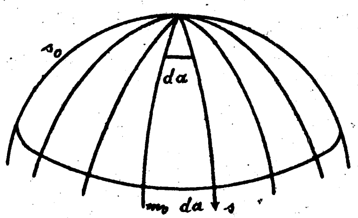
Jeodezik şua huzmesinin müstevi, konform ve şekle sadık olarak irtisamı

Yazan :
F. Hunger

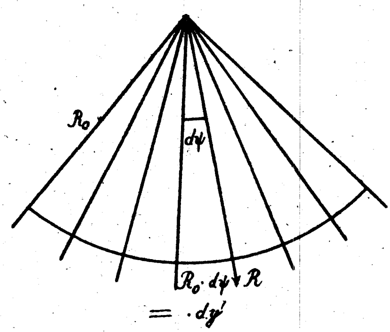
Çeviren :
Ekrem Ulsoy

1. Problem

Ellipsoid şeklinde olan dünyamız üzerindeki Meridiyenler, başı kutup noktası olan bir jeodezik hatlar huzmesi teşkil ederler. (Şekil 1 a) Bu meridiyenler, stereogratik projeksiyon, merkatör projeksiyon ve Lambert tarafından bulunmuş olan konik projeksiyon gibi bazı konform irtisamlarda hattı müstakim olarak irtisam ederler.



Şeki: 1 a



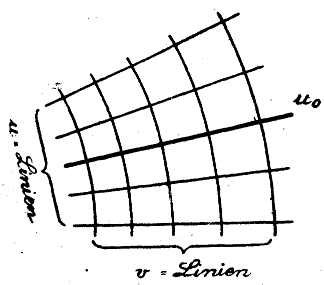
Şekil: 1 b

Biz, bir huzmeye ait bütün jeodezik hatların hattı müstakim olarak irtisam ettiği bir irtisam tarzına, jeodezik hatların şekle sadık irtisamı ismini vereceğiz. Zira, şekli gayet mühim olan bu münhanilerin inhinası irtisam dolayısile değişmez. Gerek bu hatların jeodezik inhinası gerekse mütevideki hatların inhinası sıfırdır.

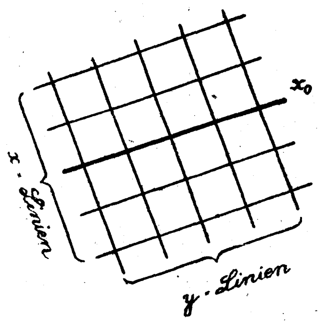
Bu yazı ile lâlettayin şua huzmelerinin müstevi üzerine konform ve şekle sadik olarak irtisamının mümkün olup olmadığı araştırılacaktır. Mesela huzmenin başı kutup yerine lâlettayin bir nokta ve meridyenler yerine de bu noktadaki jeodezik hatlar nazarı itibara alındığı zaman bütün jeodezik hatların hattımüstakim olarak irtisam edip etmeyeceğini görelim.

2. Problemin halli

Konform irtisamda mürtesem ile aslın asgar namütenahi parçaları yepdiğerine müşabihdir. Şimdi irtisam ettirilmek istenen satıh üzerinde aynı-u, v koordinelerini havi ve yekdiğerini kaim olarak kesen münhaniler ile (Şekil 2 a) müstevide aynı x, y havi ve yekdiğerini amuden kateden hatları (Şekil 2 b) nazarı itibarâ alalım. Gerek u, v gerekse x, y hatları asgar namütenahi küçüklükde murabbalar teşkil ederler. u, v hatlarını x, y hatlarına tekabül ettirirsek asıl şekildeki murabbalar müstevideki murabbalar halinde irtisam ettirilmiş ve irtisamda en küçük parçalar



Şekil 2 a



Şekil 2 b

yekdiğerine müşabih olmuş olur,

Böyle iki hat şebekesi arasındaki münasebet, yani konform irtisam münasebeti, analitik fonksiyonlarla tesbit edilir ve:

$$x+iy=f(u+iv)$$

şeklinde yazılabilir. Fakat bunun için u, v ile x, y paremetrelerinin yukarıda zikredildiği gibi, asgar namütenahi murabbalar teşkil etmesi şarttır. Eğer bu hassa mevcut ise bu takdirde, bu parametrelere «İzometrik veya izoterm parametre» ler denir.

$v=0$ için $y=0$ yani bir u_0 hattının mürtesemi bir x_0 hattı olsun. Şu halde x_0 hattı, intihap edilen konform irtisama göre:

$$x_0=f(u_0)$$

kanununa uyar.

Bu muhakemenin âksi de caridir. Buna göre, asıl şekildeki bir hattın irtisam kanunu malûm ise, meselâ $x_0=f(u_0)$ ise, bütün sathın konform irtisam tarzı da malûm demektir.

Başlangıçtaki halli matlup meselede, yani jeodezik bir huzmenin konform ve şekle sadık olarak müsteviye irtisam meselesinde de bu tarzda hareket edebiliriz.. Bunun için huzmenin bir jeodezi hattı için irtisam kanunu bulunur ve buna tekabül eden analitik fonksiyon vasıtasile bütün sathın konform irtisamı temin edilmiş olur.

3 Huzmedeki bir jeodezi hattının şekle sadık olarak irtisam kanunu

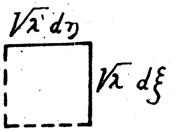
Jeodezik huzmenin (Şekil 1 a) müstevi huzmeye (Şekil 1 b) tahvili istenilmektedir. Jeodezik huzmenin üzerinde bulnduğu satha ait şimdilik bir faraziye yürütmeyeceğiz. Jeodezik huzmeye tekabül eden jeodezik kutbi koordineler s ve α ve müstevideki huzmeye tekabül eden kutbi koordineler R ve ψ olduğuna göre s jeodezi hattından R müstevi şuama geçeceğiz. Fakat ne jeodezik ne de müstevi kutbi koordineler isometrik parametr değildirler.

Bunun, jeodezik kutbi koordinelerdeki diferansiyel uzunluk formülü olan $d\sigma^2 = ds^2 + m^2 d\alpha^2$ ile müstevi kutbi koordinelerdeki $dS^2 = dR^2 + R^2 d\psi^2$ formüllerinden anlamak kabildir. m, jeodezi hatının irca edilmiş tulüdür. Bu sebepden dolayı satıh ve müstevi üzerindeki isometrik parametrler olan ζ, η ve x', y' ye geçelim.

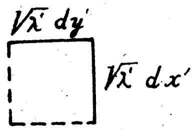
Bu takdirde diferansiyel uzunluk formülü:

$$d\sigma^2 = \lambda(\zeta, \eta)(d\zeta^2 + d\eta^2) \qquad dS^2 = \lambda'(x', y')(dx'^2 + dy'^2).$$

şeklinde yazılabilir. Burada λ, λ' mahalle ait birer fonksiyondur. Sathın ζ, η hatları ile müstevinin x', y' hatları üzerindeki diferansiyel uzunluk mıkdarları $\sqrt{\lambda}\, d\zeta$, $\sqrt{\lambda}\, d\eta$ ve $\sqrt{\lambda'}\, dx'$, $\sqrt{\lambda'}\, dy'$ dir. $d\eta = d\zeta$ ve $dy' = dx'$ vazedilirse, gerek satıh gerekse müstevide, düğümleri gayet küçük murabbalardan müteşekkil ağlar elde edilir. (Şekil 3 a ve 3 b).



Şekil 3 a



Şekil 3 b

Tefazuli hendese formülleri ile s, α jeodezik kutbi koordinelerinden izometrik parametrler olan ζ, η ya geçilirse:

$$\zeta s = -\frac{F\eta s - E\eta\alpha}{T} \quad \text{ve} \quad \zeta\alpha = -\frac{G\eta s - F\eta\alpha}{T}$$

elde edilir. Burada Gauss mıkdarları $E = 1$, $F = 0$, $G = m^2$ ve $T = \sqrt{EG - F^2}$ dir. Buna göre:

$$\zeta s = \frac{1}{m}\eta\alpha \qquad \text{ve} \quad \zeta\alpha = -m.\,\eta s \qquad (1)$$

olur. x' ile y' de diferansiyel uzunluk formülünün kutbi koordinelere nazaran yazılmiş ifadesini tahvil suretile elde edilir. Bu takdirde (Şekil 1 b):

$$d\,s^2 = d\,R^2 + R^2 \left(\frac{dy'}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \left(\frac{R_0^{\,2}}{R^2}\,d\,R^2 + d\,y'^2\right)$$

Burada:

$$\frac{R_0}{R}\,d\,R = d\,x \qquad (2)$$

vaz edersek izometrik parametrler olan x ve y' elde edilmiş olur, y', huzmenin başı merkez ve nısıf kutru R_0 olmak üzere çizilen daire kavsinin tulüdür. Bu daire huzme şualarını amuden kat eder ve konform irtisam dolayısile de jeodezik huzmenin kaim bir trajektuvarı olması icap eder. Jeodezi hattının bu trajektuvara kadar olan uzunluğu s_0 ve irca edilmiş uzunluğu da m_0 olsun. Büyüme nisbetleri sabit olan hatlara amut hatların, konform irtisama göre, jeodezik inhinalarının tahavvül etmemesi hassasını tatbik edelim. Jeodezik şua huzmesi konform ve şekle sadık olarak irtisam ettirilmiş olsun. Bu takdirde müstevi huzmenin şuaları, jeodezik inhina tahavvülü sıfır olan irtisam münhanileri olur. Binaenaleyh müstevi huzmenin merkezinden çizilen daireler, büyüme nisbeti aynı olan hatlar olur.

Nısıf kutru R_0 olan daireye ait büyüme nisbeti 1 olsun. Diferansiyel uzunluk olan $m_0\,d\,\alpha$ nın mürtesemi olan diferansiyel uzunluk $d\,y'$ ise:

$$d\,y' = R_0\,d\,\psi = m_0\,d\,\alpha \qquad (3)$$

olur. Konform bir irtisam elde etmek için izometrik parametrleri yekdiğerine tekabül ettirmek lâzımdır.

$$x' = \zeta \quad \text{ve} \quad y' = \eta$$

vazedelim. Bu suretle $d\,\zeta = d\,x'$ ve $d\,\eta = d\,y$ olur ve (1), (2) ve (3) müsavatlarından:

$$\frac{d\,x'}{d\,s} = \frac{m_0}{m}$$

buradan da:

$$\frac{d\,R}{d\,s} = \frac{m_0}{R_0}\,\frac{R}{m} \tag{4}$$

elde edilir. Bu satıh üzerinde bulunan jeodezik huzmenin şekle sadık olarak irtisam kanunudur. Bu kanun, ait olduğu jeodezi hattının büyüme nisbeti ile tebaruz etmektedir. (3) muadelesinden:

$$n = \frac{m_0}{R_0} = \frac{d\,\psi}{d\,\alpha} \tag{5}$$

bulunur. Bu yeni müsavat, satıh ve müstevide, yakın iki şua arasındaki zaviyelerin nisbetini göstermektedir.

R_0 ın intihabı henüz hiç bir kayda tabi değildir. R_0 jeodezik huzmenin amudi trajektuvarının nısıf kutru inhinasına müsavi olacak surette intihap edilir. Amudi trajektuvarın jeodezik inhinası:

$$g = \frac{1}{R_0} = \frac{1}{m_0}\left(\frac{\delta\,m}{\delta\,s}\right)_0 = \frac{(m')_0}{m_0} \tag{6}$$

dır. (4) ve (5) müsavatlarından da istifade ile:

$$\frac{d\,R}{d\,s} = (m')_0\,\frac{R}{m} \tag{4 a}$$

ve $$n = (m')_0 \tag{5 a}$$

olur.

4, Misaller

Misal olmak üzere dünya elipsoidini nazarı itibara alalım. Coğrati koordineler φ, l, jeodezik huzmenin başı da kutup noktası olsun. Şu halde:

$$m = N \cos \varphi, \; (m')_0 = \left(\frac{\delta m}{\delta s}\right)_0 = \sin \varphi_0,$$

ve:

$$\frac{dR}{ds} = \sin \varphi_0 \frac{R}{N \cos \varphi} \tag{7}$$

olur. Bu da konform mahruti irtisamdaki büyüme nisbetinden başka bir şey değildir. Burada

$$n = \sin \varphi \tag{7 a}$$

dır ve huzme ucundaki I ve ψ zaviyelerinin büyüme nisbetidir.

Başka misal olmak üzere, şimdi bulduğumuz huzmeyi, nısıf kutru A, arz ve tulleri de u ve λ olan bir küre üzerindeki meridiyen huzmesinin mürtesemi farzedelim. Küre üzerinde meridiyen kavsinin uzunluğu sk ise, buna tekabül eden büyüme nisbeti:

$$\frac{dR}{ds_K} = \sin u_0 \frac{R}{A \cos u} \tag{8}$$

olur. Burada:

$$n_K = \sin u_0 \tag{8 a}$$

dır ve huzme uçlarındaki λ ve ψ zaviyelerine ait büyüme nisbetidir.

(7) muadelesi (8) muadelesine taksim edilirse, dünya elipsoidinin küreye irtisamına ait büyüme nisbeti elde edilmiş olur. Bu irtisamda, elipsoida ait meridiyen huzmesi, kürenin meridiyen huzmesine tekabül eder ve binnetice şekle sadık olarak irtisam etmiş olur.

Bu ameliye icra edilirse:

$$\frac{ds_K}{ds} = \frac{\sin \varphi_0}{\sin u_0} \cdot \frac{A \cos u}{N \cos \varphi} \tag{9}$$

bulunur. Burada:

$$\alpha = \frac{n}{n_K} = \frac{\sin \varphi_0}{\sin u_0} \tag{9 a}$$

dır ve huzme uçlarındaki l ve λ zaviyelerine ait büyüme nisbetidir. Şu halde:

$$\lambda = \alpha \, l \tag{10}$$

dır.

(9), (9 a) ve (10) muadeleleri elipsoidin küre üzerine konform olarak irtisamına ait evvelce bilinen malûmattan başka bir şey değildir.

5. Hususi haller

R_0 nısıf kuturlu müstevi dairenin asıl şekli olan kaim trajektuvarın, jeodezik huzmenin ucuna gittikçe yaklaştığını farzedelim. Nehayet $S_0 = 0$ ve binnetice (4 a) müsavatında $(m')_0 = 1$ ve:

$$\frac{dR}{ds} = \frac{R}{m} \tag{4 b}$$

olur. Bu büyüme nisbeti, kürenin stereografik irtisamına tekabül eder.

Aynı ifadeyi Prof. Eggert'in 1936 senesinde neşrettiği « Dünya elipsoidinin stereografik irtisamı » isimli yazısının sonunda zikredilen yolu takip etmek suretile de elde etmek mümkündür. Prof. Eggert bu yazısında, şakulî maktaların, müsteviye hatlar halinde irtisam etmesi için lüzumlu formülleri istihraç etmektedir. Şakuli maktaların kavis uzunluğu Sv, bunların müstevideki hattı mürtesemlerinin uzunluğu P ve şakuli maktaların irca edilmiş uzunlukları da K cos μ ise büyüme nisbeti:

$$\frac{dP}{ds_v} = \frac{P}{K \cos \mu} \tag{11}$$

olur. Bu formülde K cos μ yerine jeodezi hattının irca edilmiş tulü olan m ve s_v yerine de jeodezi hattının uzunluğu olan s konulursa (4 b) müsavatı elde edilir

Bunun aksine olarak kaim trajektuvarın huzme ucundan uzaklaşdığını ve jeodezi hattının irca edilmiş uzunluğunun azami olduğu halin nazarı itibara alındığını farzedelim. Bu takdirde:

$$\frac{dR}{ds} = \frac{m_{max}}{m} \tag{4 c}$$

olur. Bu büyüme nisbeti Mercatör irtisamına tekabül eder.

6. İrtisam muadeleleri ve büyüme nisbeti formüllerinin istihracına ait esas formüller

(4 a) muadelesine göre irtisam ettirilmiş olan jeodezi hattının mürtesemini mihverleri yekdiğerine amut bir koordine sisteminin x mihveri olarak alalım. Bu takdirde irtisam kanunu:

$$\frac{dx}{dx} = f(s) = (m')_0 \frac{x}{m}$$

şeklinde yazılabilir. Taylor silsilesine göre tevsi edilirse:

$$x = f'(s_0)\,\Delta s + \frac{1}{2} f''(s_0)\,\Delta s^2 + \frac{1}{6} f(s_0)\,\Delta s^3 + \frac{1}{24} f^{IV}(s_0)\,\Delta s^4 + \ldots$$

s_0 civarında kaim trajektuvar tule sadık olarak irtisam ettiğinden $f'(s_0)$ daima bire müsavidir. Kouform irtisamda normal noktanın büyüme nisbeti asgari olduğundan $f''(s_0)$ daima sıfırdır. Şu halde kısaca:

$$X = \Delta s + a_3\,\Delta s^3 + a_4\,\Delta s^4 + a_5\,\Delta s^5 + \ldots \tag{12}$$

yazılabilir. (12) formülü x in Δs kavsi cinsinden hesabına yarar ve jeodezi hattının konform irtisamdaki irtisam kanununun en tabiî şeklidir. Bundan bilistifade irtisam muadeleleri ile büyüme nisbetine ait formüller hesaplanabilir. Ellipsoid üzerindeki bir meridiyenin x mihverini mürtesem olarak kabul ettiğini farzedelim. Δs in izometrik arz olan Δq cinsinden kıymetinin hesabı malum olduğundan:

$$\Delta s = \Delta s\,(\Delta q)$$
$$x = f\,(\Delta q)$$

yazılabilir.

Gerek x gerekse Δq izometrik parametrdirler. 2 inci kısımda zikredildiği veçhile, meridiyeni $x = f\,(\Delta q)$ şeklinde irtisam ettiren konform irtisamı:

$$z = x + i\,y = f\,(\Delta q + i\,l) = f\,(w)$$

analitik fonksiyonu ile ifade edilebilir. Formülü aksetmek suretile Δq ve l, x ve y cinsinden bulunabilir.

İzometrik arz farkı olan Δq ile coğrafi arz farkı olan $\Delta \varphi$ arasındaki malûm formüllerden istifade edilirse esas irtisam muadeleleri eldè edilmiş olur.

Büyüme nisbetine ait esas formül:

$$m = \frac{dS}{ds} = \frac{1}{N\cos\varphi} \cdot \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dq^2 + dl^2}} = \frac{1}{N\cos\varphi}\,|f'(w)|$$

olur. Burada:

$$|f'(w)| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2} \qquad \text{dır.}$$

Biz burada büyüme nisbetini x, y cinsinden ifade etmek istiyoruz. Bu yapılırsa:

$$
\begin{aligned}
m = 1 &+ 3 a_3 N^2 \frac{x^2}{N^2} + \left[\frac{1}{2}(1+\eta^2) - 3 a_3 N^2\right] \frac{y^2}{N^2} + 4 a_4 N^3 \frac{x^3}{N^3} \\
&+ \left[-2\eta^2 t (1+\eta^2) - 12 a_4 N^3 \cos\alpha_{0 \cdot x}\right] \cos\alpha_{0 \cdot x} \frac{xy^2}{N^2} \qquad (13) \\
&+ (-6 a_3^2 N^4 + 5 a_5 N^4) \frac{x^4}{N^4} + \left(-\frac{3}{2} a_3 N^2 + 54 a_3^2 N^4 \quad 30 a_5 N^4\right) \frac{x^2 y^2}{N^4} \\
&+ \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2} a_3 N^2 - 6 a_3^2 N^4 + 5 a_5 N^4\right) \frac{y^4}{N^4} .
\end{aligned}
$$

bulunur.

x kıymetleri şimale veya cenuba doğru büyüdüklerine göre $\alpha_{0 \cdot x}$ ya 0^0 veya 180^0 dir.

İrtisam kanununa göre a_3, a_4, a_5 emsalleri malûm ise irtisam muadeleleri ile büyüme nisbetine ait formül hesaplanabilir. Büyüme nisbetine âit esas formüller bilhassa bir memleketin irtisamında en çok kullanılan irtisam tarzlarına ait emsallerin bulunmasına da yarar.

Meselâ meridiyen tule sadık olarak irtisam edecek ise, (12) muadelesi veya (13) muadelesinde, y i ihtiva etmeyen hadlerda, emsalleri sıfıra müsavi kılmak suretile, $a_3 = a_4 = a_5 = 0$ olması icap edeceği anlaşılır. Buna göre, esas formüllerde, a_3, a_4 ilâ. emsalleri sıfır yazılırsa Gauss-Krüger irtisamına ait formüller elde edilmiş olur.

Aynı suretle mail mihverli irtisam ile konform Lambert irtisamı (Konik irtisamı) na ait emsal ve formüller elde edilebilir.

Fakat büyüme nisbetleri aynı olan hatların koordine mebdei etrafında daireler teşkil etmesi istenirse bunun mümkün olmadığı görülür. Zira elipsoid de huzmenin resi kutupda olduğundan:

$$m - 1 = c(x^2 + y^2)$$

mutabakatını tesis etmek mümkün değildir. Fakat bu kürede mümkündür ve bu takdirde:

$$a_3 = \frac{1}{12\,N^2} \qquad a_4 = 0 \qquad a_5 = \frac{1}{120\,N^4}$$

bulunur. Bu emsaller, kürenin stereografik projeksiyonuna ait emsallerin aynıdır.

7. Dünya elipsoidinde jeodezik huzmenin şekle sadık irtisamına ait araştırma

Esas formüller ve (4 a), (4 b) ve (4 c) muadelelerinden elde edilen a emsalleri ile dünya elipsoidinin irtisamına ait formüller elde edildikten sonra bu konform irtisamlarda nazarı itibara alınan jeodezik huzmenin hakikaten şekle sadık olarak irtisam edip etmediğini araştırmak lâzımdır. Meselâ (4 a) ye göre yazılmış ve kürenin stereografik projeksiyonuna tekabül eden irtisamda elipsoidin koordine mebdeinden çıkan jeodezik hatların mürtesemlerinin inhinalarının sıfır, yahut diğer bir tabirle, mürtesemlerin mebdeden geçen hatlar olması icap eder. Mürtesemlerin inhirafı:

$$K = \frac{1}{m\sqrt{x^2+y^2}} \left(y\,\frac{\delta m}{\delta x} - X\,\frac{\delta m}{\delta y} \right) \tag{14}$$

formülü ile malûmdur. Burada m büyüme nisbetidir.

İrtisam şekle sadık ise $k = 0$ yani:

$$y\,\frac{\delta m}{\delta x} - X\,\frac{\delta m}{\delta x} = 0 \tag{15}$$

olur. (15) muadelesi, devran mihveri m mihveri olan bütün devranî satıhlara ait tefazuli muadeledir. Bundan jeodezik huzmenin şekle sadık irtisamında büyüme nisbetleri aynı olan hatların daire-olması icap ettiği anlaşılır. Halbuki 6 ıncı kısmın sonunda bunun dünya elipsoidinde - bazı hususî haller müstesna - mümkün olmadığını görmüştük. Şu halde jeodezik huzmenin (4 b) irtisam kanununa göre irtisamında şekle sadık olması mümkün değildir. Binaenaleyh bu hususda daha fazla araştırma yapmak lüzumsuzdur. Aynı şey (4 a) ve (4 b) kanunları için de caridir.

Fakat (4 a), (4 b) ve (4 c) kanunlarını, huzmenin her şuaına, Prof. Eggert'in (11) irtisamı kanununu şakuli makta huzmesinde her şakuli maktaa tatbik ettiği gibi, tatbik edersek irtisam şekle sadık olur. Prof. Eggert şakuli maktaların bu suretle hat halinde irtisamını temin etmiştir. Lâkin bu suretle konform irtisamın hududu aşılmış olur. Prof. Lehmann «Zeitschrift f. Vermessungswesn» in 1939 senesine ait cildinde «Lagrange projeksiyonları» na ait bir etüdünde Prof. Eggert in irtisamının tam konform olmadığını göstermiştir.

Prof. Lehman aynı etüdde, sabit mıkdarı:

$$c^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0$$

olan Lagrange irtisamlarının, jeodezik huzmeleri en şekle sadık surette irtisam ettiren irtisamlar olduğunu ispat etmişdir. Zeitschrift für vermessungswssen in 1940 cildinde «stereografik projeksiyon hakkında mülahazalar» isimli yazısında Hristow, Rousilhe tarafından bulunan ve kendisi tarafından yeniden istihraç edilen stereografik projeksiyonda jeodezik huzmenın şekle oldukça sadık olarak irsam ettiğini göstermektedir.

Yukarıda zikr ettiğimiz irtisamlarda koordine mebdeindeki âzâmi istikamet defoımasyonunu τ max ile gösterelim. Bu, jeodezi hattının mürtesemi ile koordine mebdei, yani jeodezi hattının mebdei, ve nehayet noktası arasını birleştiren l uzunluğundaki kiriş arasındaki zaviyedir. Şekle sadık bir irtisamda bunun sıfır olması icap eder.

Sabit miktarı $C^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0$ olan Lagrange irtisamında

$$\tau \max = 0,064\, \eta^2 t \frac{l^3}{r^3}$$

Rousilhe irtisamında:

$$\tau \max = 0,167\, \eta^2 t \frac{l^3}{r^3}$$

Meridiyeni için [4 b] kanunu cari olan konform irtisamda ise:

$$\tau \max = 0,056\, \eta^2 t \frac{l^3}{r^3}$$

Şu halde bu irtisamda zaviye deformasyonu en küçüktür.

8 kürenin umumileştirilmiş konform Lambert irtisamı

Her ne kadar jeodezik bir huzmenin elipsoid üzerinde konform ve aynı zamanda şekle sadık olarak irtisamı umumî olarak gayri kabil isede, kürede, (4 a), (4 b) ve (4 c) kanunlarına göre daima mümkündür. Zira kürenin kutbu, hendesi bakımdan, kürenin diğer noktalarından farklı değildir. (4 a) irtisam kanunu kürede mail konik projeksiyona tekabül eder. Biz buna umumileştirilmiş konform Lambert irtisamı diyebiliriz. Zira bunun istihracında bir koni nazarı itibara alımağa lüzum yoktur ve «Konik irtisam» tabiri ile de bu irtisamın mühim geometrik evsafına ait hiç bir şey ifade edilmiş olmaz.

Bu araştırmaların sonucu olmak üzere umumileşdirilmiş konform Lambert irtisamına ait muadeleler ile büyüme nisbetine ait formülleri yazalım. Bunlar esas formüllerden bulunur ve 6 ıncı kısımda zikr edilen a_3, a_4, a_5 istihracında küreye ait (4 a) kanunu tatbik etmek suretile elde edilir. Bu takdirde:

$$\frac{x}{r}\cos\alpha_{0\cdot x} = \Delta\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\, t\, l^2 + \frac{1}{6}\Delta\varphi^3 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\,\Delta\varphi\, l^2 + \frac{1}{24}\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0\,\Delta\varphi^4$$
$$+\frac{1}{4}\cos^2\varphi\,(t-\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0)\,\Delta\varphi^2 l^2 + \frac{1}{24}\cos^4\varphi\,(\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 - t - t^3)\, l^4$$
$$+\frac{1}{120}(5+3\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0)\,\Delta\varphi^5 - \frac{1}{12}\cos^2\varphi\,(5t^2 - 7t\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 + 3\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0)\,\Delta\varphi^3 l^2$$
$$+\frac{1}{24}\cos^4\varphi\,(3\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0 - 10t\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 + 7t^2 + t^4)\,\Delta\varphi\, l^4$$

$$\frac{y}{r}\cos\alpha_{0\cdot x} = \cos\varphi\, l - \sin\varphi\,\Delta\varphi\, l - \frac{1}{6}t^2\cos^3\varphi\, l^3 - \frac{1}{6}\cos\varphi\,(2t - \operatorname{ctg}\Delta\varphi_0)\,\Delta\varphi^3 l$$
$$-\frac{1}{6}\cos^3\varphi\,(\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 - t - t^3)\,\Delta\varphi\, l^3 - \frac{1}{24}\cos\varphi\,(4t\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 - 3\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0)\,\Delta\varphi^4 l$$
$$-\frac{1}{4}\cos^3\varphi\,(2t^2 - 3t\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 + \operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0)\,\Delta\varphi^2 l^3$$
$$+\frac{1}{120}\cos^5\varphi\,(3\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0 - 10t\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 + 7t^2 + t^4)\, l^5$$

$$\Delta\varphi = \cos\alpha_{0\cdot x}\frac{x}{r} - \frac{1}{2}t\frac{y^2}{r^2} - \frac{1}{6}\cos\alpha_{0\cdot x}\frac{x^3}{r^3} - \frac{1}{2}t^2\cos\alpha_{0\cdot x}\frac{xy^2}{r^3} - \frac{1}{24}\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0\frac{x^4}{r^4}$$
$$+\frac{1}{4}(\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 - 2t^3)\frac{x^2y^2}{r^4} + \frac{1}{24}(3t^2 + t - \operatorname{ctg}\Delta\varphi_0)\frac{y^4}{r^4}$$
$$+\frac{1}{120}(5 - 3\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0)\cos\alpha_{0\cdot x}\frac{x^5}{r^5} + \frac{1}{24}(9t^4 + 4t^2 - 4t\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 - 3\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0)$$
$$\cos\alpha_{0\cdot x}\frac{xy^4}{r^5} - \frac{1}{12}(6t^4 + t^2 - 2t\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 - 3\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0)\cos\alpha_{0\cdot x}\frac{x^3y^2}{r^5}$$

$$l = \frac{\cos\alpha_{0\cdot x}}{\cos\varphi}\frac{y}{r} + \frac{t}{\cos\varphi}\frac{xy}{r^2} + \frac{1}{3}\frac{t^2\cos\alpha_{0\cdot x}}{r^3\cos\varphi}(3x^2y - y^3) - \frac{1}{6}\frac{1}{r^4\cos\varphi}$$
$$(\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 - t - 6t^3)(x^3y - xy^3) - \frac{1}{120}\frac{\cos\alpha_{0\cdot x}}{r^5\cos\varphi}(3\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0 + 5t\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0$$
$$-8t^2 - 24t^4)(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5)$$

$$m = 1 + \frac{1}{2}\Delta\varphi^2 + \frac{1}{6}\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0\,\Delta\varphi^3 + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\,(t - \operatorname{ctg}\Delta\varphi_0)\,\Delta\varphi\, l^2$$
$$+\frac{1}{24}(5 + 3\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0)\,\Delta\varphi^4 - \frac{1}{4}\cos^2\varphi\,(2t^2 - 5t\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 + 3\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0)\,\Delta\varphi^2 l^2$$
$$+\frac{1}{8}\cos^4\varphi\,(t^2 - 2t\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0 + \operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0)\, l^4$$

$$m = 1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{6}\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0\cos\alpha_{0\cdot x}\frac{x^3}{r^3} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\Delta\varphi_0\cos\alpha_{0\cdot x}\frac{xy^2}{r^3}$$
$$+\frac{1}{24}(1 + 3\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0)\frac{x^4}{r^4} - \frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0\frac{x^2y^2}{r^4} + \frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\Delta\varphi_0\frac{y^4}{r^4}.$$

Burada X mihveri, büyük dairelerden müteşekkil ve şekle sadık olarak irtisam eden huzmenin c köşesinden geçen meridiyenin mürteseminden ibarettir. c nin arzı φ_c ve X, y müstevi koordinelerinin mebdei olan o nun (bu aynı zamanda projeksiyonun esas noktasıdır) arzı da φ_0 ise $\Delta\varphi_0 = \varphi_c - \varphi_0$ dır.

α_0. x da c. den o ya giden jeodezi hattının semtidir. $\Delta\varphi_0 = 90 - \varphi_0$ alınırsa köşesi kutupda olan konform Lambert (konik projeksiyon) irtisamının formülleri elde edilir. Bu takdirde X mihverinin müsbet istikameti cenuba müteveccihidir. t = tg φ_0 demektir. Aynı şekilde, (4 b) ve (4 c) irtisam kanunlarından istifade edilerek diğer formüller bulunabilir. Dünya elipsoidi evvela küre ve bilâhare müsteviye irtisam ettirilecek ise (Bu tarz, hesap tekniği bakımından, doğrudan doğruya yapılacak irtisama şayanı tercihtir.) yukarda zikr edilen 3 irtisam tarzı, ya müstakilen ve ya karışık olarak, dünya elipsoidinin bir kısmının ve ya hepsinin irtisamında kullanılır.