

JEODEZİK TEMEL PROBLEMLERİN SAYISAL İNTEGRASYON YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Ahmet KAYA
Ömer YILDIRIM

ÖZET

Jeodezik uygulamalarda, elipsoid üzerinde jeodezik temel problemlerin çözümü için bugüne kadar çeşitli yöntemler kullanılmıştır. Bu yazıda, jeodezik eğrinin diferansiyel denklemlerine sayısal integrasyon yönteminin uygulanmasıyla elipsoid üzerinde jeodezik temel problem çözümü ele alınmış; yöntemin uygulanışına ait algoritmalar ve alt programlar verilmiştir.

ABSTRACT

In this paper, the direct and inverse geodetic problems on the ellipsoid are formulated first in a general way, and specified for computations on the Hayford Ellipsoid. Algorithms and the solutions are given with a computer program based on numerical integration methods.

1. GİRİŞ

Yeryüzünün geometrik şeklini temsil eden hesap yüzeyi olarak kullanılan dönel elipsoid üzerindeki jeodezik hesaplamaların önemli bir kısmı “jeodezik temel problemler” olarak bilinen çözümlerle ilgilidir.

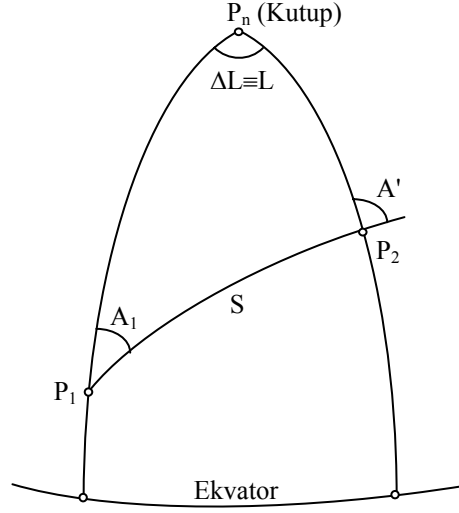
Tanım olarak "Birinci Jeodezik Temel Problem"; elipsoidal koordinatları bilinen bir P_1 noktasından ikinci bir P_2 noktasına olan jeodezik eğrinin S uzunluğu ve A_1 azimutu yardımıyla söz konusu P_2 noktasının elipsoidal koordinatlarının ve A_2 karşı azimutunun hesaplanmasıdır. Bunun tersine, elipsoidal koordinatları bilinen P_1 ve P_2 noktası arasındaki jeodezik eğrinin S uzunluğunun ve bu eğrinin iki ucundaki A_1 , A_2 azimutlarının hesabı da "İkinci Jeodezik Temel Problem"i teşkil eder (Şekil-1).

Bu hesaplamalar için dönel elipsoid üzerinde farklı koordinat sistemleri kullanılabilirse de; bütün elipsoid yüzeyinde tek anlamlı olması, diğer koordinat sistemlerine dönüşüm yapılabilmesi gibi nedenlerle genellikle coğrafi koordinat sistemi tercih edilir. Burada jeodezik temel problemlerin elipsoid coğrafi koordinat sistemindeki çözümleri söz konusu edilecektir.

Elipsoid üzerinde jeodezik temel problemlerin çözümü konusunda ilgili literatürde değişik hesap algoritmaları ve yöntemlerden hareket eden çok sayıda çözüm yolu bilinmektedir. Söz konusu çözüm yöntemlerine genel olarak bakıldığında; hesap algoritmalarının formül yapısını biraz da hesabın yürütüleceği hesap aracının kapasitesi ve türü (hesap makinesi, bilgisayar vb) etkilemektedir /2/.

Bilgisayarların yaygın kullanılması ve programlama imkanlarının devreye girmesi ile uzun, karmaşık hatta elle birkaç adımdan sonra mümkün olmayacak tekrarlı hesap işlemlerinden gelebilecek zorluklar, bugün için önemini yitirmiştir denilebilir. O halde

çözümlere ait temel denklemler, bilinmesine rağmen önceleri hesap pratiği nedeniyle pek tercih edilmeyen sayısal integrasyon yöntemleri ile yeni bir bakışla değerlendirilebilir.



Şekil-1: Jeodezik temel problemlerin elemanları ($A_2 = A'_2 \pm \pi$)

2. DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Birinci dereceden bir diferansiyel denklem

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad y(x_1) = y_1 \quad (1)$$

şeklinde verilsin. Başlangıç şartı olarak x_1 değeri için $y(x_1)$ değeri bilinmektedir. Belirli olan x_i değeri için $y(x_i)$ çözüm fonksiyonu aranmaktadır. Runge-Kutta yöntemiyle çözüm aşağıdaki şekilde ifade edilir /1/, /5/, /7/.

Tanım aralığı, n adet küçük $\Delta x = (x_2 - x_1)/n$ aralığına bölünür, böylece iki komşu ordinat değeri için aşağıdaki eşitlik geçerli olur.

$$y(x + \Delta x) = y(x) + y'(x, y(x))\Delta x$$

$\Delta y^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$ ara değerleri aşağıdaki formüllerle iki komşu ordinatının farkı için hesaplanır.

$$\begin{aligned}\Delta y^{(1)} &= y'(x, y)\Delta x \\ \Delta y^{(2)} &= y'\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y^{(1)}}{2}\right)\Delta x \\ \Delta y^{(3)} &= y'\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y^{(2)}}{2}\right)\Delta x \\ \Delta y^{(4)} &= y'(x + \Delta x, y + \Delta y^{(3)})\Delta x\end{aligned}$$

Böylece aranan $y(x+\Delta x)$ değeri ise

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \frac{1}{6} \left\{ \Delta y^{(1)} + 2[\Delta y^{(2)} + \Delta y^{(3)}] + \Delta y^{(4)} \right\} \quad (2)$$

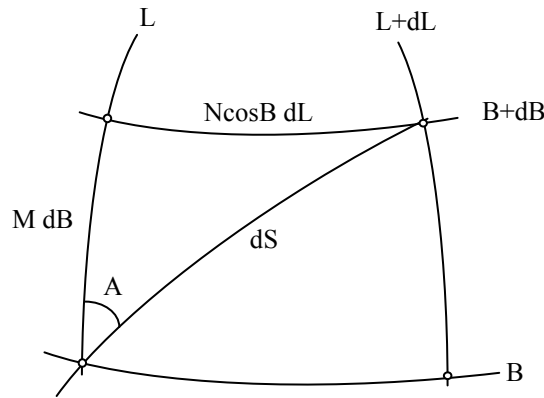
olarak elde edilir.

3. DÖNEL ELİPSOİD ÜZERİNDE JEODEZİK EĞRİNİN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

Yüzey parametreleri, B coğrafi enlemi ve L coğrafi boylam ile verilen bir dönel elipsoidin yarı eksenleri a ve b ile gösterilirse, aşağıdaki temel tanımlar verilebilir /6/.

$$\begin{aligned}e'^2 &= (a^2 - b^2) / b^2 \\ c &= a^2 / b \\ V^2 &= 1 + e'^2 \cos^2 B \\ M &= c / V^3 \\ N &= c / V\end{aligned} \quad (3)$$

Bu değerlerden a, b, c ve e'^2 seçilen bir elipsoid için sabit olup; V, N ve M ise B coğrafi enleminin fonksiyonudurlar.



Şekil-2 : Dönel elipsoidde meridyen, paralel daire ve jeodezik eğrinin sınırladığı diferansiyel üçgen

Enlem ve boylam parametre çizgileri elipsoidde ortogonal bir ağ oluşturduklarından, Şekil-2'ye göre A azimutu ve jeodezik eğrinin dS yay elemanı için diferansiyel anlamda

$$\begin{aligned} dS \cos A &= M dB \\ dS \sin A &= N \cos B dL \end{aligned} \quad (4)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bunlardan başka jeodezik eğri için elipsoid coğrafi koordinat sisteminde, "Bessel denklemi" olarak bilinen

$$dA = \sin B dL \quad (5)$$

denklemini ve "Azimut denklemi" denilen

$$\frac{dA}{dS} = \frac{1}{N} \tan B \sin A \quad (6)$$

denklemini yazılabilir /4/, /6/. Ayrıca elipsoid üzerindeki jeodezik eğrinin her noktasındaki paralel daire yarıçapı ile azimutun sinüsü çarpımı sabittir. "Clairaut kanunu" olarak bilinen bu temel denklem

$$N \cos B \sin A = \text{sabit} = k \quad (7)$$

olarak ifade edilir.

Böylece kullanacağımız temel diferansiyel eşitlikler aşağıdaki şekilde topluca yazılabilirler.

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dS} &= \frac{\cos A}{M} \\ \frac{dL}{dS} &= \frac{\sin A}{N \cos B} \\ \frac{dA}{dS} &= \sin B \frac{dL}{dS} = \frac{\tan B \sin A}{N} \end{aligned} \quad (8)$$

Karşılaştırılırsa; (8) denklemlerinin her biri ile (1) diferansiyel denkleminin aynı yapıda olduğu görülür.

Bu denklemler esas itibarıyla birinci jeodezik temel probleme uygundur. Eğer başlangıç değerleri B_1, A_1 yardımıyla bilinen P_1 noktasında Clairaut sabiti k hesaplanır ve (8) eşitliğinde yerine konularsa; bu denklemler yerine basitleşmiş bir sistem elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dS} &= \frac{\cos A}{M} \\
\frac{dL}{dS} &= \sin^2 A \frac{1}{k} \\
\frac{dA}{dS} &= \sin B \frac{dL}{ds}
\end{aligned}
\tag{8a}$$

İkinci temel problem için diferansiyel denklemler, boylam farkına göre düzenlenerek

$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dL} &= \frac{dB}{dS} \frac{dS}{dL} \\
\frac{dA}{dL} &= \frac{dA}{dS} \frac{dS}{dL} \\
\frac{dS}{dL} &= \frac{N \cos B}{\sin A}
\end{aligned}$$

olarak düşünülebilir. İlgili formüllerden karşılıkları yerlerine konulur ve sadeleştirilirse;

$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dL} &= \cot A \cos B V^2 \\
\frac{dA}{dL} &= \sin B \\
\frac{dS}{dL} &= \frac{N \cos B}{\sin A}
\end{aligned}
\tag{9}$$

denklemleri yazılabilir.

Elipsoidin dönel simetrisi nedeniyle, boylamlar için sadece $L=L_2-L_1$ boylam farkı önemlidir.

4. JEODEZİK TEMEL PROBLEMLER

a. Birinci jeodezik temel problem

Direkt problem de denilen birinci temel problem, başlangıç değer problemi özelliğindedir ve (8) sistemleriyle, sayısal integrasyonla çözülür. İkinci temel problem de birinci temel probleme dayandırıldığından, burada birinci temel problem daha geniş bir şekilde anlatılacaktır.

Runge-Kutta yöntemini kullanmak için, verilen S kenarı önce n adet küçük $\Delta S=S/n$ parçaya bölünür, ardından, başlangıç değerinden başlayarak komşu nokta için koordinatlar ve azimut hesaplanır.

Böylece ilk ΔS parçacığı için aşağıdaki hesaplama adımları geçerlidir.

$$\begin{aligned}
\Delta B^{(j)} &= f^B(A_j, B_j) \Delta s = (\cos A / M) \Delta s \\
\Delta L^{(j)} &= f^L(A_j, B_j) \Delta s = (\sin^2 A / k) \Delta s \\
\Delta A^{(j)} &= f^A(A_j, B_j) \Delta s = \Delta L^{(j)} \sin B \Delta s
\end{aligned} \tag{10}$$

Dört adımlı Runge-Kutta yönteminin adımlarını belirten j değerine göre kullanılacak A_i azimutu ve B_i coğrafi enlem değerleri aşağıda gösterilmiştir.

	A_i	B_i
j=1	A_1	B_1
j=2	$A_1 + \frac{\Delta A^{(1)}}{2}$	$B_1 + \frac{\Delta B^{(1)}}{2}$
j=3	$A_1 + \frac{\Delta A^{(2)}}{2}$	$B_1 + \frac{\Delta B^{(2)}}{2}$
j=4	$A_1 + \Delta A^{(3)}$	$B_1 + \Delta B^{(3)}$

Bu değerlerle B coğrafi enlemi, L coğrafi boylam farkı ve A azimutu için bir iterasyon adımında kullanılacak olduğumuz formüller ise

$$\begin{aligned}
B &= B_1 + \frac{1}{6} \{ \Delta B^{(1)} + 2[\Delta B^{(2)} + \Delta B^{(3)}] + \Delta B^{(4)} \} \\
L &= L_1 + \frac{1}{6} \{ \Delta L^{(1)} + 2[\Delta L^{(2)} + \Delta L^{(3)}] + \Delta L^{(4)} \} \\
A &= A_1 + \frac{1}{6} \{ \Delta A^{(1)} + 2[\Delta A^{(2)} + \Delta A^{(3)}] + \Delta A^{(4)} \}
\end{aligned} \tag{11}$$

olarak ifade edilir.

Böylece elde edilen B, L, A değerleri, sonraki ΔS değerlerinin n adet döngüsünde başlangıç değerlerini teşkil ederler.

Ek-1'de verilen "RUNGE1" alt programında; birinci jeodezik temel problemdeki (8a) denklemleri için FUNCTION deyimi ile uygun fonksiyonlar tanımlanmıştır. Bunlar formül sıraları ile;

```

FUNCTION f1B# (B#, A#)
FUNCTION f1L# (A#)
FUNCTION f1A# (B#, A#)

```

şeklinde çift duyarlıklı olarak tanımlanmışlardır. "RUNGE1" alt programının parametreleri olarak ta;

$$(B1\#, L1\#, A1\#, S\#, B2\#, L2\#, A2\#, n\%)$$

görülmektedir. B1, L1, A1 ve S birinci jeodezik temel problemin giriş verileri, B2, L2, A2 de çözüm değerleridir. "n" sayısı ise istenilen iterasyon sayısıdır. Programda açı değerlerinin "radyan" biriminde olduğu hatırlanmalıdır. "RUNGE1" alt programında (10) ve (11) ile verilmiş olan Runge-Kutta adımları FOR-NEXT döngüsü içinde açık olarak görülmektedir.

Diferansiyel denklemlerin her bir satırı için yukarıdaki gibi FUNCTION deyimi kullanılması sonucunda alt program daha sade bir görünüm kazanmıştır. Ayrıca sadece ilgili fonksiyonlar değiştirilerek benzer problemlere de uygulayabilmek kolay hale gelmiştir.

b. İkinci jeodezik temel problem

İnvers problem de denilen 2.temel problemde boylam farkı olan L önceden verilip, yay boyu S arandığından (9) sistemlerine dayandırılmalıdır. İkinci jeodezik temel problemde de, birinci jeodezik temel problemin adımları aynen uygulanır. (9) denklem sistemlerinde de (8)'e benzediğinden aynı düşünceyle hareket edilir ve sol tarafın payını yalnız bırakarak çözüm adımları için gerekli olan bağıntıları elde ederiz.

Başlangıç azimutu bilinmediğinden hesaba yaklaşık azimutla girilecektir. Bunun için A_1^0 yaklaşık azimut değeri küresel çözümle,

$$\tan A_1^0 = \frac{\sin L}{\cos B_1 \tan B_2 - \sin B_1 \cos L} \quad (12)$$

formülünden elde edilir /6/. Bu azimut değeri kullanılarak son nokta için hesaplanan yaklaşık enlem B_2^0 genellikle verilen değerden farklı olur. Fark $\delta B_2 = B_2 - B_2^0$ ile gösterilirse, (12) denkleminin diferansiyelinin alınmasıyla başlangıç azimutu için diferansiyel düzeltme

$$dA_1^0 = -\frac{\sin A_1^0 \sin A_2^0}{\sin L \cos B_2} \delta B_2 \quad (13)$$

olarak elde edilir ve bu formülle başlangıç azimut değeri düzeltilir. Hesaplanan enlem, önceden verilen değerle tam olarak uyuncaya kadar azimut düzeltilerek iterasyona devam edilir.

İkinci jeodezik temel problem için Ekte verilen "RUNGE2" alt programında da bir öncekine benzer kalıpla; ikinci jeodezik temel problemdeki (9) denklemleri için FUNCTION deyimi ile uygun fonksiyonlar formül sıraları ile;

```
FUNCTION f2B# (B#, A#)
FUNCTION f2A# (B#)
FUNCTION f2S# (B#, A#)
```

şeklinde çift duyarlıklı olarak tanımlanmışlardır. "RUNGE2" alt programının parametreleri olarak ta;

(B1#, L1#, B2#, L2#, A1#, A2#, S#, n%)

görülmektedir. B1, L1, B2, L2 ikinci jeodezik temel problemin giriş verileri, A1, A2 ve S de çözüm değerleridir. Buradaki "n" sayısı ise istenilen hesap inceliğinin sağlandığı iterasyon sayısıdır.

Programın başlangıcında A_1 azimutu için yaklaşık değer, (12) küresel çözüm formülü kullanılarak (açı için bölge irdelemesi yapan Atan2 fonksiyonu ile) hesaplanır. Hesaplarda dB_2 (veya dA_1^0) farkı için iterasyonu durdurma kriteri olarak 1.10^{-16} radyan değeri kullanılmıştır.

5. SAYISAL UYGULAMA

Sayısal örnekler; QuickBASIC Programlama dilinde yazılan programla her iki jeodezik temel problem için, değişik kenar ve azimut bölgelerinde test edilmiştir. Hayford Elipsoidi sabitleri aşağıdadır:

$$\begin{aligned} a &= 6\,378\,388.000 \text{ m} \\ c &= 6\,399\,936.60811 \text{ m} \\ e^2 &= 0.006\,768\,170\,197\,224 \end{aligned}$$

a. Birinci jeodezik temel problem

Verilenler:

$$\begin{aligned} B_1 &= 39^\circ 35' 18.8664'' & L_1 &= 29^\circ 10' 26.1487'' \\ A_1 &= 63^\circ 33' 28.9188'' & S &= 103920.142 \text{ m.} \end{aligned}$$

n=1 için çözüm:

$$\begin{aligned} B_2 &= 40^\circ 00' 0.8763'' & L_2 &= 30^\circ 15' 48.7551'' \\ A_2 &= 244^\circ 15' 19.5842'' \end{aligned}$$

n=2 için

$$\begin{aligned} B_2 &= 40^\circ 00' 0.8763'' & L_2 &= 30^\circ 15' 48.7551'' \\ A_2 &= 244^\circ 15' 19.5842'' \end{aligned}$$

n=4 için

$$\begin{aligned} B_2 &= 40^\circ 00' 0.8763'' & L_2 &= 30^\circ 15' 48.7551'' \\ A_2 &= 244^\circ 15' 19.5842'' \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, birinci jeodezik temel problemde tüm iterasyon değerlerinde istenilen doğruluk elde edilmiştir.

b. İkinci jeodezik temel problem

Verilenler:

$$B_1 = 39^\circ 35' 18.8664'' \quad L_1 = 29^\circ 10' 26.1487''$$

$$B_2 = 40^\circ 00' 00.8763'' \quad L_2 = 30^\circ 15' 48.7551''$$

Çözüm:

$$n=6$$

$$A_1 = 63^\circ 33' 28.9187'' \quad A_2 = 244^\circ 15' 19.5841''$$

$$S = 103920.1416 \text{ m.}$$

6. SONUÇ

Elipsoidde jeodezik temel problemlerin, diğer çözüm yöntemleri yanında, jeodezik eğrinin temel diferansiyel denklemlerine dayanan ve oldukça sade algoritmalarla ifade edilen sayısal integrasyon yöntemiyle çözümü açıklanmıştır. Burada verilen algoritma ve alt programlar, çok temel programlama bilgilerine dayanmakta olup; arzu edilirse kolayca diğer programlama dillerine de uygulanabilir.

Çözüm için kullanılan alt program ve fonksiyonlar, QuickBASIC dilinde programlanarak çeşitli kenar ve azimut değerleriyle test edilmişlerdir. Her iki jeodezik temel problemin çözümü ortak olarak 100 Km'ye kadar olan kısa kenarlarda uygulandığında; enlem ve boylamlar için $1''.10^{-4}$, Azimutlar için $1''.10^{-3}$ ve kenarlar için 0.001m doğrulukla sonuçlar elde edilmiştir.

(8) formüllerindeki diferansiyel denklemlerin, birinci jeodezik temel problem verileriyle hiçbir düzenleme yapmadan doğrudan sayısal integrasyon formüllerine uygulanabildiği görülmektedir. Bunun sonucu olarak "n" iterasyon sayısı arttırılmak suretiyle kenar uzunluğu, orta mesafeler denilen 1000 Km'lik temel problem çözümlerinde bile aynı hesap inceliği ile uygulanabilir. Böylece çözüm yöntemi birinci jeodezik temel problem için klasik çözümlerle eşdeğerdir.

İkinci jeodezik temel problem için, başlangıçta bilinmeyen A_1 azimutunun yaklaşık değeri küresel çözümle hesaplanmaktadır ve bu işlem verilen çözüm yönteminin orta uzunluktaki problemlere uygulanması için bir dezavantaj oluşturmaktadır.

Ek-1: QuickBASIC dilinde hazırlanan alt program örnekleri

```
FUNCTION f1A#(B#, A#) STATIC
  SHARED k#
  f1A# = f1L#(A#) * SIN(B#)
END FUNCTION
```

```
FUNCTION f1B#(B#, A#) STATIC
  SHARED e2#, c#
  f1B# = COS(A#) * (SQR(1# + e2# * COS(B#) ^ 2)) ^ 3 / c#
END FUNCTION
```

```
FUNCTION f1L#(A#) STATIC
```

```

    SHARED k#
    f1L# = SIN(A#) ^ 2 / k#
END FUNCTION

```

```

-----
SUB RUNGE1(B1#, L1#, A1#, S#, B2#, L2#, A2#, n%) STATIC
-----

```

```

    SHARED e2#, c#, k#
    pi# = 4# * ATN(1#)
    k# = c# * COS(B1#) * SIN(A1#) / (SQR(1# + e2# * COS(B1#) ^ 2))
    B# = B1#: A# = A1#: L# = 0: ds# = S# / n%

```

```

FOR i% = 1 TO n%

```

```

    DB1# = f1B#(B#, A#) * ds#
    DL1# = f1L#(A#) * ds#
    DA1# = f1A#(B#, A#) * ds#

```

```

    DB2# = f1B#(B# + DB1# / 2#, A# + DA1# / 2#) * ds#
    DL2# = f1L#(A# + DA1# / 2#) * ds#
    DA2# = f1A#(B# + DB1# / 2#, A# + DA1# / 2#) * ds#

```

```

    DB3# = f1B#(B# + DB2# / 2#, A# + DA2# / 2#) * ds#
    DL3# = f1L#(A# + DA2# / 2#) * ds#
    DA3# = f1A#(B# + DB2# / 2#, A# + DA2# / 2#) * ds#

```

```

    DB4# = f1B#(B# + DB3#, A# + DA3#) * ds#
    DL4# = f1L#(A# + DA3#) * ds#
    DA4# = f1A#(B# + DB3#, A# + DA3#) * ds#

```

```

    DB# = (DB1# + 2# * (DB2# + DB3#) + DB4#) / 6#: B# = B# + DB#
    DL# = (DL1# + 2# * (DL2# + DL3#) + DL4#) / 6#: L# = L# + DL#
    DA# = (DA1# + 2# * (DA2# + DA3#) + DA4#) / 6#: A# = A# + DA#

```

```

NEXT i%

```

```

    A2# = A#: B2# = B#: L2# = L1# + L#
    IF A2# > pi# THEN A2# = A2# - pi# ELSE A2# = A2# + pi#
END SUB

```

```

FUNCTION Atan2#(dy#, dx#)

```

```

    IF dx# < 0 THEN
        Atan2# = 4# * ATN(1#) + ATN(dy# / dx#)
    ELSEIF dy# < 0 THEN
        Atan2# = 8# * ATN(1#) + ATN(dy# / dx#)
    ELSE
        Atan2# = ATN(dy# / dx#)
    END IF
END FUNCTION

```

```

FUNCTION f2A#(B#) STATIC

```

```

    f2A# = SIN(B#)
END FUNCTION

```

```

FUNCTION f2B#(B#, A#) STATIC

```

```

    SHARED e2#
    f2B# = COS(B#) * (1# + e2# * COS(B#) ^ 2) / TAN(A#)
END FUNCTION

```

```

FUNCTION f2S#(B#, A#) STATIC

```

```

    SHARED e2#, c#
    f2S# = c# * COS(B#) / (SQR(1# + e2# * COS(B#) ^ 2) * SIN(A#))
END FUNCTION

```

```

-----
SUB RUNGE2 (B1#, L1#, B2#, L2#, A1#, A2#, S#, n%) STATIC
-----
pi# = 4# * ATN(1#): L# = L2# - L1#
A1# = Atan2#(SIN(L#), COS(B1#) * TAN(B2#) - SIN(B1#) * COS(L#))
dL# = L#: n% = 0

DO
  B# = B1#: A# = A1#

  DB1# = f2B#(B#, A#) * dL#
  DA1# = f2A#(B#) * dL#
  DS1# = f2S#(B#, A#) * dL#

  DB2# = f2B#(B# + DB1# / 2#, A# + DA1# / 2#) * dL#
  DA2# = f2A#(B# + DB1# / 2#) * dL#
  DS2# = f2S#(B# + DB1# / 2#, A# + DA1# / 2#) * dL#

  DB3# = f2B#(B# + DB2# / 2#, A# + DA2# / 2#) * dL#
  DA3# = f2A#(B# + DB2# / 2#) * dL#
  DS3# = f2S#(B# + DB2# / 2#, A# + DA2# / 2#) * dL#

  DB4# = f2B#(B# + DB3#, A# + DA3#) * dL#
  DA4# = f2A#(B# + DB3#) * dL#
  DS4# = f2S#(B# + DB3#, A# + DA3#) * dL#

  DB# = (DB1# + 2# * (DB2# + DB3#) + DB4#) / 6#: B# = B1# + DB#
  DA# = (DA1# + 2# * (DA2# + DA3#) + DA4#) / 6#: A# = A1# + DA#
  DS# = (DS1# + 2# * (DS2# + DS3#) + DS4#) / 6#

  BF# = B2# - B#

  farkA# = -SIN(A1#) * SIN(A#) * BF# / (SIN(L#) * COS(B2#))
  A1# = A1# + farkA#
  n% = n% + 1

LOOP UNTIL ABS(BF#) < 1D-16
S# = DS#: A2# = A#
IF A2# > pi# THEN A2# = A2# - pi# ELSE A2# = A2# + pi#

END SUB

```

KAYNAKLAR

- /1/ Jeffrey, A. : Mathematics for Engineers and Scientists, 879 s. ELBS, Chapman and Hall, London, 1990.
- /2/ Kaya, A. : Elipsoidin Küreye Konform tasviri Yoluyla Jeodezik Temel Problemlerin Çözümü Üzerine Bir İnceleme. (Doktora tezi) KÜ Fen Bilimleri Enstitüsü yayını No:7, Trabzon, 1984.
- /3/ Kaya, A. : İzometrik Enlem Kavramı ve Coğrafi Enlemler Arasındaki Dönüşümler, Harita Dergisi, Harita Genel Komutanlığı, Sayı:112, s.30-39, Ankara, 1994.
- /4/ Kivioja, L. A. : Computation of geodetic direct and indirect problems by computers accumulating increments from geodetic line elements. Bull. Geod., No.99, p 55-63, 1971.
- /5/ Lichtenegger, H. : Zur numerischen Lösung geodaetischer Hauptaufgaben auf dem Ellipsoid, ZFV 10/1987, p. 508-515, 1987.
- /6/ Özbenli, E. : Jeodezi, 517 s. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi Yayını No: 45, Trabzon, 1991.
- /7/ Yakushko, G. G. : Solution of the main geodetic problems by numerical integration using the Runge-Kutta method. Geodesy and Aerophotogrammetry, No.6, p.378-381, 1968.