{4217,75} = \pm\,8,2330$ m

$m_Y = \pm\,0,12677\sqrt{1679,75} = \pm\,5,1756$ m

$m_R = \pm\,0,12677\sqrt{5900,88} = \pm\,9,7381$ m

8. SONUÇ

Dengeleyen daire parametrelerinin bulunmasında söz konusu olan y lerden grafik çözüm, verdiği sonuçlar bakımından yeterli değildir. Komb yon yöntemi birkaç metre yaklaşıklıkla parametrelerin bulunmasına yetmek dir. Fakat, hesap yükünün fazla oluşu yöntemi kullanışsız kılar. En kesin ve doğru çözüme dengeleme hesabıyla ulaşılabilir ; ayrıca hata hesabı yapı larak doğruluk kriterleri elde edilebilir.

Örnekte görüldüğü gibi, iç ve dış kurbanın merkezleri çakışmamaktadır Yapım sırasındaki aplikasyon hataları, bakım ve onarım çalışmalarından ile ri gelen deformasyonlar, x_i ; y_i koordinatlarının hesabında kullanılan ölçmelerdeki hatalar düşünülürse bu sonuç son derece doğaldır ve mevcut yo lun en doğru geometrisi budur. İç ve dış kurbaların birbirine paralel olma sı (merkezlerinin çakışması) istenirse, dengeleme hesabı yapılırken her ik kurbanın birlikte düşünülmesi gerekir.

Örnekteki gibi, kurba yay uzunluğu, tüm daire yay uzunluğuna oranla çok küçük olursa hastalıklı normal denklemlerle karşılaşılır. Bu durumda tüm hesaplar, elden geldiğince çok ondalık kesir alınarak yapılmaktadır.

KAYNAKLAR

/1/ Bopp,H., Krauss,H. : Strenge oder herkömmliche bedingte Ausgleichung mit Unbekannten bei nichtlinearen Bedingungsgleichungen , AVN, Heft 1, 1978, s.27-31.

/2/ Brandt,S. : Datenanalyse, Mannheim, Wien, Zürich, Bibliographisches Institut, 1981.

/3/ Capanov, Ch. : Über einen besonderen Fall der Kreisausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate,Sch.ZfV, 1957, s.270-276 ve 295-299

/4/ Heister, H.,Und Welsch W. : Kritische Betrachtung verschiedener Methoden zur Kreisausgleichung bei Ingenieurvermessungen, AVN, 1973, s.264-272.

/5/ Şener,T.N. : Dengeleyen Daire, İTÜ Jeodezi ve Fotogrametri Müh.Bl.Bitirme Ödevi, İstanbul, 1983 (yayınlanmadı).

/6/ Wolf, H. : Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Bonn, Ferd. Dümmlers Verlag, 1968.