

## KALİBRASYON BAZI DENGELİMESİNDE FONKSİYONEL MODEL TESTİ

Osman YANIÇOĞLU

### ÜZET

Genişletilmiş fonksiyonel modelle yapılan kalibrasyon bazı dengelime-  
sinde hesaplanan ek parametrelerin ( $C$  ve  $S$ ), belirli bir güven aralığında  
anlamı olup olmadıkları istatistik testlerle incelenmiştir. Genişletilmiş  
fonksiyonel model "F" testiyle, ek parametreler "t" testiyle analiz edil-  
miştir. Yapılan istatistiksel analiz sonunda, test edilen elektromanyetik  
kenar ölçer (EDMI)'de ölçek hatası ( $S$ ) olduğu saptanmıştır.

Dengeleme modeli ile genişletilmiş fonksiyonel modelin test adımları  
2 nci bölümde, Harita Genel Komutanlığı kalibrasyon bazının durumu 3 ncü  
bölümde, kalibrasyon bazında yapılan ölçüler ve apriori istatistik test-  
ler 4 ncü bölümde açıklanmıştır. 5 ncü bölümde, 4 ayrı fonksiyonel modelle  
yapılan dengeleme ve istatistiksel analiz sonuçları sergilenmiştir.

### 1. GİRİŞ

Jeodezide ölçülebilen büyüklüklerden olan kenarlar, nirengi ağlarına  
ölçek vermek amacıyla ölçülmektedir. Yirminci yüzyılın ilk yarısına kadar  
standart uzunluklarda kalibre edilmiş invar tel ve/veya çelik şeritlerle  
ölçülen kenarlar, 1950 lerin sonundan itibaren elektromanyetik kenar ölçme  
aletleriyle (EDMI) ölçülmektedir. Kenarların ölçülmesinde elektromanyetik  
kenar ölçme (EDM) aletlerinin kullanılması, EDM aletlerinin ölçme doğruluk-  
larının belirlenmesi konusunu gündeme getirmiştir.

EDM aletlerinin ölçme doğruluklarının belirlenmesine "EDM Aletlerinin  
Kalibrasyonu" ismi verilmektedir. EDM aletlerinin kalibrasyonu terimi, alet-  
in toplam kayıklık(alet kayıklığı + prizma kayıklığı), ölçek hatası ve faz  
farkı ölçme hatasının belirlenmesini kapsamaktadır. EDM aletlerinin ölçme  
doğrulukları, labratuarda ve/veya arazide özel olarak tesis edilmiş kalib-  
rasyon bazlarında yapılan ölçülerden yararlanarak belirlenebilmektedir. Ka-  
librasyon bazında yapılan ölçülerden yararlanarak EDM aletlerinin kalibre  
edilmesi için en iyi yol, ek parametrelî en küçük kareler dengeleme yönte-  
minin kullanılmasıdır. Bu yöntemle, EDM aletlerinin genellikle toplam kayık-

liği (offset) veya ölçek hatası (scale) veya hem toplam kayıklığı hem de ölçek hatası belirlenmektedir.

En küçük kareler yöntemiyle belirlenen toplam kayıklık ( $C$ ) ve/veya ölçek hatası ( $S$ )'nın belirli bir güven aralığında istatistiksel olarak anlamı olup olmadığıının saptanması, kalibrasyon bazı denelemede kullanılan genişletilmiş fonksiyonel modelin test edilmesi anlamına da gelmektedir.

## 2. DENELEME MODELİ

Denelemenin matematiksel modeli, fonksiyonel ve stokastik model olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Denelemenin fonksiyonel modeli, lineerleştirilmiş gözlem denklemleri olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\tilde{\underline{x}} = \underline{A}_{\underline{x}} \tilde{\underline{x}}, \quad (2.1)$$

$\tilde{\underline{x}}$  : Gözlem vektörü  $\underline{x}$ 'nin model değeri

$\tilde{\underline{x}}$  : Bilinmiyen vektörü  $\underline{x}$ 'in model değeri

$\underline{A}_{\underline{x}}$  : Katsayı matrisi

Denelemenin stokastik modeli, gözlem vektörü  $\underline{x}$ 'nin stokastik yapısını belirlemekte ve iki bölümden oluşturmaktadır./6/ Birinci bölümü, sistematik hatalardan arındırılmış (unbiased) gözlemleri içermektedir.

$$E(\underline{x}) = \underline{\mu}_{\underline{x}} = \tilde{\underline{x}} \quad (2.2)$$

$\underline{\mu}_{\underline{x}}$  : Gözlem vektörü  $\underline{x}$ 'nin umut değeri.

Stokastik modelin ikinci bölümü, gözlem vektörü  $\underline{x}$ 'nin varyans-kovaryans ( $K_{\underline{x}\underline{x}}$ ) matrisidir. Gözlemlerin varyans-kovaryans matrisi ( $K_{\underline{x}\underline{x}}$ ), rastgele dağılmış gözlem farklarının ( $\underline{\epsilon}$ ) stokastik davranışını tanımlamaktadır.

$$\underline{\epsilon} = \underline{x} - \underline{\mu}_{\underline{x}} \quad (2.3)$$

$$K_{\underline{x}\underline{x}} = E(\underline{\epsilon}\underline{\epsilon}^T) = \sigma_o^2 Q_{\underline{x}\underline{x}} = \sigma_o^2 P^{-1} \quad (2.4)$$

$Q_{\underline{x}\underline{x}}$  :  $\underline{x}$ 'nin kofaktör matrisi veya ters ağırlık matrisi

$P$  : Ağırlık matrisi

$\sigma_o^2$  : Birim ağırlıklı ölçünün apriori varyansı

Eğer deneleme modeli doğru olarak belirlenirse ve gözlemlerde sistematik hata yoksa (2.2) aşağıdaki denklemler elde edilir:

Normal Denklemler :

$$N_{xx} \hat{x} - n_x = 0 \quad (2.5)$$

$$N_{xx} = A_x^T P A_x$$

$$n_x = A_x^T P \underline{\lambda}$$

$$Q_{xx} = N_{xx}^{-1}$$

(2.6)

Cözüm :

$$\hat{x} = Q_{xx} n_x \quad (2.7)$$

$\hat{x}$  : Bilinmeyen vektörü  $x'$  in kestirilen değeri

Gözlem denklemleri :

$$\hat{\lambda} = \underline{\lambda} + v = A_x \hat{x} \quad (2.8)$$

Düzelme vektörü :

$$v = A_x \hat{x} - \underline{\lambda} \quad (2.9)$$

Düzeltmeler, kofaktör matrisi

$$Q_{vv} = Q_{\lambda\lambda} - A Q_{xx} A^T \quad (2.10)$$

Eğer gözlemlerde sistematik ölçü hataları (bias) varsa, denelemenin stokastik modelinde (2.2) hata yapıldığı kabul edilmektedir. Bu durumda, sistematik ölçü hataları, gözlem değerlerindeki belirli bir hatayı veya bozucu parametrelerin etkisini temsil etmektedir./6/.

$$E(\underline{\lambda}) = \mu_{\underline{\lambda}} = \tilde{\underline{\lambda}} + \Delta_{\underline{\lambda}} \quad (2.11)$$

$\Delta_{\underline{\lambda}}$  : Sistematik ölçü hatalı vektörü

$$\Delta_{\underline{\lambda}} = A_y \tilde{y} \quad (2.12)$$

$\tilde{y}$  : Bozucu parametre vektörü (m sayıda)

$A_y$  : Bozucu parametrelerin etki (katsayı) matrisi

Sistematik ölçü hatalı vektörünün (2.1) ve (2.2) ye eklenmesiyle ve (2.11) inde dikkate alınmasıyla genişletilmiş model elde edilir.

$$E(\underline{\lambda}) = \mu_{\underline{\lambda}} = \tilde{\underline{\lambda}} + \Delta_{\underline{\lambda}} = A_x \hat{x} + A_y \tilde{y} \quad (2.13)$$

## 2.1 GENİŞLETİLMİŞ DENELEME MODELİYLE BOZUCU PARAMETRELERİN KESTİRİMİ

Bozucu parametreler(y), kural olarak rastgele değişken olarak kabul edilmektedir./6/.

$$E(\underline{y}) = \underline{\mu}_y = 0 \quad (2.1.1)$$

$\underline{\mu}_y$  : Bozucu parametrelerin ( $y$ ) umut değeri

$$\underline{K}_{yy} = E(yy^T) = \sigma_o^2 Q_{yy} \quad (2.1.2)$$

$\underline{K}_{yy}$ : Bozucu parametrelere varyans-kovaryans matrisi

Eğer bozucu parametrelerin varyans-kovaryans matrisi ( $\underline{K}_{yy}$ ) ve gözlemler üzerindeki etkisini belirten katsayılar matrisi ( $A_y$ ) biliniyorsa, 2.13'e göre genişletilmiş gözlem denklemleri yazılabilir.

$$\underline{\ell} + \underline{y} = A_x \hat{\underline{x}} + A_y \hat{\underline{y}} \quad (2.1.3)$$

Gözlemlerin ( $\underline{\ell}$ ) ve bozucu parametrelerin ( $y$ ) varyans-kovaryans matrislerinin birleştirilmesiyle genişletilmiş bir stokastik model elde edilir.

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} K_{\ell\ell} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & K_{yy} \end{bmatrix} = \sigma_o^2 \begin{bmatrix} Q_{\ell\ell} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & Q_{yy} \end{bmatrix} = \sigma_o^2 \begin{bmatrix} P & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & P_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.1.4)$$

(2.1.3) ve (2.1.4), (2.5) de yerine konarak normal denklemler elde edilir.

$$\begin{bmatrix} A_x^T P A_x & \dots & A_x^T P \underline{\ell} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_y^T P A_x & A_y^T P \underline{\ell} + P_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}} \\ \dots \\ \hat{\underline{y}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_x^T P \underline{\ell} \\ \dots \\ A_y^T P \underline{\ell} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.5)$$

Normal Denklemlerin kısaltılmış gösterimi :

$$\begin{bmatrix} N_{xx} & \dots & N_{xy} \\ \dots & \dots & \dots \\ N_{yx} & \dots & N_{yy} + P_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}} \\ \dots \\ \hat{\underline{y}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_x \\ \dots \\ n_y \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.6)$$

(2.1.6) denkleminin çözümü :

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{x}} \\ \dots \\ \hat{\underline{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{xx} & \dots & N_{xy} \\ \dots & \dots & \dots \\ N_{yx} & \dots & N_{yy} + P_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_x \\ \dots \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & \dots & Q_{xy} \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{yx} & \dots & Q_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ \dots \\ n_y \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

Blok matrislerin bilinen invers kuralıyla/5/:

$$\begin{aligned}
 Q_{xx} &= (N_{xx} - N_{xy}(N_{yy} + P_{yy})^{-1} N_{yx})^{-1} \\
 Q_{xy} &= -Q_{xx} N_{xy}(N_{yy} + P_{yy})^{-1} \\
 Q_{yx} &= - (N_{yy} + P_{yy})^{-1} N_{yx} Q_{xx} \\
 Q_{yy} &= (N_{yy} + P_{yy})^{-1} + (N_{yy} + P_{yy})^{-1} N_{yx} Q_{xx} N_{xy}(N_{yy} + P_{yy})^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

bulunur.

**Çözüm :**

$$\underline{x} = Q_{xx} \underline{n}_x + Q_{xy} \underline{n}_y = Q_{xx} (\underline{n}_x - N_{xy}(N_{yy} + P_{yy})^{-1} \underline{n}_y) \tag{2.1.8}$$

$\underline{x}$  : Bilinmeyen vektörü

$$\underline{y} = Q_{yx} \underline{n}_x + Q_{yy} \underline{n}_y = Q_{yy} (\underline{n}_y - N_{yx} N_{xx}^{-1} \underline{n}_x) \tag{2.1.9}$$

$\hat{y}$  : Bozucu parametre vektörü

Düzelme vektörü

$$\underline{v} = A_x \underline{x} + A_y \hat{y} - \underline{\ell} \tag{2.1.10}$$

Birim ağırlığın deneysel varyansı :

$$S_o^2 = \frac{\underline{v}^T P \underline{v} + \hat{y}^T P_{yy} \hat{y}}{n - u} \tag{2.1.11}$$

n : Ölçü sayıısı

u :  $\underline{x}$  bilinmeyen vektöründeki parametre sayısı

Bozucu parametrelerin ( $y$ ) ölçülere olan etkisi bilindiginde veya başka bir deyişle bozucu parametrelerin katsayılar matrisi ( $A_y$ ) bilindiginde ve ayrıca bozucu parametrelerin varyans-kovaryans matrisi ( $K_{yy}$ ) tahmin edildiginde yukarıdaki çözüm uygulanabilir. Genellikle bozucu parametrelerin varyans-kovaryans matrisinin belirlenmesi çok zordur. Bozucu parametrelerin katsayılar matrisi bilindiginde, fakat stokastik durumu hakkında bilgi edinemedeninde özel bir durum ortaya çıkar. Stokastik modellarındaki bilgi eksikliği özel bir apriori varyans-kovaryans matrisiyle giderilebilmektedir.  
/6/.

$$K_{yy} = \infty \downarrow \tag{2.1.12}$$

Bu özel durumda (2.1.4) deki ağırlık matrisi;

$$\underline{P}_{yy} = \underline{0} \text{ olur} \quad (2.1.13)$$

Bu ağırlık matrisi (2.1.7)'de yerine konursa;

$$\begin{aligned}\underline{Q}_{xx} &= (\underline{N}_{xx} - \underline{N}_{xy} \underline{N}_{yy}^{-1} \underline{N}_{yx})^{-1} \\ \underline{Q}_{xy} &= - \underline{Q}_{xx} \underline{N}_{xy} \underline{N}_{yy}^{-1} \\ \underline{Q}_{yx} &= - \underline{N}_{yy}^{-1} \underline{N}_{yx} \underline{Q}_{xx}\end{aligned}\quad (2.1.14)$$

$$\underline{Q}_{yy} = \underline{N}_{yy}^{-1} + \underline{N}_{yy}^{-1} \underline{N}_{yx} \underline{Q}_{xx} \underline{N}_{xy} \underline{N}_{yy}^{-1}$$

Çözüm ;

$$\hat{\underline{x}} = \underline{Q}_{xx} \underline{n}_x + \underline{Q}_{xy} \underline{n}_y \quad (2.1.15)$$

$$\hat{\underline{y}} = \underline{Q}_{yx} \underline{n}_x + \underline{Q}_{yy} \underline{n}_y \quad (2.1.16)$$

Düzelme vektörü ;

$$\underline{v} = \underline{A}_x \hat{\underline{x}} + \underline{A}_y \hat{\underline{y}} - \underline{\delta} \quad (2.1.17)$$

Birim ağırlığın deneysel varyansı

$$m_o^2 = \frac{\underline{v}^T \underline{P} \underline{v}}{n - u} \quad (2.1.18)$$

n : Ölçü sayısı

u :  $\underline{x}$  vektöründeki bilinmiyen sayısı

## 2.2 GENİŞLETİLMİŞ FONKSİYONEL MODELİN TESTİ

Genişletilmiş deneleme modelinin stokastik modeli (2.1.12)'de özel olarak tanımlandığından sadece fonksiyonel modeli genişletilmiş olmaktadır. Bu durumda, genişletilmiş fonksiyonel modelin testi, bozucu parametrenin(y) ölçü vektöründe ( $\underline{\delta}$ ) sistematik hataya ( $\Delta$ ) neden olup olmadığını kanıtlanmasıyla aynı anlama gelmektedir. Başka bir deyişle, fonksiyonel modelin genişletilmesinin anlamlı olup olmadığı, bozucu parametrelerin (y) anlamlılık testiyle belirlenebilir.

Bozucu parametreler rastgele değişkenler (2.1.1) olarak kabul edildiğinden ;

Sıfır hipotezi :

$$H_0 : \hat{y} = 0 \quad (2.2.1)$$

Alternatif hipotezle :

$$H_A : \hat{y} \neq 0 \text{ karşılaştırılır.} \quad (2.2.2)$$

$H_0$  hipotezi uygulandığında ;

$$\frac{\hat{y}^T Q_{yy}^{-1} \hat{y}}{\frac{m}{m_o^2}} \text{ değeri} \quad (2.2.3)$$

Fisher ( $F_{m,f}$ ) dağılımı gösterir.

m : Bozucu parametre sayısı

f = (n-u) : Serbestlik derecesi

n : Ölçü sayısı

u :  $\hat{x}$  Vektöründeki biliinmiyen sayısı

Eğer, (2.2.3) ile hesaplanan değer F tablo değerinden büyük ise ;

$$\frac{\hat{y}^T Q_{yy}^{-1} \hat{y}}{\frac{m}{m_o^2}} > F_{m,f,1-\alpha} \quad (2.2.4)$$

Sıfır hipotezi (2.2.1),  $1-\alpha$  güven aralığında reddedilir. Bu durumda, genişletilmiş fonksiyonel model kullanmanın anlamlılığı, başka bir deyişle hesaplanan bozucu parametrelerin ( $\hat{y}$ ) ve onların ölçülere olan etkisinin ( $\Delta$ ) anlamlılığı kanıtlanmış olur.

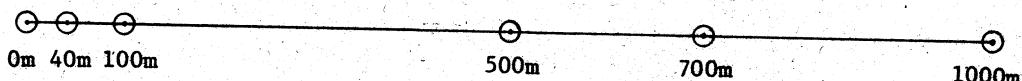
Eğer, (2.2.3) ile hesaplanan değer F tablo değerinden küçük ise;

$$\frac{\hat{y}^T Q_{yy}^{-1} \hat{y}}{\frac{m}{m_o^2}} < F_{m,f,1-\alpha} \quad (2.2.5)$$

Sıfır hipotezi (2.2.1),  $1-\alpha$  güven aralığında kabul edilir. Bu durumda, hesaplanan bozucu parametrelerin istatistiksel olarak anlamlı olmadığı kanıtlanmış olur ve genişletilmiş fonksiyonel model kullanılmamalıdır.

### 3. KALİBRASYON BAZININ DURUMU

Harita Genel Komutanlığı tarafından 1984 yılında tesis edilen Kalibrasyon Bazı, Ankara-Eskişehir karayolunda, Ankara'ya 10 Km. uzaklıkta, Harita Genel Komutanlığı Özel Destek Tabur Komutanlığının konumlandığı alan içerisindeindedir. Toplam uzunluğu 1000 m. olan Kalibrasyon Bazı 6 adet pilyeden oluşmaktadır. Pilyeler üzerinde merkezlendirme bronzu bulunmaktadır.



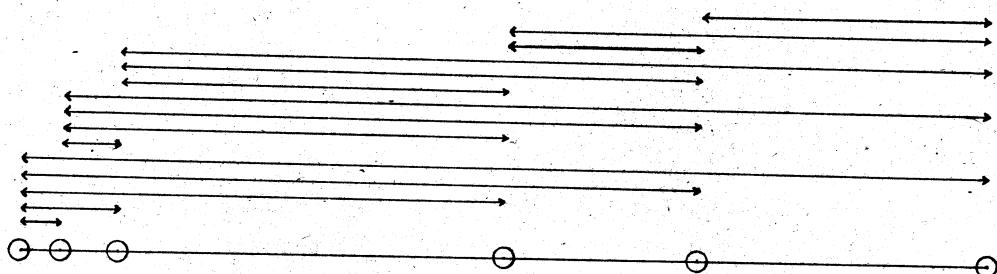
Şekil 1 : Kalibrasyon Bazının Şekli

Kalibrasyon bazi ara (kontrol) uzunlukları; 40 m, 60 m, 400 m, 200 m, ve 300 m dir. Şekil-1 deki gibi tasarlanan kalibrasyon bazında 15 adet bağımsız kenar ölçme olağrı vardır.

Kalibrasyon bazi noktaları arasındaki yükseklik farkı nivelman ölçüyle belirlenmiştir. Ayrıca Ülke Nivelman Ağına bağlantı yapılarak kalibrasyon bazi noktalarına kot verilmiştir.

### 4. KALİBRASYON BAZINDA YAPILAN ÖLÇÜLER VE OUTLIER TEST

Kalibrasyon Bazındaki kenar ölçüleri Keuffel-Esser firması tarafından üretilen, kırmızı laser'la (He-Ne) çalışan, 09B8082 seri no lu Rangemaster III aletiyle yapılmıştır. Bu aletle yapılan kenar ölçülerinde, bir ölçünün apriori karesel ortalama hatası, firma tarafından,  $\sigma_o = \pm(5 \text{ mm} + 1\text{ ppm})$  olarak verilmektedir.



Şekil 2 : Kalibrasyon Bazındaki Kenar Ölçüleri

Kalibrasyon bazında tüm kombinasyondaki kenarlar ölçülmüştür. Şekil-2'de görülen; 15 gidiş, 15 dönüş olmak üzere toplam 30 adet bağımsız kenar ölçüsü yapılmıştır. Her bir kenar 40 kez yinelemeli ölçülmüştür. Yineleme süresince, istasyon ve hedef noktasında aynı anda, atmosferik parametreler olan ıslak ısı ( $t'$ ), kuru ısı ( $t$ ) ve basınç ( $p$ ) ölçüleri de yapılmıştır.

40 elemanlı her bir örnek küme rastgele ve normal dağılımlı kabul edilmiştir. 30 adet örnek küme "Outlier" testine tabi tutulmuştur. Outlier test'te, 1967 yılında BAARDA tarafından geliştirilen "data snooping" yöntemi ile 1976 yılında POPE tarafından geliştirilen tau ( $\tau$ ) testi kullanılmıştır. Her iki outlier test yöntemi sonunda aynı sonuçlar elde edilmiştir. Test büyüklerinin hesaplanması ölçüler korelasyonsuz kabul edilmiştir.

BAARDA yönteminde test büyüğü aşağıdaki formülle hesaplanmıştır/3/;

$$w_i = \frac{-v_i}{\sigma_o \sqrt{Q_{v_i}}} = \frac{-v_i}{\sigma_{v_i}} \quad (4.1)$$

Eğer  $|w_i| > \sqrt{F_{1,\infty,1-\alpha}}$  ise, (4.2)

$i$  nci ölçü atılmıştır.

POPE yönteminde test büyüğü aşağıdaki formülle hesaplanmıştır./7/.

$$\tau_H = \frac{v_i}{m_o \sqrt{Q_{v_i}}} = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \quad (4.3)$$

Eğer  $\tau_H > \tau_T$  ise, (4.4)

$i$  nci ölçü atılmıştır.

Apriori outlier test sonunda atılan ölçü miktarları çizelge-1'de gösterilmiştir.

Bu testlerde  $\alpha = 0.05$  alınmıştır.

| İSTASYON<br>NO | HEDEF<br>NO | YİNELEME<br>SAYISI | ÖLÇÜLERİN             |                              | ATILAN<br>ÖLÇÜ<br>SAYISI | KALAN<br>ÖLÇÜ<br>SAYISI | KALAN ÖLÇÜLERİN       |                              |
|----------------|-------------|--------------------|-----------------------|------------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------|------------------------------|
|                |             |                    | ORTALAMASI<br>(Metre) | STANDART<br>SAPMASI( $m_o$ ) |                          |                         | ORTALAMASI<br>(Metre) | STANDART<br>SAPMASI( $m_o$ ) |
| 0+000          | 0+040       | 40                 | 40.12712              | $1.5720 \times 10^{-3}$      | 1                        | 39                      | 40.12703              | $1.4598 \times 10^{-3}$      |
| 0+040          | 0+000       | 40                 | 40.07940              | $1.5492 \times 10^{-3}$      | 2                        | 38                      | 40.07939              | $1.3664 \times 10^{-3}$      |
| 0+000          | 0+100       | 40                 | 100.08785             | $1.0266 \times 10^{-3}$      | -                        | 40                      | 100.08785             | $1.0266 \times 10^{-3}$      |
| 0+100          | 0+000       | 40                 | 100.06315             | $1.0266 \times 10^{-3}$      | 1                        | 39                      | 100.06308             | $0.9286 \times 10^{-3}$      |
| 0+000          | 0+500       | 40                 | 500.08352             | $2.2187 \times 10^{-3}$      | 1                        | 39                      | 500.08338             | $2.0598 \times 10^{-3}$      |
| 0+500          | 0+000       | 40                 | 500.05555             | $2.6694 \times 10^{-3}$      | -                        | 40                      | 500.05555             | $2.6694 \times 10^{-3}$      |
| 0+000          | 0+700       | 40                 | 699.99432             | $3.2533 \times 10^{-3}$      | -                        | 40                      | 699.99432             | $3.2533 \times 10^{-3}$      |
| 0+700          | 0+000       | 40                 | 699.97415             | $2.0324 \times 10^{-3}$      | 2                        | 38                      | 699.97389             | $1.7366 \times 10^{-3}$      |
| 0+000          | 1+000       | 40                 | 1000.09167            | $1.9399 \times 10^{-3}$      | 2                        | 38                      | 1000.09168            | $1.6943 \times 10^{-3}$      |
| 1+000          | 0+000       | 40                 | 1000.07735            | $2.2481 \times 10^{-3}$      | 1                        | 39                      | 1000.07749            | $2.1010 \times 10^{-3}$      |
| 0+040          | 0+100       | 40                 | 60.01542              | $1.9986 \times 10^{-3}$      | 2                        | 38                      | 60.01542              | $1.7650 \times 10^{-3}$      |
| 0+100          | 0+040       | 40                 | 59.99385              | $1.5284 \times 10^{-3}$      | -                        | 40                      | 59.99385              | $1.5284 \times 10^{-3}$      |
| 0+040          | 0+500       | 40                 | 460.03350             | $1.8257 \times 10^{-3}$      | -                        | 40                      | 460.03350             | $1.8257 \times 10^{-3}$      |
| 0+500          | 0+040       | 40                 | 460.01997             | $6.5142 \times 10^{-3}$      | -                        | 40                      | 460.01997             | $6.5142 \times 10^{-3}$      |
| 0+040          | 0+700       | 40                 | 659.98715             | $3.8997 \times 10^{-3}$      | 4                        | 36                      | 659.98761             | $2.8613 \times 10^{-3}$      |
| 0+700          | 0+040       | 40                 | 659.97205             | $3.2498 \times 10^{-3}$      | 5                        | 35                      | 659.97244             | $2.4313 \times 10^{-3}$      |
| 0+040          | 1+000       | 40                 | 960.13952             | $2.7268 \times 10^{-3}$      | 1                        | 39                      | 960.13936             | $2.5494 \times 10^{-3}$      |
| 1+000          | 0+040       | 40                 | 960.12750             | $2.1243 \times 10^{-3}$      | 4                        | 36                      | 960.12747             | $1.5581 \times 10^{-3}$      |
| 0+100          | 0+500       | 40                 | 400.03902             | $1.2087 \times 10^{-3}$      | 1                        | 39                      | 400.03895             | $1.1227 \times 10^{-3}$      |
| 0+500          | 0+100       | 40                 | 400.02955             | $2.5914 \times 10^{-3}$      | -                        | 40                      | 400.02955             | $2.5914 \times 10^{-3}$      |
| 0+100          | 0+700       | 40                 | 600.00922             | $1.2908 \times 10^{-3}$      | 1                        | 39                      | 600.00931             | $1.1955 \times 10^{-3}$      |
| 0+100          | 0+100       | 40                 | 599.99542             | $2.8455 \times 10^{-3}$      | 1                        | 39                      | 599.99523             | $2.6002 \times 10^{-3}$      |
| 0+100          | 1+000       | 40                 | 900.20465             | $1.8334 \times 10^{-3}$      | 2                        | 38                      | 900.20439             | $1.4803 \times 10^{-3}$      |
| 1+000          | 0+100       | 40                 | 900.18770             | $2.1744 \times 10^{-3}$      | 1                        | 39                      | 900.18756             | $2.0235 \times 10^{-3}$      |
| 0+500          | 0+700       | 40                 | 200.14332             | $2.5052 \times 10^{-3}$      | 1                        | 39                      | 200.14318             | $2.3606 \times 10^{-3}$      |
| 0+700          | 0+500       | 40                 | 200.12747             | $1.4848 \times 10^{-3}$      | 1                        | 39                      | 200.12756             | $1.3919 \times 10^{-3}$      |
| 0+500          | 1+000       | 40                 | 500.58110             | $1.5657 \times 10^{-3}$      | 1                        | 39                      | 500.58097             | $1.3667 \times 10^{-3}$      |
| 1+000          | 0+500       | 40                 | 500.56742             | $1.2380 \times 10^{-3}$      | -                        | 40                      | 500.56742             | $1.2380 \times 10^{-3}$      |
| 0+700          | 1+000       | 40                 | 300.46050             | $1.6946 \times 10^{-3}$      | -                        | 40                      | 300.46050             | $1.6946 \times 10^{-3}$      |
| 1+000          | 0+700       | 40                 | 300.45680             | $1.2850 \times 10^{-3}$      | 2                        | 38                      | 300.45663             | $1.0761 \times 10^{-3}$      |

Çizeleğe 1 : Apriori Outlier Test Sonuçları

## 5. KALIBRASYON BAZI DENGELİMEŞİ

Çizelge-1 deki kalan ölçülerin aritmetik ortalaması, bilinen fiziksel düzeltmeler getirildikten sonra yatay düzleme indirgenmiştir. Dengeleme modeli yatay düzlemede kurulmuş olup, ölçüler korelasyonsuz ve eşit ağırlıklı kabul edilmiştir. 4 ayrı fonksiyonel modelle dengeleme yapılmıştır. Bu modellere ilişkin düzeltme denklemleri:

$$\underline{v} = \underline{A}\hat{\underline{x}} - C - S\underline{l} - \underline{\lambda} \quad (5.1)$$

$$\underline{v} = \underline{A}\hat{\underline{x}} - C - \underline{l} \quad (5.2)$$

$$\underline{v} = \underline{A}\hat{\underline{x}} - S\underline{l} - \underline{\lambda} \quad (5.3)$$

$$\underline{v} = \underline{A}\hat{\underline{x}} - \underline{l} \quad (5.4)$$

Burada :

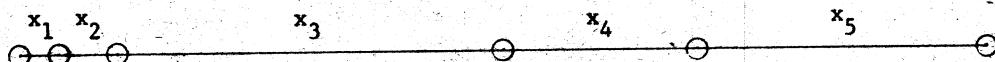
$\hat{\underline{x}}$  : Bilinmeyen vektörü

$\underline{l}$  : Ölçü vektörü

S : Ölçek (Scale) hatası

C : Toplam kayıklık (Alet kayıklığı + prizma kayıklığı)

Kalibrasyon bazının şekil-3 deki ara uzunlukları bilinmeyen olarak seçilmiştir.



Şekil 3 : Kalibrasyon Bazının Ara Uzunlukları

### 5.1. OUTLIER TEST

Dengeleme sonrası elde edilen aposteriori düzeltmelerin outlier testinde BAARDA ve POPE yöntemleri kullanılmıştır. (5.1),(5.2),(5.3), ve (5.4) fonksiyonel modelleriyle yapılan dengelemelere uygulanan outlier test sonunda aynı sonuç elde edilmiş olup, çizelge-2 deki 1 sıra numaralı ölçü atılmıştır. Sadece, (5.4) teki fonksiyonel modelin sayısal sonuçları aşağıda verilmiştir.

(2.5)'e göre normal denklemler kurulmuş, (2.6) ve (2.7)'ye göre çözüm yapılarak bilinmiyen vektörü  $x$ 'in kestirilen değeri hesaplanmıştır.

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 39.74595 \\ 59.75153 \\ 398.85563 \\ 200.06630 \\ 300.46079 \end{bmatrix}$$

(2.9)'a göre hesaplanan düzeltme vektörü ( $y$ ) çizelge-2 dedir.

Birim Ağırlıklı ölçünün aposteriori karesel ortalama hatası:

$$m_o = 0.005813 \text{ m}$$

(2.10)'a göre hesaplanan düzeltmelerin kofaktör matrisinin ( $Q_{vv}$ ) köşegen terimi : 0.8333 dür.

Kestirilen değerlerin karesel ortalama hatası :

$$m_{x_1} = \dots = m_{x_5} = m_o \sqrt{Q_{x_i x_i}} = 0.005813 \sqrt{0.1667} = 0.002373 \text{ m dir.}$$

| SIRA NO | YATAYA İNDİRGENMİŞ ÖLÇÜLER(m) | DÜZELTMELER (m) | SIRA NO | YATAYA İNDİRGENMİŞ ÖLÇÜLER(m) | DÜZELTMELER (m) |
|---------|-------------------------------|-----------------|---------|-------------------------------|-----------------|
| 1       | 39.76446                      | -0.01871        | 16      | 39.74341                      | 0.00254         |
| 2       | 99.49684                      | 0.00063         | 17      | 99.49326                      | 0.00421         |
| 3       | 498.35732                     | -0.00422        | 18      | 498.34505                     | 0.00805         |
| 4       | 698.42218                     | -0.00278        | 19      | 698.41584                     | 0.00356         |
| 5       | 998.87854                     | 0.00165         | 20      | 998.87510                     | 0.00509         |
| 6       | 59.75574                      | -0.00421        | 21      | 59.75210                      | -0.00057        |
| 7       | 458.61406                     | -0.00691        | 22      | 458.60662                     | 0.00053         |
| 8       | 658.67746                     | -0.00401        | 23      | 658.67389                     | -0.00044        |
| 9       | 959.13661                     | -0.00237        | 24      | 959.13245                     | 0.00179         |
| 10      | 398.85395                     | 0.00168         | 25      | 398.86528                     | -0.00965        |
| 11      | 598.91989                     | 0.00204         | 26      | 598.92084                     | 0.00109         |
| 12      | 899.38233                     | 0.00039         | 27      | 899.37820                     | 0.00452         |
| 13      | 200.07277                     | -0.00647        | 28      | 200.06324                     | 0.00306         |
| 14      | 500.53507                     | -0.00798        | 29      | 500.52623                     | 0.00086         |
| 15      | 300.46373                     | -0.00294        | 30      | 300.46182                     | -0.00103        |

Çizelge 2 : Yataya İndirgenmiş Ölçüler ve Düzeltmeleri

(4.1)'e göre hesaplanan test büyüğü;

$$w_1 = \frac{-v_1}{\sigma_0 \sqrt{Q_{v_1}}} = \frac{0.01871}{0.005 \sqrt{0.83333}} = 4.099$$

(4.2)'e göre tablo değeri ile karşılaştırılmış;

$$|w_1| > F_{1,\infty, 0.95} = 1.9596 \text{ bulunmuş ; ve}$$

(4.3)'e göre hesaplanan test büyüğü;

$$\tau_H = \frac{v_1}{m_0 \sqrt{Q_{v_1}}} = \frac{0.01871}{0.0055813 \sqrt{0.83333}} = 3.526$$

(4.4)'e göre tablo değeri ile karşılaştırılmış,

$$\tau_H = 3.526 > \tau_T = 2.914 \text{ bulunmuştur.}$$

BAARDA ve POPE testiyle aynı sonuç elde edildiğinden çizelge-2 deki 1 sıra numaralı ölçü atılmıştır. Bundan sonraki denelemelerde, çizelge-2 deki geriye kalan 29 adet yataya indirgenmiş ölçü, ölçü vektörü ( $\lambda$ ) olarak kullanılmıştır.

## 5.2 FONKSİYONEL MODEL TESTİ

5.1 de açıklanan aposteriori outlier test sonucu bir ölçü atıldıktan sonra, (5.1), (5.2), (5.3) ve (5.4) deki fonksiyonel modeller kullanılarak 4 ayrı modelde deneleme yapılmıştır. Bu denelemelerde normal denklemlerin boyutları çok küçük olduğundan, normal denklemlerin inversi (2.1.7)'ye göre değil doğrudan alınmış ve sonuçlar çizelge-3 de sergilenmiştir.

Ek parametre kullanılan (5.1), (5.2) ve (5.3) genişletilmiş fonksiyonel modellerin 2.2 ye göre istatistik testi yapılarak anlamlı olup olmadıkları araştırılmıştır.

(5.1) fonksiyonel modelin testi (2.2.3)'e göre yapılmıştır.

| FONKSİYONEL<br>MODEL         | (C) ve (S) EK<br>PARAMETRELİ<br>(5.1)                    | (C) EK<br>PARAMETRELİ<br>(5.2) | (S) EK<br>PARAMETRELİ<br>(5.3)                           | EK<br>PARAMETRESİZ<br>(5.4) |
|------------------------------|--|--------------------------------|--|-----------------------------|
| $\hat{x}_1$<br>( $m_{x_1}$ ) | 39.74228<br>(0.001802)                                   | 39.74169<br>(0.001820)         | 39.74268<br>(0.001882)                                   | 39.74220<br>(0.001883)      |
| $\hat{x}_2$<br>( $m_{x_2}$ ) | 59.75326<br>(0.001813)                                   | 59.75238<br>(0.001796)         | 59.75411<br>(0.001820)                                   | 59.75340<br>(0.001761)      |
| $\hat{x}_3$<br>( $m_{x_3}$ ) | 398.86068<br>(0.001179)                                  | 398.85478<br>(0.001722)        | 398.86039<br>(0.001224)                                  | 398.85563<br>(0.001719)     |
| $\hat{x}_4$<br>( $m_{x_4}$ ) | 200.06841<br>(0.001846)                                  | 200.06545<br>(0.001722)        | 200.06869<br>(0.001932)                                  | 200.06630<br>(0.001719)     |
| $\hat{x}_5$<br>( $m_{x_5}$ ) | 300.46439<br>(0.001392)                                  | 300.45994<br>(0.001722)        | 300.46438<br>(0.001463)                                  | 300.46079<br>(0.001719)     |
| $c$<br>( $m_c$ )             | -0.00255<br>(0.001617)                                   | -0.00255<br>(0.001617)         | -  | -                           |
| $s$<br>( $m_s$ )             | $1.48134 \times 10^{-5}$<br>( $0.26972 \times 10^{-5}$ ) | -                              | $1.19413 \times 10^{-5}$<br>( $0.20917 \times 10^{-5}$ ) | -                           |
| $m_o$ (m.s.e.)               | 0.0040054  | 0.0040053                      | 0.0042107  | 0.0042107                   |

Çizelge 3 : 4 Modelle Yapılan Dengeleme Sonuçları

Test büyütüğünün hesabında ;

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} -0.002551 \\ 1.48134 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (5.2.1)$$

$$Q_{yy} = \begin{bmatrix} 0.163044415 & -0.000183583 \\ -0.000183583 & 0.000000453 \end{bmatrix} \quad (5.2.2)$$

$$m = 2 \quad (5.2.3)$$

$$m_o = 0.0040053749 \text{ dır} \quad (5.2.4)$$

$$\frac{\hat{y}^T Q_{yy}^{-1} \hat{y}}{m_m^2} = \frac{6.188567688 \times 10^{-4}}{0.320848562^{-4}} = 19.2874 > F_{m, f, 1-\alpha} = F_{2, 24, 0.95} = 3.40 \quad (5.2.5)$$

olduğundan genişletilmiş fonksiyonel model 0.95 güven aralığında anlamlı bulunmuştur. Bu modelde hesaplanan ek (bozucu) parametrelerin her ikisinin de mi, yoksa birinin mi anlamlı olmasından dolayı genişletilmiş fonksiyonel modelin sıfır hipotezinin (2.2.1) reddedildiği t testi /2/ ile araştırılmıştır.

$$t_c = \frac{C}{m_c} = \frac{-0.002551}{0.001617} = -1.5776 \quad (5.2.6)$$

$$|t_c| < t_{0.01, 22} = 2.819 \quad (5.2.7)$$

olduğundan C'nin, 0.99 güven aralığında istatistiksel anlamda, sıfıra eşit olduğunun kabul edilebileceği ortaya çıkmıştır.

$$t_s = \frac{s}{m_s} = \frac{1.48134 \times 10^{-5}}{0.26972 \times 10^{-5}} = 5.492 \quad (5.2.8)$$

$$|t_s| > t_{0.01, 22} = 2.819 \quad (5.2.9)$$

olduğundan S nin, 0.99 güven aralığında istatistiksel anlamda, sıfıra eşit olduğunun kabul edilemeyeceği ortaya çıkmaktadır. Bu durumda, (5.1) fonksiyonel modelin (5.2.5) ile yapılan model testinin, sadece S parametresinin etkisiyle anlamlı olduğu kuşkusu ortaya çıkmaktadır.

Bu kuşkunun giderilmesi amacıyla (5.1) deki genişletilmiş fonksiyonel daraltılarak birer ek parametreli olan (5.2) ve (5.3) fonksiyonel modellemeyle çözüm yeniden yapılmıştır. Sonuçları çizelge-3 de gösterilen bu modelerin testi (2.2.3)'e göre yapılmıştır.

(5.2) fonksiyonel modelinin testi :

$$\frac{\hat{y}^T Q_{yy}^{-1} \hat{y}}{m_m^2} = 2.486 < F_{m, f, 1-\alpha} = F_{1, 24, 0.95} = 4.26 \quad (5.2.10)$$

### Ek parametre C'nin testi

$$|t_c| = \frac{C}{\frac{m}{c}} = 1.577 < t_{0.01, 23} = 2.807 \quad (5.2.11)$$

Bu test sonuçlarıyla, aletteki toplam kayıklığın (C), istatistik anlamda belirli bir hataya neden olmadığı ortaya çıkmaktadır.

### (5.3) Fonksiyonel modelinin testi

$$\frac{\hat{y}^T Q_{yy}^{-1} \hat{y}}{m \frac{m_o^2}{s^2}} = 32.5527 > F_{m, f, 1-\alpha} = F_{1, 24, 0.95} = 4.26 \quad (5.2.12)$$

### Ek parametre S'nin testi

$$|t_s| = \frac{S}{\frac{m}{s}} = 5.7089 > t_{0.01, 23} = 2.807$$

Bu test sonuçlarına göre, aletteki ölçek hatasının (S), istatistik anlamda belirli bir sistematik ölçü hatasına neden olduğu ortaya çıkmaktadır.

## 6. SONUÇ

Gözlemlerde sistematik ölçü hatalarının (bias) olabileceği her durumda, dengeleme modeline bozucu parametreler eklenerek fonksiyonel model genişletilebilir. Ekleneen parametrelerin istatistiksel anlamda anlamlı olup olmadığını test edilmelidir. Örneğin, nirengi ağında ölçek ve dönüklük hatasının olup olmadığı, dengeleme modeline ek parametreler eklenerek araştırılabilir. Ayrıca trigonometrik nivelman ağı dengelemesinde kırılma katsayısının kabul edilen değerinin ( $k = 0.13$  gibi) sistematik bir hataya neden olup olmadığı da genişletilmiş fonksiyonel modelin testiyle araştırılabilir.

Kalibrasyon bazı dengeleme modeli, kullanılan aletin ölçek ve kayıklığına ilişkin ek parametre eklenerek genişletilmiştir. Yapılan istatistik analiz sonunda, kullanılan EDM aletinde kayıklık (C) hatası olmadığı, fakat ölçek (S) hatası olduğu belirli bir güven aralığında saptanmıştır. Buna rağmen aletin yeniden test edilmesi önerilmektedir. Test işlemi, kalibrasyon bazında yapılacak yeni ölçülerle ve frekans sayacı ile aletin ürettiği frekans kontrol edilerek yapılmalıdır.

## K A Y N A K L A R

- /1/ DENİZ, R. : Kısa boyaların elektro-optik uzaklık ölçerlerle ölçülmeye mesinde presizyon araştırması, 1981
- /2/ FRONCZEK, C.J. : Use Of Calibration Base Lines, 1977
- /3/ KOK, J.J. : On Data Snooping And Multiple Outlier Testing, 1984
- /4/ LAURILLA, S.M. : Electronic Surveying And Navigation, 1976
- /5/ MIKHAIL, E.M. : Observations And Least Squares, 1976
- /6/ PELZER, H. : Detection of Errors In The Functional Adjustment Model, 1983
- /7/ POPE, A.J. : The Statistics of Residuals and the Detection of Outliers, 1976
- /8/ SPOFFORD, P.R. : Establishment of Calibration Base Lines, 1982
- /9/ UZEL, T. : Jeodezik Amaçlı Elektromagnetik Ölçmeler, 1981