KABA HATALARIN BELİRLENMESİNDEKİ SORUNLAR
(PROBLEMS ARISING IN THE ANALYSIS OF OUTLIERS)

Şerif HEKİMOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi
İnşaat Fakültesi, Jeodezi ve Fotogrametri Müh. Bölümü, İstanbul
email: hekim@yildiz.edu.tr

ÖZET

Kaba hataları belirlemek için iki temel yaklaşım bulunmaktadır: Klasik uyuşumsuz ölçü testleri ve robust yöntemler. Bu yazıda kaba hata belirlemede ortaya çıkan genel sorunlar üzerinde bilgi verilmekte ve sorunlar karşısında bu iki yaklaşımın çözümleri tartışılmaktadır. Gerek robust yöntemlerin ve gerekse uyuşumsuz ölçü testlerinin sonuçlarının güvenirliği ortalama başarı oranı ile ölçülmektedir. Yapılan simülasyon çalışmalarına göre, robust yöntemlerin, genel olarak tüm sorunlu durumlar (kaldıraç noktası, gizleme ve batma etkisi, kritik kaba hatalar) gözönüne alındığında, uyuşumsuz ölçü testlerine göre daha başarılı olduğu görülmüştür. Dolayısıyla kaba hatalı ölçüleri belirlemek için robust yöntemler kullanılmalıdır. Buna karşılık, eğer örnek kümede hiç uyuşumsuz ölçü yoksa, robust yöntemler kaba hatalı ölçü üretir, yani iyi bir ölçü kaba hatalıymış gibi görünür. Bu riski gözardı etmemek gerekir.

ABSTRACT

In order to identify outliers, there are two approaches: the conventional tests for outliers and robust methods. In this study, it is given information about that the problems arise in the analysis of outliers generally, and how these approaches give solutions to these questions. In order to compare the success of these approaches to identify outliers with each other, mean success rate is used. According to the results of simulation, the mean success rates of robust methods are greater than the ones of the conventional tests for outliers when considering all the cases which problems occur such as leverage point, masking effect and swamping effect etc. Therefore, the robust methods should be used. However, when the observations don't include any outlier, robust methods generate outlier. So, a good observation may appear as a bad one. This is a risk that we must take into the consideration.

1. GİRİŞ

Günümüzde ölçülen büyüklüklerin ve bunlardan türetilen bilgilerin kalitesini belirlemek büyük önem taşımaktadır. Kalite deyince ölçülmüş olan büyüklüklerin ve bunlardan türetilen bilgilerin standart sapması ve güvenirliği anlaşılır (Niemeier 2002). Ayrıca ölçülerin düzenli hata (bias) içerip içermemesi de önemlidir. Bu çalışmada daha çok güvenirlik üzerinde durulacaktır. Güvenirlik deyince, parametre kestiriminin ölçülerdeki kaba hataları belirleme yeteneği anlaşılır (Baarda 1968, Koch 1999, Niemeier 2002). Bilindiği gibi tüm jeodezik ölçülerin değerlendirilmesinde En Küçük Kareler Yöntemi (EKKY) kullanılır (Wolf 1968, Ulsoy 1974). Ölçülerin kaba hata içerip içermediği geleneksel olarak uyuşumsuz ölçü testleri ile denetlenir (Baarda 1968, Aksoy 1984, Ayan 1992, Öztürk ve Şerbetçi 1992, Koch 1999, Demirel 2003). Eğer önsel varyans biliniyorsa Baarda testi (Data snooping) (Baarda 1968), bilinmiyorsa Pope testi (τ - testi) (Pope 1976) uygulanır.

Huber'in, (1964)' de yazdığı makaleden sonra istatistik bilim alanında robust (sağlam) istatistik adıyla yeni bir bilim dalı ortaya çıkmıştır. Bu bilim dalı, tek ve çok boyutlu örnek kümelerde ortaya çıkan kaba hataların belirlenmesi veya bilinmeyen parametrelerin ve bunların varyans kovaryans matrisinin kaba hatalardan etkilenmeden nasıl kestirileceğini araştırmaktadır (Huber 1981, Hampel vd. 1986, Rousseeuw ve Leroy 1987, Wilcox 1997). Bu konuda gerek istatistikte ve gerekse jeodezide çok sayıda araştırma yapılmaktadır (Xu 2005). Ülkemizde de bu konuya ilgi duyulmaktadır (Ayhan ve Aksoy 1991, Yaşayan 1992). Çeşitli amaçlar için bir çok robust yöntemler geliştirilmiştir. Bunlar iki ana grupta toplanabilir: (a) Robust M-Kestiriciler, Genelleştirilmiş M-Kestiriciler ve L_1–norm; (b) Yüksek kırılma noktalı robust kestiriciler: Karelerin en küçük medyanı (least median of squares =LMS), Kırpılmış en küçük kareler (least trimmed squares =LTS), vb.

Robust yöntemlerin genel olarak birbiriyle karşılaştırılması için kırılma noktası kavramı ortaya atılmıştır (Donoho ve Huber 1983, Hampel vd. 1986). Bu robust istatistiğin anlaşılması en zor kavramıdır. Kırılma noktasından, bir kestiricinin bilinmeyen parametreleri, kaç tane çok büyük kaba hatadan (yüzde olarak) etkilenmeden, güvenilir olarak kestirmesi anlaşılır. Diğer bir deyişle; ölçülerde en çok kaç tane (yüzde olarak) büyük kaba hata olursa, kestirim değeri anlamsız çıkar. Örneğin, aritmetik ortalamanın (EKKY'nin) kırılma noktası sıfır, medyan kestiricisinin kırılma noktası 0.50' dir. Bir ölçüdeki büyük bir kaba hata, aritmetik ortalamanın (EKKY'nin) kestirim değerini anlamsız kılar, yani kullanılamayacak biçimde bozar. Daha doğru tanım kaynaklarda asimptotik olarak verilir (Rousseeuw ve Leroy 1987). Bu tanımla, uygulamada iki robust yöntemin ayrıntılı bir karşılaştırmasını yapmak, olanaklı görülmemektedir. Bunun yerine daha basit olan "ortalama başarı oranı (OBO)" kavramı geliştirilmiştir (Hekimoğlu ve Koch 1999). Böylece çeşitli yöntemler, ortaya çıkabilecek her türlü sorunlu durumlarda birbiriyle karşılaştırılabilmektedir.

Aynı biçimde, test yöntemlerinin birbiriyle genel olarak karşılaştırılması için de düzey ve güç kırılma noktaları kavramları geliştirilmiştir (He vd. 1990, Markatou ve Hettmansperger 1990). Uygulanabilirlik bakımından aynı belirsizlik bu tanımlarda da vardır. Bunun yerine, uygulamada gerçekleştirilebilir, basit, "ortalama başarı oranı" kavramı ortaya atılmıştır (Hekimoğlu ve Koch 2000).

Uygulayıcı açısından bu iki yaklaşımdan hangisi seçilmelidir Eğer robust yaklaşım uygulanacaksa hangi yöntem tercih edilmelidir. Bu sorulara verilecek yanıtlar uygulamada tam kesinlik kazanmamıştır. Uygulamada yazılmış bir çok istatistik ders kitaplarında klasik test yöntemlerinin yeterli olduğu belirtilmektedir (Wilcox 1997). Buna karşın robust istatistikçiler robust yöntemlerin daha güvenilir olduğunu ileri sürmektedirler.

Bu incelemede, kaba hata belirlemede her iki temel yaklaşımdan hangisinin seçileceği ve her iki yaklaşımda ortaya çıkan sorunlar ve çözüm yöntemleri hakkında güncel bilgiler verilecektir.

2. UYUŞUMSUZ ÖLÇÜ TESTLERİ

a. Gauss–Markoff model

Çok boyutlu gözlemler l_i $(i = 1, 2, ..., n)$ verilmiş olsun. Bunların arasında bilinmeyen parametreler ve bilinen katsayılar kullanılarak doğrusal bir fonksiyonel model ile ölçülerin istatistiksel özelliklerini yansıtan bir stokastik model kurulabileceği öngörülüyor. Bu model genel olarak Gauss-Markoff modeli olarak adlandırılır (Koch 1999),

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \tag{1}$$

$$\mathbf{C}_l = \sigma^2\,\mathbf{P}^{-1} = \sigma^2\,\mathbf{Q}_l \quad \text{ve} \quad \mathrm{E}(\mathbf{e}) = 0 \tag{2}$$

Burada **A** $n{\times}u$ boyutlu tasarım matrisi, $\boldsymbol{\beta}$ $u{\times}1$ boyutlu bilinmeyen parametre vektörü, $\boldsymbol{l}$ $n{\times}1$ boyutlu gözlem vektörü, **e** $n{\times}1$ boyutlu normal dağıldığı varsayılan rasgele hata vektörü, $\mathbf{C}_l$ $n{\times}n$ boyutlu kovaryans matrisi, **P** $n{\times}n$ boyutlu ağırlık matrisi, $\mathbf{Q}_l$ $n{\times}n$ boyutlu kofaktörler matrisi, σ^2 önsel varyans, n gözlemlerin sayısı, u bilinmeyen parametrelerin sayısı ve $E(\;)$ beklenen değerdir. rank(**A**) = u ve **P** matrisi pozitif tanımlı olsun.

b. Yinelemeli Test Uygulamaları

Jeodezide uyuşumsuz ölçüleri belirlemek için, eğer önsel varyans biliniyorsa (Baarda 1968), bilinmiyorsa (Pope 1976) testi uygulanır (Koch 1999).

Bir $\bar{\mathrm{l}}_i$ ölçüsünde bir kaba hata $\delta\mathrm{l}_\mathrm{i}$ olsun. Bu kirletilmiş ölçü ($\bar{\mathrm{l}}_\mathrm{i} = \mathrm{l}_\mathrm{i} + \delta\,\mathrm{l}_\mathrm{i}$) için H_0 hipotezi ve H_1 karşı hipotez şöyle kurulur,

$$\mathrm{H}_0 : \delta\mathrm{l}_\mathrm{i} = 0 \quad \text{ve} \quad \mathrm{H}_1 : \delta\mathrm{l}_\mathrm{i} \neq 0\,. \tag{3}$$

Eğer önsel varyans σ^2 biliniyorsa ve gözlemler arasında korelasyon yoksa, v_i düzeltmesi standartlaştırılır,

$$\mathrm{b}_\mathrm{i} = \frac{|\,\mathrm{v}_\mathrm{i}\,|}{\sigma\sqrt{(\mathbf{Q}_{\mathrm{vv}})_{ii}}}\ ,\ \mathrm{i} \in \{1,2,\ldots,\mathrm{n}\}. \tag{4}$$

Burada $(\mathbf{Q}_{\mathrm{vv}})_{ii}$ düzeltmelerin $\mathbf{Q}_{\mathrm{vv}}$ kofaktörler matrisinin i' nci köşegen elamanıdır. Eğer $\mathrm{b}_\mathrm{i} > z_{(1-\alpha/2)}$ ise, $\bar{\mathrm{l}}_i$ ölçüsü uyuşumsuz ölçü olarak değerlendirilir. Burada $z_{(1-\alpha/2)}$ normal dağılımın tablo değeridir ve α için 0.001 seçilir. Bu yönteme Baarda testi denir. Eğer örnek kümede birden fazla bozulmuş ölçü varsa, bu yöntem yinelemeli (iteratif) olarak uygulanır.

3. ROBUST YÖNTEMLER

Bu yazıda robust M-Kestiriciler hakkında bazı bilgiler verilecektir. M-Kestiriciler olarak çok sayıda ağırlık fonksiyonları geliştirilmiştir. Burada yalnızca Huber'in M-Kestiricisi ve Danimarka yöntemi tanıtılacaktır.

a. Robust M– Kestirimi

Robust M–*Kestirimi*, maksimum olasılık yönteminin genelleştirilmesi biçiminde, Huber (1964) tarafından ortaya atılmıştır. Gauss-Markoff modelinde M-Kestiriminin normal denklemleri aşağıdaki gibi,

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} w(v_i)\, v_i\, a_{ij} = 0 \quad , \quad j = 1,2,...,u\, ;\ i = 1,2,\ \ldots,\ n \tag{5}$$

veya matris gösterimiyle,

$$\mathbf{A}^{T}\mathbf{W}_k\ \mathbf{v} = \mathbf{A}^{T}\mathbf{W}_k\ (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\kappa} - \boldsymbol{l}) = \mathbf{0}\,. \tag{6}$$

verilir.Burada $\mathbf{v}$ düzeltme vektörü, $\mathbf{W}_k$ düzeltmelere bağlı olarak, seçilmiş bir ağırlık fonksiyonundan elde edilen köşegen bir matris ve k yineleme sayısıdır. Bu normal denklemlerde bilinmeyen parametrelerin yanı sıra düzeltmelerde bilinmemektedir. Dolayısıyla ancak yinelemeyle (iterasyonla) çözülebilir. Genellikle yinelemeli, yeniden ağırlıklandırılmalı EKKY ile çözüm tercih edilir (Koch 1999).

b. Genelleştirilmiş M–Kestirimi

Genelleştirilmiş M–Kestirimi, doğrusal regresyonda bir kaldıraç noktasının bilinmeyen parametreler üzerindeki bozucu etkilerini sınırlandırmak için geliştirilmiştir. Mallows (Hampel vd. 1986) bunun için $\eta(x_i)$ ağırlık fonksiyonunu önermiştir. Bu durumda (5) eşitliği şu biçimde değiştirilmiştir,

$$\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} \eta(x_i)\, w(v_i/\sigma)\, a_{ij} = 0 \quad , \quad j = 1,2,...,n\,, \tag{7}$$

Burada $\eta(x_i)$ yerine (Hekimoğlu 1998) eşredundansı sağlayan ağırlıkların (p_i^*), (Huber 1981) $\sqrt{r_i}$ ' nin ve (Koch 1996) $r_i^{t/2}/r_d$ 'nin alınmasını önermektedir. Burada $r_d = (1/n)\sum_{i=1}^{n} r_i^{t/2}$, $t/2 = 8$, r_i kısmi redundansı ve x_i doğrusal regresyonda yatay ekseni göstermektedir.

c. Huber'in M–Kestiricisi

Huber (1981) aşağıdaki ağırlık fonksiyonunu önermektedir.

$$w_i^{(k)} = \begin{cases} p_i & , \ |v_i^{(k)}| \le c\sigma \\ p_i c\sigma / |v_i^{(k)}| & , |v_i^{(k)}| > c\sigma \end{cases} , \tag{8}$$

Burada c sabiti için 1.5 veya 2 seçilir.

ç. Danimarka yöntemi

Bu ağırlık fonksiyonu Krarup vd. (1980)'in önerisine dayanır ve şöyle verilir,

$$w_i^{(k)} = \begin{cases} p_i & , \ v_i^{(k)} < c\sigma \quad \text{için} \\ p_i \exp - \left(\left| \dfrac{v_i^{(k)}}{c\sigma} \right| \right) & , \ \text{bunun dışında} \end{cases} \tag{9}$$

Burada da c sabiti için 1.5, 2, ... gibi bir sayı seçilir.

4. EŞ REDUNDANSLI TASARIM

Doğrusal regresyonda, eş redundanslı tasarım kaldıraç noktalarını belirlemek için geliştirilmiştir. Eğer her bir ölçü aynı geometrik ve aynı stokastik etkiye sahipse, $\mathbf{H}^*$ şapka matrisinin h_{ii}^* köşegen elemanlarının birbirine eşit olması gerekir. Bu durum kaynaklarda eşredundanslı tasarım veya eşkaldıraçlı tasarım olarak adlandırılır (Staudte ve Sheather, 1990; Hekimoğlu, 1998). Bu yeni durumda, kısmi redundanslar şöyle tanımlanır,

$$r_i^* = 1 - \frac{u}{n} \quad \text{ya da} \quad h_{ii}^* = \frac{u}{n} \quad , \quad i \in (1, 2, ..., n) \ . \tag{10}$$

Burada ,

$$(\mathbf{H}^*)_{ii} = (\mathbf{A}\,(\mathbf{A}^T \mathbf{P}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^*)_{ii} = u/n \, , \tag{11}$$

ve r_i^*'a denkleşmiş kısmi redundans, $\mathbf{P}^*$'a denkleşmiş ağırlık matrisi ve $\mathbf{H}^*$'a da denkleşmiş şapka matrisi denir. Denkleşmiş p_i^* ağırlıkları bulmak için çeşitli yinelemeli yöntemler önerilmiştir (Kampmann 1994; Koch 1996; Hekimoğlu 1998).

5. KABA HATALAR

Genellikle ölçülerin içerdiği kaçınılmaz rasgele gözlem hatalarının normal dağıldığı varsayılır ve $\mathbf{e} \sim N(\mu, \sigma^2)$ biçiminde gösterilir. Burada e_i rasgele gözlem hatasını, μ normal dağılımın beklenen değerini ve σ^2 ise varyansını ifade eder. Bir kaba hata, eğer $\mu \pm z_{(1-\alpha/2)}\,\sigma$

sınırlarının dışında yer alıyorsa genel olarak kaba hata (outlier) olarak adlandırılır. Robust istatistikte $z_{(1-\alpha/2)}$ değeri için yaklaşık olarak 3 veya 2.5 önerilmektedir.

Kaba hatalar, robust istatistikte doğrusal regresyonda iki ana grupta incelenir: y-yönündeki kaba hatalar, yani gözlemlerde ortaya çıkan kaba hatalar, x-yönünde (tasarım uzayında) ortaya çıkan kaba hatalar (kaldıraç noktaları) (Rousseeuw ve Leroy 1987). Bu durumda y_i 'ler ölçü ve x_i' ler hatasız büyüklükler olarak düşünülür. y-yönündeki kaba hatalar da iki gruba ayrılabilir: rasgele kaba hatalar, ortak etkilenmiş kaba hatalar (Hekimoğlu 1997). Rasgele kaba hatalar: Gözlem yaparken rasgele oluşan kaba hatalara rasgele kaba hatalar denir. En önemli özellikleri hem artı hem de eksi değer almalarıdır. Ortak etkilenmiş kaba hatalar: Bazı ölçüler önceden belirlenemeyen bir nedenle ortak bir dış etkiye maruz kalırlar. Bu durumda ölçülerdeki kaba hataların büyüklükleri farklı olmasına karşın işaretleri aynı olur, yani hepsi eksi ya da hepsi de artı işaretli olur. Bu tür kaba hatalı ölçüler istatistikte "ortak etkilenmiş gözlemler" olarak adlandırılır (Chatterjee ve Hadi, 1988).

6. KABA HATALARIN BELİRLENMESİNDEKİ SORUNLAR

a. Küçük genlikli kaba hatalar

Yapılan araştırmalara göre bir kaba hatanın genliği küçükse, yani özellikle genliği 3σ ile 4σ arasında ise ve ilgili ölçünün redundansı 0.5' den küçükse bunu herhangi bir yöntemle güvenilir olarak belirlemek olanaksızdır (Hekimoğlu, 2005). Bu durum EKKY' nin kaba hataları yayma özelliğinden kaynaklanmaktadır. EKKY ile elde edilen düzeltme vektörü aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\mathbf{v} = (\mathbf{H} - \mathbf{I})\,\boldsymbol{l}\,. \qquad (12)$$

Burada **I** matrisi birim matristir ve **H** matrisine şapka matrisi veya projeksiyon matrisi denir,

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\;. \qquad (13)$$

EKKY'nin yayma etkisini açıklamak için, düzeltmeleri daha açık yazılırsa,

$$\mathrm{v_i} = -r_{\mathrm{i}} l_i + \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{h_{ij}}\, l_{\mathrm{j}}\;,\; \mathrm{j} \neq \mathrm{i}\;,\; \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{n} \qquad (14)$$

Bu eşitlikten aşağıdaki sonuçlar çıkartılabilir,

(1) Eğer l_i ölçüsünde bir kaba hata varsa, bu v_i düzeltmesine, r_i' ye bağlı olarak ancak ikinci terim sıfırsa yansır.

(2) Bir ölçüdeki (l_j) kaba hata tüm ölçülerin düzeltmelerine h_{ij} çarpanı kadar yansır.

Bu açıklamadan görüleceği gibi, eğer l_i ölçüsündeki kaba hatanın genliği küçükse, ikinci terim sıfır olsa bile, v_i düzeltmesine r_i kadar küçülerek yansır. Dolayısıyla belirlenmesi zorlaşır.

b. Gizleme ve batma etkisi

Örnek kümedeki gözlemler birden fazla kaba hata içeriyorsa, kaba hataları belirlemek daha da zorlaşır. Bu durumlar kaba hata belirlemenin neden karmaşık ve çok anlamlı olduğunu ortaya koyar.

Gizleme (masking) ve batma (swamping) etkilerini açıklayabilmek için düzeltme denklemlerine dönülsün. $\bar{l}_i$ ve $\bar{l}_k$ ölçüleri kaba hatalı olduğu varsayılsın. $\bar{v}_i$ düzeltmesi şöyle yazılabilir,

$$\bar{v}_i = -(1-h_{ii})\bar{l}_i + h_{ik}\bar{l}_k + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\, l_j \ , \ j \neq i \ , \ k \neq i \ , \ j \neq k \, , \ i = 1,2,...,n \tag{15}$$

Eğer eşitliğin sağındaki ikinci terim, birinci terime göre ters işaretli ise, bu iki terim birbirini götürür. Dolayısıyla kaba hatalı ölçü sonuçta iyi ölçü gibi görünür, yani belirlenemez. Bu etkiye gizleme etkisi denir (Hadi ve Siminoff, 1993). Bu durum özellikle komşu iki ölçü kaba hatalı ise ve birinin genliği diğerine göre daha büyükse ortaya çıkabilir. Gizleme etkisi daha ayrıntılı olarak (Hekimoğlu 2005)' de anlatılmıştır. l_t ölçüsü iyi ölçü olsun. Eğer $\bar{l}_i$ ve $\bar{l}_k$ 'lı terimler aynı işaretli ise l_t ölçüsünün düzeltmesinin mutlak değerini büyütecektir. Böylece l_t iyi ölçüsü sonuçta kaba hatalı ölçü gibi görünecektir. Bu etkiye batma etkisi denir. Batma etkisi daha ayrıntılı olarak (Hekimoğlu 2005)' te verilmiştir.

Bu durumlar kaba hata belirlemenin ne derece karmaşık olduğunu açıklamaktadır. Ortada çok anlamlı bir durum vardır. Bu durumlar, herhangi bir yöntemle elde edilen sonuçların ne derece güvenir olduğunun düşünülmesine yardımcı olur.

c. Kaba Hatanın Tanımı

Bir kaba hatayı nasıl tanımlayacaktır? Bu konuda klasik uyuşumsuz ölçüler testlerinde, örneğin Baarda testinde bir ölçünün kaba hatalı olması için ilgili ölçünün düzeltmesinin aşağıda verilen sınır değerden büyük olması gerekir,

$$v_i > z_{(1-\alpha/2)}\, \sigma \sqrt{(\mathbf{Q}_{vv})_{ii}} \tag{16}$$

Burada α=0.001 alınır. Pope testi uygulanırsa $z_{(1-\alpha/2)}$ yerine τ_i (Tau dağılımından gelen tablo değeri) alınır. Robust yöntemler uygulanırsa, bir ölçünün kaba hatalı olması için bunun düzeltmesinin aşağıda verilen sınır değerden büyük olması gerekir,

$$|v_i| > k\sigma \quad , \quad i = 1,2,...,n \, . \tag{17}$$

Burada k için genellikle 2.5 veya 3 alınmaktadır. Ayrıca başka tanımlar da verilmektedir (Xu 1993, Wicki 1999).

ç. Kritik Kaba hatalar

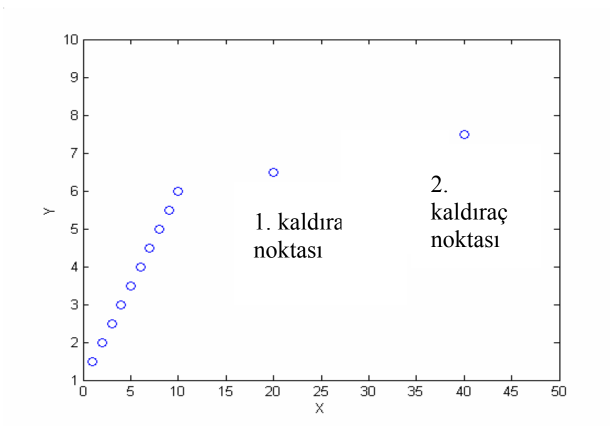
Kritik kaba hatalar, genel olarak belirlenmesi en zor kaba hatalardır. Aynı işaretli (ortak etkilenmiş), ilgili ölçüleri birbirine komşu olan ve kısmi redundansları küçük olan kaba hatalı ölçüler söz konusudur. Daha iyi açıklamak için bir basit regresyon doğrusu ($y_i = a + bx_i$, $i=1,2,\ldots,n$; $a=1, b=1$) düşünülsün (Tablo-1). Bu tabloda verilen basit regresyonda, olası ikili kritik kaba hatalı ölçüler $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, $(\bar{y}_9, \bar{y}_{10})$, üçlü kritik kaba hatalı ölçüler $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ ya da $(\bar{y}_8, \bar{y}_9, \bar{y}_{10})$ ve ayrıca dörtlü kritik kaba hatalı ölçüler $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4)$ veya $(\bar{y}_7, \bar{y}_8, \bar{y}_9, \bar{y}_{10})$ olarak verilebilir. Bu ölçüler, birbirlerine komşudurlar ve kısmi redundansları diğerlerine göre bağıl olarak daha küçüktür.

Tablo-1: Basit regresyon doğrusu ve kısmî redundanslar r_i **.**

Nokta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_i	0.66	0.75	0.82	0.87	0.90	0.90	0.87	0.82	0.75	0.66

d. Kaldıraç noktaları

Doğrusal regresyonda, eğer bir ölçünün x değeri, ölçülerin büyük çoğunluğundan uzakta bulunuyorsa bu nokta kaldıraç noktası olarak adlandırılır (Rousseeuw ve Leroy, 1987). Bu ölçünün kısmi redundansı diğerlerinin içinde en küçüğüdür. Kaldıraç noktası bir tane olabildiği gibi birden fazla da olabilir (Şekil 1). Eğer bir yöntemin ortalama başarı oranı (OBO) sıfıra yaklaşıyorsa, bu yöntem kırılıyor diye kabul edilmiştir. Bunun anlamı bu yöntemin sonuçlarına güvenilemez. Çıkan sonuçlar anlamsızdır. Böylece kırılma noktası kavramı kaldıraç noktası yardımıyla kolayca açıklanabilir.



Şekil-1. Kaldıraç noktaları

7. TARTIŞMALAR

Bu bölümde önce uyuşumsuz ölçü testlerinin ve daha sonra da robust yöntemlerin sorunları tartışılacaktır.

a. Uyuşumsuz Ölçü Testleri

Önsel varyansın bilinmesi durumunda uygulanan Baarda testi ile ilgili doğrusal regresyonlarda yapılmış araştırmalara göre, yöntemin ortalama başarısı, bilinmeyen sayısına, kaba hatanın büyüklüğüne, kaba hatanın cinsine, kaba hatanın sayısına, kısmi redundanslara ve ölçü sayısına bağlı olarak değişmektedir. Bilinmeyen sayısı artınca OBO düşmektedir. Kaba hatanın genliği büyüdükçe OBO artmaktadır. Rasgele kaba hatalara ait OBO, aynı sayıda ortak etkilenmiş kaba hataların OBO ‘dan daha büyüktür. Serbestlik derecesi arttıkça OBO artmaktadır. Kaba hata sayısı artınca OBO düşmektedir (Hekimoğlu ve Koch 2001). Redundansları daha küçük olan ölçülerdeki kaba hataları belirlemede OBO, redundans daha büyük olanlara göre daha küçüktür. Burada sorun α anlamlılık düzeyi için 0.001 alınmasıdır. Bazı yayınlarda 0.05 veya 0.01 alınabileceğinden söz edilmektedir. Baarda testi, genel olarak bir kaba hatayı belirlemeye yatkındır.

Pope testi için de Baarda testinde sayılan özellikler geçerlidir. Ancak kaba hata sayısı iki ve daha çok olunca OBO belirgin olarak düşmektedir. Baarda testinin OBO’ ları Pope testine ait OBO’lardan daha büyüktür.

Doğrusal regresyonda Baarda testinin OBO’ları robust yöntemlerin OBO’larından daha küçüktür (Hekimoğlu 2005). Bu durum Pope testi için de geçerlidir. Acaba bu testlerin OBO’ları arttırılabilir mi? Bu soru doğrusal regresyonda araştırılmış ve OBO’larının arttırılabileceği gösterilmiştir (Hekimoğlu 2004; Hekimoğlu 2005). Yalnız, burada şuna dikkat etmek gerekir: eğer ölçüler hiç kaba hata içermez ve bu yeni testler uygulanırsa, bunlar belli bir yüzde ile (risk) kaba hata üretebilirler. Ancak artma oranı bu riskten daha büyük olduğundan, bu yeni testler uygulanabilir. Örneğin bir kaldıraç noktasının olması durumunda Baarda testi bunu belirleyebilmektedir. Ama iki ve daha fazla olması halinde test kırılmakta, yani OBO sıfır çıkmaktadır (Hekimoğlu 2005). Eşredundanslı tasarım uygulandığı zaman, Baarda test yöntemin başarısı (OBO), bir kaldıraç noktası olması halinde %50 azalmasına karşın, sayı ikiye ve üçe çıkınca artmaktadır.

b. Robust Yöntemler

Robust yöntemlerin OBO’ları doğrusal regresyonda uyuşumsuz ölçü testlerinin OBO’larından genellikle daha büyüktür (Hekimoğlu 2005). Bu nedenle bu yöntemlerin kaba hatalı ölçüleri belirlemede tercih edilmesi gerekir. Fakat durum biraz karmaşıklık gösterir. Şöyle ki genellikle robust yöntemler, ölçülerin hiç kaba hata içermediği durumda, fazladan kaba hatalı ölçü üretirler. Bu bir risktir ve robust yöntemlerin uygulanmasında göz önünde bulundurulması gereken en önemli sakıncadır.

Önsel varyansın bilinmesi durumunda, uygulanan robust yöntemlerle ilgili doğrusal regresyonlarda yapılmış araştırmalara göre, yöntemlerin OBO’ları, tıpkı klasik testlerde olduğu gibi, bilinmeyen sayısına, kaba hatanın büyüklüğüne, kaba hatanın cinsine, kaba hatanın sayısına, kısmi redundanslara ve ölçü sayısına bağlı olarak değişmektedir. Bilinmeyen sayısı artınca OBO düşmektedir. Kaba hatanın genliği büyüdükçe OBO artmaktadır. Rasgele kaba hatalara ait OBO, aynı sayıda ortak etkilenmiş kaba hataların OBO'sundan daha büyüktür. Serbestlik derecesi arttıkça OBO artmaktadır. Kaba hata sayısı artınca OBO düşmektedir (Hekimoğlu ve Koch 1999). Redundansları daha küçük olan ölçülerdeki kaba hataları belirlemede OBO, redundanslı daha büyük olanlarınkine göre daha küçüktür. OBO'lar bir robust yöntemden diğerine değişmektedir. Bunların dışında; c sabitinin nasıl seçileceği, kaba hatanın nasıl tanımlanacağı, kaldıraç noktalarının var olması durumunda bunların nasıl belirleneceği, eşredundanslı tasarımın ne gibi yarar getireceği, gizleme ve batma etkisinin ve kritik kaba hataların olması durumlarında yöntemlerin OBO 'larının nasıl arrtırılacağı vb. gibi robust yöntemlere özgü bazı sorunlar da vardır

Robust yöntemler uygulanırken c sabiti için 1.5, 2, 2.5,.. gibi değerler seçilir. Yöntemin başarısı bu seçime bağlı olarak değişir. En uygun c değerini bulmak o kadar kolay değildir (Hekimoğlu 2005). Kaba hata belirleme genel olarak doğrusal olmayan bir problemdir. Örneğin kaba hataların genlikleri 3σ ile 6σ arasında yer alması durumuna en uygun c değeri, genlikler 6σ ile 12σ arasında olması durumunda en yüksek OBO'larını vermemektedir. Dolayısıyla her durumda geçerli bir en uygun c değeri bulunamamaktadır. Ayrıca c değerinin sabit değil ölçüden ölçüye değişecek şekilde, yani c= $z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{(Q_{vv})_{ii}}$ alınması gerektiği de önerilmektedir (Xu 1993; Wicki 1999).

Kaba hatalı ölçü nasıl belirlenecektir? Bu konuda da bir birlik yoktur. Genellikle (17) eşitsizliği uygulanır ve k için 2.5 (Rousseeuw ve Leroy 1987) veya 3 (Hekimoğlu ve Koch 1999) seçilmektedir. Test yöntemleri uygulandığındaki kaba hata tanımı, robust yöntemlerden farklıdır. Eğer örnek küme kaldıraç noktaları içeriyorsa, bu durumda en başarılı yöntem LMS yöntemidir. Eşredundanslı tasarım dikkate alındığı durumda, M- Kestiricilerin OBO'ları artmaktadır. Eğer örnek kümede kaldıraç noktaları yoksa ve eşredundanslı tasarım uygulanmışsa, bu durumda kısmi redundansları küçük olan ölçülerdeki olası kaba hatalar daha başarılı olarak belirlenmesine karşın, redundansları bağıl olarak daha büyük olan ölçülerdeki olası kaba hataların belirlenme başarıları, eşredundanslı tasarım uygulanmadığı duruma göre düşmektedir. Ölçülerde çok büyük genlikli, örneğin 1000σ veya daha büyük, kaba hataların bulunması halinde, bazı robust yöntemler, örneğin Danimarka yöntemi, kırılmıştır. Bazıları ise, örneğin LMS ve L_1–norm yöntemleri, kırılmamıştır. Eğer bu tür kaba hatalar kısmi redundansları küçük olan ölçülerde olursa, eşredundanslı tasarımın dikkate alınması robust yöntemlerin başarısını arttırmaktadır. Kritik kaba hatalar belirlenmesi en zor kaba hatalardır. Tüm yöntemlerin OBO'ları rasgele kaba hataların olması durumuna göre çok düşüktür. Genellikle robust yöntemler uyuşumsuz ölçü testlerine göre daha başarılıdır. LMS, robust yöntemler içinde en başarılı olandır.

c. Bir tek örnek küme yeterli mi?

Genellikle gerek uyuşumsuz ölçü test sonuçlarının robust yöntemlerle ve gerekse farklı robust yöntemlerin birbiriyle karşılaştırılması yapılırken tek bir örnek kümeden elde edilen sonuçlar kullanılmaktadır. Bu tam doğru değildir. Deneyimlere göre, uygulanan yöntemin kaba hataların tümünü belirleme başarısı kirletilmiş örnek kümeden örnek kümeye belirgin olarak değişmektedir. Ayrıca bu başarı örnek kümedeki ölçüden ölçüye bağlı olarak da değişir. Bu nedenle çok sayıda yapılan deneylerin sonuçlarının ortalamasını almak gerekir. Zaten ortalama başarı oranı kavramı da bu gereksinimden doğmuştur.

8. SONUÇLAR

Eğer örnek kümede hiçbir kaldıraç noktası, yahut çok büyük genlikli kaba hatalı ölçü yoksa, robust yöntemler, uyuşumsuz ölçüleri belirlemede, uyuşumsuz ölçü testlerinden daha başarılıdır. Bu nedenle robust yöntemler veya güvenirlikleri arttırılmış uyuşumsuz ölçü testleri kullanılmalıdır. Eğer örnek kümede bir veya birden fazla kaldıraç noktası bulunuyorsa, özellikle robust yöntemlerden LMS kullanılmalıdır. Daha az başarılı olmakla birlikte, diğer robust yöntemler, örneğin Huber, Danimarka ve L_1-norm yöntemleri, eşredundanslı tasarım dikkate alınarak kullanılabilir. Örnek kümede çok büyük genlikli kaba hatalar varsa, LMS, L_1-norm ve uyuşumsuz ölçü testleri uygulanabilir.

Doğal olarak önceden, örnek kümede kaldıraç noktası veya çok büyük genlikli uyuşumsuz ölçünün bulunup bulunmadığını, basit regresyon dışında şekil çizerek belirlenemez. Böyle bir olasılığı göz önüne almak için, önce örnek kümeye LMS gibi kırılma noktası yüksek bir robust yöntem ve daha sonra OBO'ları diğer robust yöntemlerden daha büyük olan bir robust yöntem uygulanmalıdır. Araştırmalara göre, Huber M-Kestirimi, L_1-norm veya Danimarka yöntemi veya güvenirlikleri arttırılmış uyuşumsuz ölçü testleri önerilir.LMS yöntemi, bilgisayarda çok zaman aldığından dolayı uygulanmazsa, bu yönteme seçenek olarak, eşredundanslı tasarımlı Huber-M kestirim veya L_1-norm yöntemi önerilebilir. Örnek kümede hiçbir uyuşumsuz ölçü yoksa ve Baarda uyuşumsuz ölçü testi bu örnek kümeye uygulanmışsa, bu test büyük bir güvenle fazladan bir kaba hatalı ölçü üretmez. Fakat, bu örnek kümeye herhangi bir robust yöntem veya Pope testi (α=0.05 alınırsa) uygulanırsa, fazladan bir ölçüyü, belli bir OBO ile uyuşumsuz gösterebilmektedir. Bu bir risktir. Bu durumda hem robust yöntemler ve hem de Baarda testi veya Pope testi (α=0.01 almak koşuluyla) uygulanmalı ve sonuçlar büyük bir özenle değerlendirilmelidir.

K A Y N A K L A R

/1/ Aksoy, A. : Uyuşumsuz Ölçüler Testi. Harita Dergisi, 93, 1984.

/2/ Ayan, T. : Uyuşumsuz Ölçüler Testi. Harita ve Kadastro Mühendisliği, Sayı 72, 1992.

/3/ Ayhan, E. Aksoy, Z.N. : Robust Kestirim ve Kaba Hatalı Ölçülerin Belirlenmesi. Harita Dergisi, Sayı 106, 1991.

/4/ Baarda, W. : A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Netherlands Geodetic Com., New Series, Delft, Netherlands, 2(5), 1968.

/5/ Barrodale, I., Roberts, F.D.K : Solution of an Over Determined System of Equations in L_1- norm. Comm. ACM, vol. 17: 319-320, 1974.

/6/ Chatterjee, S., Hadi, AS. : Sensitivity Analysis in Linear Regression. John Wiley&Sons, Inc., New York, 1988.

/7/ Donoho, D.L., Huber, P.J : The Notion of Breakdown Point. In a Festschrift for Erich Lehmann, P.J.Bickel, K.A.Doksum, and J.L.Hodges, Jr. (Eds), Wadsworth, Belmont, Cal.:157-184, 1983.

/8/ Hadi, A.S., Siminoff, J.S. : Procedures for the Identification of Multiple Outliers in Linear Models. J. Am. Stat. Assoc.88: 1264-1272, 1993.

/9/ Hampel, F., Ronchetti, E., Rousseeuw, P., Stahel, W. : Robust Statistics: The approach based on influence functions. John Wiley and Sons, New York, N.Y., 1986.

/10/ He, X., Simpson, D.G., Portnoy, S.L : Breakdown Robustness of Tests. J. Am. Statistical. Assn., 85: 446-452, 1990.

/11/ Hekimoğlu, Ş. : The Finite Sample Breakdown Points of the Conventional İterative Outlier Detection Procedures. J. Surv. Eng., ASCE, 123(1), 15-31, 1997.

/12/ Hekimoğlu, Ş. : Equiredundancy Design and its Application to M-Estimation. J.Surv. Eng., ASCE, 124(3):103-124, 1998.

/13/ Hekimoğlu, Ş., Koch, K.R. : How Can Reliability of the Robust Methods Be Measured? Third Turkish-German Joint Geodetic Days. 1-4 June 1999, Istanbul, Vol.1, 179-196, 1999

/14/ Hekimoğlu, Ş., Koch, K.R. : How Can Reliability of Tests for Outliers Be Measured ? AVN, 107(7): 247-254, 2000.

/15/ Hekimoğlu, Ş. : Do Robust Methods İdentify Outliers More Reliably Than Conventional Tests For Outliers? Zfv, 130, 3, 174-180, 2005.

/16/ Hekimoğlu, Ş. : Increasing Reliability of Data Snooping when Outliers are Small. AVN, 112(1): 7-12, 2005

/17/ Hekimoğlu, Ş. : Increasing Reliability of the Tests for Outliers Whose Magnitude is Small. Survey Review, 38(298): 274-285, 2005

/18/ Huber, P.J. : Robust Estimation of a Location Parameter. Annals of Mathematical Statistics, 35: 73-101, 1964.

/19/ Huber, P.J. : Robust Statistics. John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1981.

/20/ Kampmann, G. : Robuste Deformationsanalyse mittels balancierter Ausgleichung. AVN, 101: 8-17, 1994.

/21/ Koch, K.R. : Robuste Parameterschaetzung. AVN, 103:1-18, 1996.

/22/ Koch, K.R. : Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models. 2nd Ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999.

/23/ Krarup, T., Juhl, J., Kubik, K : Götterdaemmerung over Least Squares Adjustment. Procedings. 14th Congres of Int. Soc. Photogr. Hamburg, 1980.

/24/ Markatou, M., Hettmansperger, T.P : Robust Bounded-influence Tests in Linear Models. J. Am. Stat. Assoc., 85: 187-190, 1990.

/25/ Niemeier, W. : Ausgleichungsrechnung. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002.

/26/ Öztürk, E., Şerbetçi, M. : Dengeleme Hesabı III. KTÜ, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Trabzon,1992.

/27/ Pope, A.J. : The Statistics of Residuals and the Detection of Outliers. NOAA Technical Report. NOS 65 NGS 1, U.S. Dept. of Commerce, Rockville, Md., 1976.

/28/ Rousseeuw, P.J., Leroy, A.M. Robust Regression And Outlier Detection. John Wiley and Sons. Inc., New York, N.Y., 1987.

/29/ Staudte, R.G., Sheather, S.J : Robust Estimation and Testing. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley&Sons. Inc, New York, 1990.

/30/ Ulsoy, E. : Dengeleme Hesabı. İDMMA, İstanbul, 1974.

/31/ Wicki, F. : Robuste Schaetzverfahren für die Parameterschaetzung in geodatischen Netzen. Mitteilung Nr. 67, Institut für Geodaesie und Photogrammetrie, Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich, 1999.

/32/ Wilcox, R.R.: : Introduction to Robust Estimation And Hypothesis Testing. Academic Press, New York, 1997.

/33/ Wolf, H. : Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Dümmlers Verlag, Bonn, 1968.

/34/ Xu, PL. : Consequences of Constant Parameters and Confidence İntervals of Robust Estimation. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 52: 231–249, 1993.

/35/ Xu, PL. : Sign-constrained Robust Least Squares; Subjective breakdown point and the effect of weights of observations on robustness. Journal of Geodesy, 2005.

/36/ Yaşayan, A. : Robust Kestirim Kavramı, İlkesi ve Uygulamaları Üzerine İrdelemeler. Harita ve Kadastro Mühendisliği, 56-66, 1992.