

JEODEZİK DİK KOORDİNATLARDAN EĞRI KOORDİNATLARA  
DÜNUŞÜM İÇİN YENİ ALGORİTMALAR

Şerif HEKİMOĞLU

## ÖZET

Jeodezik dik koordinatlardan eğri koordinatlara dönüşüm probleminin kesin ve iteratif çözümleri sayısal bakımdan ele alınarak incelenmiştir. En lemin bulunmasında, karmaşık ve kararsız olan kesin çözümler ve yaklaşık olan iteratif çözümlerden, sayısal bakımdan daha doğru ve daha kararlı sonuç veren, yeni algoritmalar verilmiştir. Ayrıca yüksekliği daha kararlı olarak hesaplayan yeni bir algoritma önerilmiştir.

## ABSTRACT

*The iterative and noniterative solutions of the transformation problem from rectangular space coordinates to geodetic latitude and height are discussed numerically. The new algorithms are given to calculate the geodetic latitude. They are more accurate than the iterative ones which give approximate results and than the noniterative ones which are very complicated and unstable. In addition to this, a new algorithm which is numerically more stable than the others is proposed for geodetic height.*

## 1. GİRİŞ

Jeodezik dik koordinatlardan ( $x, y, z$ ) eğri koordinatlarının ( $\phi$ =jeodezik enlem,  $\lambda$ =jeodezik boylam,  $h$ =elipsoid yüksekliği) bulunması bir dönüşümle gerçekleşir. Bu geçiş kolay değildir ve uygulamada bazı sorunlar vardır. Global konum belirleme sisteminin (Global Positioning System) yaygın kullanılmasıyla bu dönüşüm güncelik ve önem kazanmıştır.

Bu dönüşümün çözümü, daha doğrusu enlemin bulunması için çok sayıda algoritmalar geliştirilmiştir. Bunlar iki ana grupta toplanabilir: Iteratif çözümler, kesin (veya kapalı) çözümler.

Sorunun iteratif çözümü ilk olarak Hirvonen ve Moritz (1963), Heiskanen ve Moritz (1967) tarafından verilmiştir. Bartelme ve Meissl (1975), Sünkel (1976) serise açmak suretiyle ve ayrıca Vincenty (1976, 1980), Pick (1985) durulan noktadan geçtiği düşünülen dönel elipsoidle referans elipso-

idi arasındaki ilişkilere dayanan iteratif çözümler geliştirmiştir. İterasyon sürecini kısaltmak için Bowring (1976), Ünal (1983) ve Borkowski (1989) tarafından yeni çözümler önerilmiştir. Enlemi tek bir formülle yaklaşık olarak veren Bowring algoritmasının hesabı Borkowski algoritmasından daha kısadır (Laskowski 1991). Genel olarak iteratif çözümler yaklaşaktır, fakat hesaplanmaları kolay ve açıklıktır. İterasyon sürecinin ne zaman durdurulacağı kısmen keyfidir. Enlemi bulurken, özellikle Bowring ve Borkowski'ın algoritmaları, yeryüzü noktaları için iyi bir yaklaşım vermelerine karşın, yeryüzü dışındaki noktalar için yaklaşımıları kötüleşir. Özette bu iki yöntemin doğruluğu yüksekliğe bağlı olarak değişir.

Sorunun kesin çözümü, en genel biçimde, durulan noktanın referans elipsoidi yüzeyine olan, bu noktadan geçen meridyen düzlemindeki uzaklığının minumum yapılması, yani Lagrange minumum ödevi yardımıyla verilir (Benning 1974, Sünkel 1976, Grafarend ve Lohse 1991). Jeodezik enlemin bulunmasında ortaya çıkan  $\tan \phi$  nin 4. dereceden denkleminin (Vanicek ve Krakiwsky 1982) Ferrari'ye (Penev 1978) veya Decartes-Euler'e (Paul 1973) göre çözümleri, durulan noktadan geçen normalle meridyen elipsinin kesitirilmesi (Fröhlich ve Hansen 1976, Heikkinen 1982) ve ayrıca hareket ettiğleri eşitliklerin özesi olduğu Borkowski (1989) ile Ozone (1985) yöntemleri, aslında Lagrange minumum ödeviyle yapılan çözümün birer özel durumları olarak görülebilir.

Kapalı çözümler kuramsal olarak tam doğru olmalarına karşın, sayısal bakımından bazı durumlarda kararsızdır. Özellikle enleinin 0 veya 90 dereceye yakın olduğu bölgelerde doğru sonuç vermezler. Ayrıca karmaşıktırlar (Heck 1987). Dolayısıyla yuvarlatma hatalarının artmasına neden olurlar (Borkowski 1989). Hesaplama zamanı iteratif yöntemlere göre daha fazladır.

Şimdiye dekin tartışmalar hep enleinin bulunması üzerine yapılmıştır. Global konum belirleme sisteminin uygulamada yaygınlaşması, üçüncü boyutunda yeterli bir doğrulukla belirlenmesi gereğini gündeme getirmiştir. Yalnız, elipsoid yüksekliğinden ortometrik yüksekliğe geçiş için, daha önce jeoidin yeterli bir doğrulukla belirlenmiş olması gerektiği açıklıktır. Elipsoid yüksekliği enlem hesaplandıktan sonra bilinen formüllere göre (örneğin Heck 1987) elde edildiğinde, enlem  $0^\circ$  ye yakın ise, sinüslü formül veya enlem  $90^\circ$  ye yakın ise, kosinüslü formül kararsızdır, yani doğru sonuç vermez. Dolayısıyla bu formüller, bu özel durumlarda enlemdeki olası hesap hatalarına karşı çok duyarlı olur.

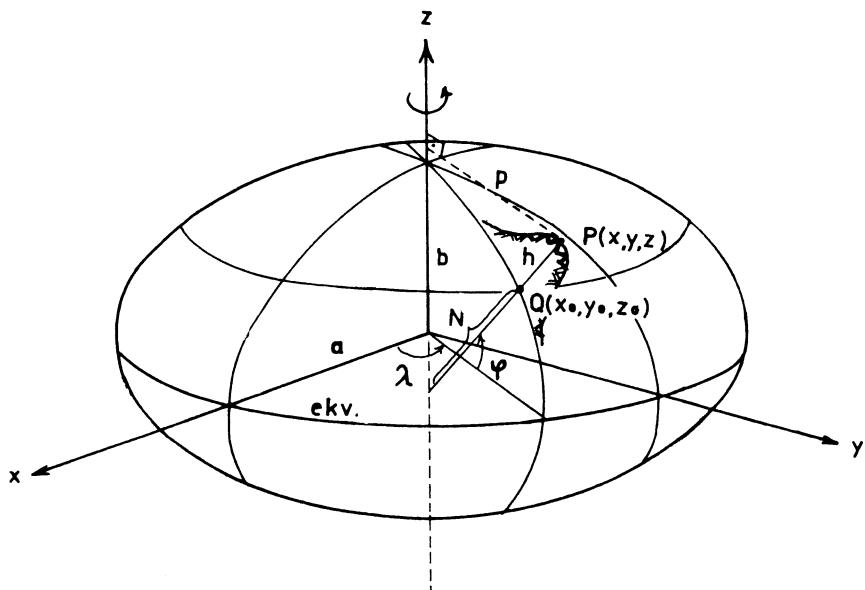
Bu yazında enlemin bulunması için, iteratif çözümlerden daha doğru, hesaplama sürecini mümkün olduğunda kısaltan, sayısal açıdan kesin yöntemlerden daha kararlı, açık, yalın, yeni algoritmalar araştırılacaktır. Ayrıca elipsoid yüksekliğini daha kararlı olarak veren bir algoritma üzerinde durulacaktır.

## 2. PROBLEMIN TANIMI

Jeodezik dik koordinatlar ( $x, y, z$ ) ile eğri koordinatlar ( $\phi, \lambda, h$ ) arasındaki ilişki bilindiği gibi şöyle verilir:

$$\begin{aligned}x &= (N+h) \cos \phi \cos \lambda \\y &= (N+h) \cos \phi \sin \lambda \\z &= (N(1-e^2) + h) \sin \phi\end{aligned}\tag{1}$$

Şekil-1'de P noktasından geçen elipsoid normalinin referans elipsoidini kestiği Q noktasının koordinatları ise



Şekil-1

$$\begin{aligned}x_o &= N \cos\phi \cos\lambda \\y_o &= N \cos\phi \sin\lambda \\z_o &= N (1-e^2) \sin\phi\end{aligned}\tag{2}$$

şeklinde verilir.

Burada problem  $x, y, z$  verilince,  $\phi, \lambda$  ve  $h$  nin bulunmasıdır. Hemen görülüğü gibi boylam, kolayca (1) eşitliklerinin baştan ikincisinin, birincisine bölünmesiyle

$$\tan\lambda = y / x \tag{3}$$

elde edilir. Fakat  $\phi$  ve  $h$  nin bulunması bu kadar kolay değildir.

### 3. İTERATİF ÇÖZÜM

$\phi$  ve  $h$  nin bulunması için şöyle bir yol izlenir: Önce (1) formüllerinin 3 ncü eşitliği, aşağıdaki (4) eşitliği ile bölünür,

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} = (N+h) \cos\phi \tag{4}$$

ve  $\tan\phi$  yalnız bırakılırsa,

$$\tan\phi = \frac{z}{p} (1 - e^2 \frac{N}{N+h})^{-1} \tag{5.a}$$

veya

$$\tan\phi = \frac{z(1+e^2)}{p} (1 + e^2 \frac{h}{N+h})^{-1} \tag{5.b}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sağında  $N$  ve  $h$  hala bilinmemektedir. Bu yüzden sorunu iteratif çözmek gerekecektir.  $\phi$ 'nin iteratif yöntemle bulunabilmesi için başlangıç değeri olarak

$$\tan\phi(o) = \frac{z}{p} (1 + e^2)^{-1} = \frac{z}{p} (1 - e^2)^{-1} \tag{6}$$

alınır. Sonra buradan bulunan  $\phi(o)$  değeri ile  $N_{(1)}$  aşağıdaki

$$N = c / \sqrt{1 + e^2 \cos^2 \phi} \tag{7.a}$$

veya

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} \quad (7.b)$$

formüllerin birinden ve  $h_{(1)}$  ise, aşağıdaki formülden bulunur:

$$h = (p / \cos \phi) - N \quad (8)$$

Artık bu değerler (5.a) veya (5.b)'de yerine konarak  $\phi_{(1)}$  değeri elde edilir. Daha sonra  $\phi_{(1)}$  değeri ile yine (7.a) veya (7.b)'den  $N_{(2)}$  ve (8)'den  $h_{(2)}$  değerleri ve daha sonra bunlar (5.a) veya (5.b)'de yerlerine konarak  $\phi_{(2)}$  hesaplanır ve böylece bu işlemler ardışık olarak hesap süreci yakınsayınca kadar, yani seçilen hata payına ( $\epsilon$ ) bağlı olarak sürdürülür:

$$|\phi_{(i)} - \phi_{(i-1)}| \leq \epsilon, \quad |h_{(i)} - h_{(i-1)}| \leq a\epsilon.$$

(Heiskanen ve Moritz 1967, Vanicek ve Krakiwsky 1982, Heck 1987). Burada  $i$  iterasyon sayısıdır.  $h < N$  olan yeryüzü noktaları için iterasyon yöntemi çok çabuk yakınsar (Heck 1987). Burada formüllerde geçen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $e^2$ ,  $e'^2$  seçilen referans elipsoidinin parametreleridir.

#### 4. BOWRING YÖNTEMİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

İteratif çözümler içinde uygulamada en çok kullanılan Bowring yöntemidir. Bu yöntemde  $\phi$  enlemi

$$\tan \phi = \frac{z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta}, \quad \tan \theta = \frac{z a}{p b} \quad (9)$$

olarak verilir (Bowring 1976). Burada  $\theta$  şekil-1'deki  $P$  noktasının indirgenmiş enleminin ilk yaklaşık değeridir, yani

$$\frac{a}{b} \tan \theta = \frac{z}{p} \frac{a^2}{b^2} = \frac{z}{p} (1+e'^2) = \tan \phi_{(0)}$$

(6) daki  $\phi_{(0)}$  a karşılık gelen indirgenmiş enlemdir. Dolayısıyla (9) formülündeki  $\phi$  değeri, bir anlamda  $\phi$ 'nin birinci iterasyon değeridir.

Bowring, (9) formülünü aşağıdaki eşitlikten hareket ederek

$$\tan \beta = \tan \theta (1 - e^2) + \frac{e^2 a}{p} \sin \beta \quad (10)$$

ve  $\tan \beta = u$  dönüşümüyle bulunan aşağıdaki  $f(u) = 0$  fonksiyonunu,

$$f(u) = u - \tan\theta - \frac{e^2 a u}{p \sqrt{1+u^2}} + e^2 \tan\theta = 0 \quad (11)$$

$u_0 = \tan\theta$  yaklaşık değeri ile Taylor'a göre diziye açarak, yani

$$f(u) = 0 = f(u_0) + (u-u_0) f'(u_0) + \frac{(u-u_0)^2}{2!} f''(u_0) + \dots \quad (12)$$

ve yalnızca ilk iki terimle yetinerek bulmuştur.

Aynı sonuç Newton iterasyon yöntemiyle de elde edilebilir:

$$u = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)} \quad (13)$$

(Jordan-Engeln ve Reutter 1973, Stoer 1972).

Bowring iterasyon yöntemi genelleştirilmek istendiğinde, (12) eşitliği  $(u-u_0)$  parantezine alınırsa

$$u = u_0 - \frac{f(u_0)}{\left[ f'(u_0) + \frac{(u-u_0)}{2!} f''(u_0) + \frac{(u-u_0)^2}{3!} f'''(u_0) + \dots \right]} \quad (14)$$

yazılabilir. Bu eşitlikte gereken türevler (11) eşitliğinden bulunup,  $f(u_0)$  yerine aşağıdaki eşitlik, yani

$$f(u_0) = \frac{e^2 a}{p} \sin\theta + e^2 \tan\theta \quad (15)$$

ve ayrıca paydadaki köşeli parentez içindeki  $(u-u_0)$  yerine

$$k = (u-u_0) = \tan\beta - \tan\theta = \frac{(e^2 a / p) \sin\theta - e^2 \tan\theta}{1 - (e^2 a / p) \cos^3\theta}$$

gözönüne alınırsa,

$$\tan\beta = \tan\theta + \frac{(e^2 a / p) \sin\theta - e^2 \tan\theta}{\left[ 1 - \frac{e^2 a}{p} \cos^3\theta + \frac{k}{2!} f''(u_0) + \frac{k^2}{3!} f'''(u_0) + \dots \right]}$$

elde edilir. Burada geçen türevler aşağıda verilmiştir.

$$f'(u_0) = 1 - \frac{e^2 a}{p} \cos^3 \theta$$

$$f''(u_0) = \frac{3 e^2 a}{p} \sin \theta \cos^4 \theta$$

$$f'''(u_0) = \frac{3 e^2 a}{p} \cos^7 \theta (1 - 4 \tan^2 \theta)$$

.....

## 5. BORKOWSKI YÖNTEMİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu yöntemde, Bowring'de olduğu gibi, önce indirgenmiş enlem  $\beta$  bulunur:

$$\beta = \beta_0 - \frac{2 \sin(\beta - \Omega) - t \sin 2\beta}{2[\cos(\beta - \Omega) - t \cos 2\beta]} \quad (16)$$

Bu formülde  $\beta_0 = \theta$  (bak.(9) eşitliği) ve

$$\tan \Omega = \frac{b z}{a p}, \quad t = \frac{a^2 - b^2}{a p} \cos \Omega = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 p^2 + b^2 z^2}} \quad (17)$$

olarak alınır (Borkowski 1989).

Borkowski, aşağıdaki denklemden hareket ederek

$$2 \sin(\beta - \Omega) - t \sin 2\beta = 0 \quad (18)$$

bu denklemin köklerinden birini, Newton iterasyon yöntemini, yani (13)'ü uygulayarak ve  $\beta_0$  yerine  $\theta$  ve

$$f(\beta_0) = 2 \sin(\beta_0 - \Omega) - t \sin 2\beta_0 \quad (19)$$

alarak (16) eşitliğini bulmuştur.

(18) eşitliği ile (10) eşitliği özdeşdir. Çünkü (18) açılıp sonra  $\sin \beta$   $\cos \Omega$  ile bölünür ve aşağıdaki kısaltma ve dönüşümler yapılrsa

$$\frac{a^2 - b^2}{a} = a e^2, \quad \tan \Omega = \frac{zb}{pa} = \frac{za}{pb} \frac{b^2}{a^2} = \frac{za}{pb} (1 - e^2)$$

$$\tan \Omega = \tan \theta (1 - e^2)$$

(10) eşitliği elde edilebilir.

Tıpkı Bowring yönteminin genelleştirildiği gibi Borkowski yöntemi de genelleştirilebilir. Bunun için (18) eşitliği,  $\beta_0$  yaklaşık değeriyle Taylor dizisine açılır (bak.(12)). Daha önce bölüm 4'te yapıldığı gibi,  $\beta_0$  yerine 0,  $f(\beta_0)$  yerine (19) eşitliği ve paydada ortaya çıkan  $(\beta - \beta_0)$  yerine de

$$\beta - \beta_0 = m = - \frac{2 \sin (\beta_0 - \Omega) - t \sin 2\beta_0}{2 [\cos (\beta_0 - \Omega) - t \cos 2\beta_0]}$$

alınırsa,

$$\beta = \beta_0 - \frac{2 \sin (\beta_0 - \Omega) - t \sin 2\beta_0}{2 \cos (\beta_0 - \Omega) - 2t \cos 2\beta_0 + \frac{m}{2!} f''(\beta_0) + \frac{m}{3!} f'''(\beta_0) + \dots}$$

elde edilir. Bu formülde geçen türevler şunlardır:

$$f'(\beta_0) = 2 \cos (\beta_0 - \Omega) - 2t \cos 2\beta_0$$

$$f''(\beta_0) = -2 \sin (\beta_0 - \Omega) + 4t \sin 2\beta_0$$

$$f'''(\beta_0) = -2 \cos (\beta_0 - \Omega) + 8t \cos 2\beta_0$$

.....

## 6. İTERATİF ÇÖZÜMÜN GENELLEŞTİRİLMESİ

Bölüm 3'de anlatılan iteratif çözümün birbirini izleyen işlem adımları, bir dizi halinde birbiriley bağlanıp, aşağıdaki gibi, enlemi hesaplayabilen tek bir formül haline dönüştürülebilir.

Enlemi veren (5.a) eşitliğinde, N ve h yerine sırasıyla (7.b) ve (8)'deki değerleri, yani

$$\frac{N}{N+h} = \frac{a \cos \phi}{p \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} = \frac{a}{p} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \phi}{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$

gözönüne alınırsa,

$$\tan \phi = \frac{z}{p} \left(1 - \frac{e^2 a}{p}\right) \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \phi}{1 - e^2 \sin^2 \phi}}^{-1} \quad (20)$$

yazılabilir.

Bu eşitliğin sağındaki karekök içinde de yine hala enlem bulunmaktadır. Halbuki burada enlem aranıyor. Bunun için tíkí iteratif çözümde olduğu gibi, karekök içindeki enlem yerine yaklaþık bir enlem deðeri (örneðin (6) eşitliğinden) alınır:

$$\phi_0 = \arctan \left[ \frac{z}{p} (1 + e'^2) \right]$$

Burada

$$\sin \phi = \tan \phi / \sqrt{1 + \tan^2 \phi}$$

olduğu düşünülüp (6) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\frac{1 - \sin^2 \phi}{1 - e^2 \sin^2 \phi} = \frac{p^2}{p^2 + z^2 (1 + e'^2)} \quad (21)$$

bulunur. Bu eşitlik (20)'de yerine konursa ikinci adımda

$$\tan \phi_1 = \frac{z}{p} \left( 1 - \frac{e^2 a}{\sqrt{p^2 + z^2 (1 + e'^2)}} \right)^{-1} \quad (22)$$

(20) eşitliğinin ikinci yaklaşımı elde edilmiş olur.

Sonra (22) eşitliği, bunun sağ yanındaki parentez  $\mu_1$  ile gösterilirse aşağıdaki gibi yazılabılır:

$$\tan \phi_1 = \frac{z}{p} \mu_1^{-1}, \quad (23)$$

$$\mu_1 = 1 - \frac{e^2 a}{\sqrt{p^2 + z^2 (1 + e'^2)}} \quad (24)$$

Bu kez, (20) eşitliğinin sağındaki enlem yerine (23)'den elde edilen  $\phi_1$  deðeri konursa, (21) eşitliğine benzer olarak

$$\frac{1 - \sin^2 \phi}{1 - e^2 \sin^2 \phi} = \frac{p^2 (\mu_1)^2}{p^2 (\mu_1)^2 + z^2 (1 - e^2)} \quad (25)$$

ve yine (22) eşitliğine benzer olarak

$$\tan \phi_2 = \frac{z}{p} \left( 1 - \frac{e^2 a \mu_1}{\sqrt{p^2 (\mu_1)^2 + z^2 (1 - e^2)}} \right)^{-1} \quad (26)$$

yazılabilir. Böylece (20) eşitliğinin üçüncü yaklaşımı elde edilir.

Daha sonra yaklaşımı bir derece daha yükseltmek istersek, yine daha önce yapıldığı gibi, (26) eşitliği, bunun sağ yanındaki parantez içi  $\mu_2$  ile gösterilirse, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tan \phi_2 = \frac{z}{p} \mu_2^{-1}, \quad (27)$$

$$\mu_2 = 1 - \frac{e^2 a \mu_1}{\sqrt{p^2 (\mu_1)^2 + z^2 (1 - e^2)}} \quad (28)$$

Bu kez de (20) eşitliğinin sağındaki enlem yerine (27)'den elde edilen  $\phi_2$  değeri konursa, (25) eşitliğine benzer olarak

$$\frac{1 - \sin^2 \phi}{1 - e^2 \sin^2 \phi} = \frac{p^2 (\mu_2)^2}{p^2 (\mu_2)^2 + z^2 (1 - e^2)}$$

ve yine (26) eşitliğine benzer olarak

$$\tan \phi_3 = \frac{z}{p} \left( 1 - \frac{e^2 a \mu_2}{\sqrt{p^2 (\mu_2)^2 + z^2 (1 - e^2)}} \right)^{-1} \quad (29)$$

yazılabilir. Böylece (20) eşitliğinin dördüncü yaklaşımı elde edilir.

Bu adım adımla yaklaşma yöntemi daha da geliştirilip genelleştirilirse

$$\tan \phi_i = \frac{z}{p} \left( 1 - \frac{e^2 a (\mu_{i-1})}{\sqrt{p^2 (\mu_{i-1})^2 + z^2 (1 - e^2)}} \right)^{-1} \quad (30.a)$$

$$\mu_{i-1} = 1 - \frac{e^2 a (\mu_{i-2})}{\sqrt{p^2 (\mu_{i-2})^2 + z^2 (1 - e^2)}}$$

$$\mu_0 = \frac{e^2}{e^2} \quad , \quad i = 2, 3, 4, \dots$$

yazılabilir. Ayrıca daha açık olarak şöyle de verilebilir:

$$\tan \phi_i = \frac{z}{p} K_i^{-1} \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad (30.b)$$

$$K_n = 1 - \frac{e^2 a K_{n-1}}{\sqrt{p^2 K_{n-1}^2 + z^2 (1 - e^2)}} \quad , \quad i = n \text{ için}$$

.....

$$K_6 = 1 - \frac{e^2 a K_5}{\sqrt{p^2 K_5^2 + z^2 (1 - e^2)}}, \quad i = 6 \text{ için}$$

$$K_5 = 1 - \frac{e^2 a K_4}{\sqrt{p^2 K_4^2 + z^2 (1 - e^2)}}, \quad i = 5 \text{ için}$$

$$K_4 = 1 - \frac{e^2 a K_3}{\sqrt{p^2 K_3^2 + z^2 (1 - e^2)}}, \quad i = 4 \text{ için}$$

$$K_3 = 1 - \frac{e^2 a K_2}{\sqrt{p^2 K_2^2 + z^2 (1 - e^2)}}, \quad i = 3 \text{ için}$$

$$K_2 = 1 - \frac{e^2 a K_1}{\sqrt{p^2 K_1^2 + z^2 (1 - e^2)}}, \quad i = 2 \text{ için}$$

$$K_1 = 1 - \frac{e^2 a K_0}{\sqrt{p^2 K_0^2 + z^2 (1 - e^2)}}, \quad i = 1 \text{ için}$$

$$K_0 = 1 - e^2, \quad i = 0 \text{ için}$$

## 7. YÜKSEKLİĞİN DAHA KARARLI OLARAK BULUNMASI

Şimdide değin elipsoid yüksekliği ( $=h$ ), (8) veya aşağıdaki

$$h = |z / \sin \phi| - N(1 - e^2) \quad (31)$$

formülden bulunmuştur.  $h$ , (8)'den bulunduğuanda  $\phi \sim 90^\circ$  iken, enlemdeki küçük değişimlere karşı çok duyarlı olduğundan (8) yerine daha kararlı olması nedeniyle (31) önerilir (Heck 1987, Penev 1978). Tersine  $\phi \sim 0^\circ$  iken ise (31)yeye (8) yeğlenmelidir.

$\phi = 0^\circ$  ise (1) ve (2) formüllerinden

$$h = p - a,$$

ve  $\phi = 90^\circ$  ise  $x = y = 0$  olacağından

$$h = z - b = z - a \sqrt{1 - e^2}$$

yazılabilir (Penev 1978).

Uzayda bir noktanın referans elipsoidine olan yüksekliği, bu noktadan geçen normalin elipsoide kadar olan uzaklığı olarak düşünülebilir. (1) ve (2) formüllerinden

$$h = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (32)$$

$$|z| < |z_0| \text{ ise } h < 0$$

yazılabilir.

$h$ 'nın (32)'den bulunmasıyla, yukarıda belirtilen sakıncalar ortadan kaldır. Bunu göstermek için enlemdeki küçük bir değişimin  $h$ 'ya etkisi

$$dh \leq \frac{x-x_0}{h} \frac{\partial x_0}{\partial \phi} + \frac{y-y_0}{h} \frac{\partial y_0}{\partial \phi} + \frac{z-z_0}{h} \frac{\partial z_0}{\partial \phi} + \dots h \neq 0$$

olarak verilebilir (Stoer 1972). (2) formüllerinin enleme göre kısmi türevleri alınıp bu son eşitsizlikte yerine konursa, birinci derece terimlerin birbirini götürdüğü görülür. Benzer şekilde, enlemdeki küçük bir değişimin  $h$ 'ya etkisi, (8) ve (31) formüllerine göre de incelenirse, birinci derecede terimlerin yok olmadığı ortaya çıkar. O halde (32)'den bulunan  $h$ , (8) ve (31)'deki  $h$ 'ya göre, enlemdeki küçük değişimlere daha az bağlıdır, dolayısıyla (32) formülü, sayısal bakımdan (8) ve (31)'e göre,  $h \sim 0$  dışında, daha kararlıdır.  $h \sim 0$  (yani,  $h < \sim 1$  cm) olduğu kesimlerde,  $\phi < 45^\circ$  ise (8),  $\phi > 45^\circ$  ise (31) daha kararlıdır.

## 8. BOYLAMIN HESAPLANMASINDA ÖZEL DURUMLAR

Boylamı veren tanjant fonksiyonu (yani, (3) formülü),  $y$  ekseni üzerindeki ( $x = 0, y \neq 0$ ), diğer bir deyişle  $zy$  düzleminde bulunan (yani  $\lambda = 90^\circ$  veya  $\lambda = 270^\circ$ ) noktalar için ve ayrıca ( $x = y = 0, z \neq 0$ ) özel durumunda tanımlı değildir. Bu birinci özel (yani,  $x = 0, y \neq 0$ ) durumunda programın kesilmesi için Hekimoğlu (1992)'de ikinci temel ödev için geliştirilen öneriden yararlanılabilir:

$$\lambda = \pi - \arctan \frac{x}{y+EPS} - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(y+EPS) \quad (33)$$

veya

$$\lambda = 2 \arctan \frac{y + EPS}{x - p + EPT} + \pi$$

$$EPS < E-15, EPT < E-27.$$

## 9. SAYISAL ARAŞTIRMALAR

Sayısal bir test modeli, uluslararası elipsoidin parametreleri ( $a, b$ ) Heck (1987)'ten alınarak kurulmuştur. Keyfi  $\phi, \lambda, h$  değerleri verilerek, bunlara karşılık gelen  $x, y, z$  değerleri hesaplanmıştır. Sonra ters problem olarak,  $x, y, z$  değerleri bilindiğine göre, geriye gidilerek  $\phi, \lambda, h$  değerleri, kesin çözüm yöntemleri ve iteratif çözüm yöntemleri yardımıyla bulunmuştur. Böylece herbir yöntemin sayısal olarak doğruluğunu incelemek olanağı doğmuştur.

Sayısal doğruluk açısından  $a, b$  parametre çifti temel alınıp bunlara bağlı olarak diğer büyüklükler türetilmelidir. Bağıl olarak büyük sayılarla çakışıldığından, hesaplar bilgisayarda, mutlaka iki kat duyarlılıkta yapılmalıdır.

Kesin çözüm veren yöntemlerden burada, yalnızca Borkowski, Heikkinen, Ozone, Paul yöntemleri incelenmiştir (Çizelge-3).

Borkowski çözümü, enlemin  $0^\circ < \phi < 2^\circ$  ve özellikle  $0^\circ < \phi < 1^\circ$  arasında yer aldığı kesimlerde tam kesin (birebir karşılık) sonuç vermez.

Heikkinen çözümü, enlemin ( $\phi \sim 90^\circ$ )  $90^\circ$  ye çok yaklaştığı durumlar dışında, genel olarak diğer kesin çözüm veren yöntemler içinde, sayısal bakımdan en doğru sonuç veren yöntemdir.

Ozone çözümü,  $\phi = 0^\circ$  için tanımlı değildir. Ayrıca enlemin  $89^\circ < \phi < 90^\circ$  arasında olduğu kesimde, tam kesin sonuç vermez.

Paul çözümü,  $\phi = 0^\circ$  için tanımlı değildir. Ayrıca enlemin  $\phi < \sim 20^\circ$  ve özellikle  $0^\circ < \phi < 5^\circ$  arasında olduğu kesimlerde tam kesin sonuç vermez. Hatta enlem sıfıra yaklaştığı kesimlerde hesaplanan enlem, olması gerekenen önemli ölçüde sapar. Çizelge-3'ten de görüldüğü gibi, burada ele alınan kesin çözümler içinde en sağlıksız sonuç veren bir yöntemdir.

Tüm kesin çözüm yöntemleri,  $z$  ekseni üzerinde bulunan tüm noktalar ( $x = y = 0, z \neq 0$ ) ve özel olarak kutup noktaları için tanımlı değildir. Özellikle kutup noktaları ( $\phi \sim \pm 90^\circ$ ) ve ekvator ( $\phi \sim 0^\circ$ ) çevresinde tam kesin sonuç vermezler. Borkowski çözümü, kutup noktasını (ya da kutup noktalarını) merkez alan yaklaşık 1 cm yarıçapında bir çember (tanımsızlık dairesi) içindeki tüm noktalar için tanımlı değildir. Heikkinen yönteminde bu tanımsızlık dairesinin yarıçapı yaklaşık 1 dm, Ozone yönteminde yaklaşık E-8 m, Paul çözümünde ise yaklaşık 1 mm kadardır.

Çizelge 3'teki sonuçlar yakından incelenirse, tüm kesin çözümlerin (algoritmaların) kuramsal olarak tam doğru olmalarına karşın bazı durumlarda, sayısal bakımdan nasıl kararsız oldukları ve özellikle aynı sonucu vermedikleri açıkça görülmektedir.

Iteratif yöntemlerden burada, Bartelme ve Meissl, Vincenty yöntemleri ile tarafımızdan geliştirilen iki yöntem (bak. Bölüm 10) ve ayrıca yine tarafımızdan geliştirilen genelleştirilmiş Bowring ve genelleştirilmiş Borkowski yöntemleri incelenmiştir.

Çizelge 1.a gerek genelleştirilmiş Bowring ve gerekse genelleştirilmiş Borkowski iteratif yöntemlerinin 6'ncı dereceye kadar olan iterasyon adımları görülmektedir. Bu çizelgede, soldaki 1'nci iterasyon bilinen Bowring yöntemini, sağdaki 1'nci iterasyon da bilinen Borkowski iterasyon yöntemini oluşturmaktadır. Her iki yöntemde de 6'ncı iterasyona kadar gidilmesine karşın tam kesin sonuçlara ulaşamamıştır.

Çizelge 1.b'de Bartelme ve Meissl, Vincenty iteratif yöntemlerinin sonuçları görülmektedir. Bartelme ve Meissl yönteminde 3'ncü iterasyonda, Vincenty yönteminde ise 4'ncü iterasyonda tam ve kesin sonuçlara ulaşılmıştır.

Çizelge 2.a'da bölüm 6'da tarafımızdan geliştirilen, iteratif yöntemin 6'ncı dereceye kadar olan iterasyon sonuçları sergilenmiştir, 6'ncı iterasyonda tam ve kesin sonuçlara ulaşıldığı görülmektedir.

Çizelge 2.b'de ise bölüm 10'da formülleri verilen, tarafımızdan önerilen, ikinci iteratif yöntemin sonuçları sergilenmiştir. Bu yöntemde istenen adımda (iterasyonda) enlem, önce bölüm 6'daki enlemi doğrudan veren formüllerin birinden, örneğin (30.b)'den hesaplanır. Daha sonra  $h$ , (32) formülünden hesaplandıktan sonra, enlem yeniden(5.a veya 5.b) formüllerinin birinden elde edilir. Bu yöntemle 3'ncü adımda tam ve kesin sonuçlara ulaşıldığı çizelge-2.b' den görülmektedir. Yüksekliğin ara değer olarak hesaplanması sonra, enlemin buna göre yeniden bulunması, iterasyon sürecini oldukça kısaltmaktadır.

Bu sayısal araştırmalara göre, kesin çözümlerden en doğru sonuç veren Heikkinen yöntemi, ve iteratif çözümlerden aynı derecede tam ve kesin sonuçları veren Bartelme ve Meissl, Vincenty yöntemleri ile tarafımızdan geliştirilen iki iteratif yöntemdir. Bu yöntemlerden doğal olarak hesaplama zamanı en az olanlar tercih edilmesi gereklidir. Bu amaçla bu yöntemlerin herbiri için,

bilgisayarda ayrı birer program yapılarak bağıl hesap süreleri (execution time) bulunmuştur. Bu süreler çizelgelerde en altta ayrı bir satırda gösterilmiştir. Bu adı geçen 4 iteratif yöntemin sonuçlarının yer aldığı çizelgeler incelenirse, bunlardan en hızlı hesaplananın tarafımızdan geliştirilen, bölüm 10'daki ikinci iteratif yöntem olduğu ve onu bölüm 10'daki birinci iteratif yöntemin izlediği görülür. Tarafımızdan geliştirilen her iki iteratif yöntemde de kutup noktalarındaki tanımsızlık dairesinin yarıçapı yaklaşık E-8 m kadardır.

Kurulan bu sayısal test modelinde yükseklikler (8), (31) ve (32) formüllerine göre ayrı ayrı hesaplanmıştır. Özellikle  $\phi \sim 0^\circ$  ve  $\phi \sim \pm 90^\circ$  özel durumlarında ve genel olarak her durumda ( $h \sim 0$  m dışında) (32) formülünün daha doğru ve daha kararlı sonuçlar verdiği saptanmıştır.

## 10. İKİ YENİ İTERATİF ALGORİTMANIN ÖZET FORMÜLLERİ

Bölüm 9'da (30.b) ve (32) formülleri üzerinde yapılan sayısal araştırmalarдан çıkan sonuçlara göre, dönüşüm problemini tam kesin olarak çözen (en kesin sonuçları veren Heikkinen yöntemi ile tamamıyla aynı) iki yeni algoritma ortaya konabilir:

a. Birinci iteratif yöntem: Enlem, (30.b) formülünden 6'ncı ( $i = 6$ ) iterasyona göre bulunur:

$$\tan \phi = \tan \phi_6 = -\frac{z}{p} K_6^{-1} \quad (34)$$

Enlem bu formüle göre bulunduktan sonra,  $h$  (32)'den ve bu formüldeki  $x_o, y_o, z_o$  (2)'den ve  $N$  değeri (7.a) veya (7.b)'den elde edilir.

b. İkinci iteratif yöntem: Enlem önce (30.b) formülünden 3'ncü ( $i = 3$ ) iterasyona göre bulunur, yani

$$\tan \phi_3 = -\frac{z}{p} K_3^{-1} \quad (35)$$

Sonra bu  $\phi_3$  enlemi, (7.a veya 7.b) ve (2) formüllerinde yerine konarak sırasıyla  $N, x_o, y_o, z_o$  hesaplanır:

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin \phi_3}$$

$$\begin{aligned}
 x_o &= N \cos \phi_3 \cos \lambda \\
 y_o &= N \cos \phi_3 \sin \lambda \\
 z_o &= N (1-e^2) \sin \phi_3
 \end{aligned} \tag{36}$$

Daha sonra bunlara dayanarak (32)'ye göre  $h$  bulunur. Son olarak hesaplanan  $N$  ve  $h$ , (5.a) veya (5.b)'de yerine konarak kesin enlem elde edilir.

## 11. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yazında jeodezik dik koordinatlardan jeodezik eğri koordinatlarının bulunması sorunu (ters problem), hem kesin çözümler ve hem de iteratif çözümler bakımından incelenmiştir. Özellikle formülleri karmaşık olan, dolayısıyla zor denetlenen ve  $\phi \sim 0^\circ$  veya  $\phi \sim \pm 90^\circ$  özel durumlarında doğru sonuç vermeyen, yani sayısal bakımından kararsız olan kesin çözümler yerine; sözü edilen özel durumlarda da daha doğru sonuç veren, açık, yalın iki yeni iteratif yöntem geliştirilmiştir.

Bilinen iteratif çözüm, burada geliştirilen bir yolla genelleştirilerek, enlem, doğrudan tek bir formül halinde (30.a, b formülleri) açık olarak ifade edilmiştir. Böylece hem bağıl olarak biraz keyfilikeyt taşıyan iterasyon sürecinden kurtulunmuş ve hem de enlem formülü programlamaya daha yatkın bir duruma getirilmiştir.

Kurulan sayısal bir test modelinde yapılan araştırmalara göre, kesin çözümler içinde en doğru sonuçları veren Heikkinen yöntemiidir. Bölüm 6'da geliştirilen, genelleştirilmiş iteratif çözüm (30.a, b formülleri) 6'ncı iterasyonda, Heikkinen ki ile tamamen aynı sonuçları vermiştir (Bölüm 10'daki birinci iteratif yöntem). Aynı şekilde bölüm 10'da açıklanan ikinci iteratif yöntem de her durumda tam kesin sonuçları vermiştir. Ayrıca Bartelme ve Meissl yöntemi, 3'ncü iterasyonda, Vincenty yöntemi 4'ncü iterasyonda aynı biçimde tam kesin sonuçları vermişlerdir. Ancak bu yöntemlerin içinde bilgisayarda bağıl hesaplanma süresi en kısa olanı, tarafımızca geliştirilen ikinci iteratif yöntem olmuş ve bunu birinci iteratif yöntem izlemiştir. Böylece sayısal açıdan kesin çözümlerden daha kararlı ve  $\phi \sim 0^\circ$ ,  $\phi \sim \pm 90^\circ$  özel durumlarında daha doğru ve ayrıca hesaplama süresi daha kısa olan, iki yeni çözüm yöntemi ortaya konmuştur.

Özetle, eğer enlem için tek bir formül gerekiyor, ya da yalnız enlem bulunacaksa, o zaman enlem (34) formülünden (birinci iteratif yöntem) hesaplanmalıdır. Eğer hem enlem ve hem de elipsoid yüksekliği bulunacaksa, o zaman (35), (36), (32) ve (5.a veya 5.b) formülleri, yani ikinci iteratif yöntem uygulanmalıdır.

Bu yazında özellikle yüksekliğin, sayısal bakımdan daha doğru ve daha kararlı olarak bulunması için araştırmalar yapılmıştır. Buna göre elipsoid yüksekliğinin, (8) veya (31) formülünden değil, (32) formülünden bulunması gerektiği ortaya çıkmıştır.

Dönüşüm problemi, z ekseni üzerinde bulunan tüm noktalar ( $x = y = 0$ ,  $z \neq 0$ ) ve özel olarak kutup noktaları, yani  $\phi = \pm 90^\circ$  olduğu noktalar için tanımlı değildir. Bunun dışında  $\lambda = 90^\circ$ ,  $270^\circ$  değerleri için de problem, daha doğrusu boylamı veren tanjant fonksiyonu tanımlı değildir. Bu durumda sonuç alabilmek, yani bilgisayarda programın kesilmesini önlemek için (33) formüllerinin birinden yararlanılabilir.

#### K A Y N A K L A R

- /1/ Bartelme,N., Meissl,P. : Ein einfaches, rasches und numerisch stabiles Verfahren zur Bestimmung des kürzesten Abstandes eines Punktes von einem sphäroidischen Rotationsellipsoid. AVN 82, s.436-439, 1975.
- /2/ Benning,W. : Die kürzeste Abstand eines in rechtwinkligen Koordinaten gegebenen Außenpunktes vom Ellipsoid. AVN 81, s.429-433, 1974.
- /3/ Borkowski,K.M. : Accurate algorithms to transform geocentric to geodetic coordinates. Bull. Geod. 63,s.50-56,1989.
- /4/ Bowring,B.R. : Transformation from spatial to geographical coordinates Survey Review. Vol.XXIII, No.181, s. 323-327, 1976.
- /5/ Fröhlich,H., Hansen,H.,H. : Zur Lotfusspunktberechnung bei rotationsellipsoidischer Bezugsfläche. AVN 83, s.175-179,1976.

- /6/ Grafarend,E.W., Lohse,P. : The minimal distance mapping of the topographic surface on to the (reference) ellipsoid of revolution. *Manuscripta geodaetica*, 16, s.92-110, 1991.
- /7/ Heck,B. : Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. *Wichmann Verlag, Karlsruhe*, s.64, 74-76, 1987.
- /8/ Heikkinen,M. : Geschlossene Formeln zur Berechnung räumlicher geodätischer Koordinaten aus rechtwinkligen Koordinaten. *ZFV 107*, s.207-211, 1982.
- /9/ Heiskanen,W., Moritz,H. : Physical geodesy. *W.H.Freeman Publ., San Francisco*, S.183, 1967.
- /10/ Hekimoğlu,S. : Die neuen Formeln zur Berechnung des Richtungswinkels ohne Quadrantenabfrage. *ZFV, 117*, s.317-322, 1992.
- /11/ Hirvonen,R.A., Moritz,H. : Practical Computations of Gravity at High Altitudes. Report No.:27. *Ins.Geod.Phot.Cart. Ohio State Univ.* 1963.
- /12/ Jordan-Engeln,G., Reutter,F. : Numerische Mathematik für Ingenieure, B.I. *Hochschultaschenb.* Band 104, *Mannheim*, s.43, 1973.
- /13/ Korn,G.A., Korn,T.M. : Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. *Mc Graw Hill, New York*, S.24, 1961.
- /14/ Laskowski,P. : Is Newton's iteration faster than simple iteration for transformation between geocentric and geodetic coordinates? *Bull.Geo.65*, s.14-17, 1991.
- /15/ Ozone,M.J. : Non-iterative solution of the  $\phi$  equation Surveying and Mapping 45, s.169-171, 1985.
- /16/ Paul,M.K. : A note on computation of geodetic coordinates from geocentric (Cartesian) coordinates. *Bull. Geo.108*, s.135-139, 1973.

- /17/ Penev,P. : Transformation of rectangular coordinates into geographical coographical coordinates by closed formulas. Geod.Map. and Pho. 20. s.175-177,1978.
- /18/ Pick,M. : Closed formulas for transformation of the Cartesian coordinate system into a system of geodetic coordinates. Studia Geoph.et Geod.29, s.112-119, 1985.
- /19/ Stoer,J. : Einführung in die Numerische Mathematic I Springer Verlag, Berlin, s.11, 1972.
- /20/ Sünkel,H. : Ein nicht-iteratives Verfahren zur Transformation geodätischer Koordinaten Öster, Zeitsch.für Vermessungw. 64, s.29-33, 1976.
- /21/ Ünal,T. : Elipsoid dik koordinatlardan Jeodezik Koordinat-lara dönüşüm. Harita ve Kad.Müh. Sayı:44, s.83-89, 1983.
- /22/ Vanicek,P., Krakiwsky,E.J. : Geodesy: The Concepts. North-Holland Publ.Com. Amsterdam, s. 324, 1982.
- /23/ Vincenty,T. : Ein Verfahren zur Bestimmung der geodätischen Höhe eines Punktes. AVN 83, s.179, 1976.
- /24/ Vincenty,T. : Zur raumlich-ellipsodischen Koordinaten-Transformation. ZFV 105, s.519-521, 1980.

Çizelge 1.a: Genelleştirilmiş iteratif çözümlerde  $(\phi_{\text{gerçek}} - \phi_{\text{hesap}}) \times 10^{-13}$  farkları

$\phi$ (°)	h km	Genelleştirilmiş BOURING						Genelleştirilmiş BORKOWSKI					
		1 *)	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
89,99	100 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	10 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
70	100 000	- 462 399	- 3 328	- 22	0	0	0	1 150 781	- 807 341	0	0	0	0
	10 000	- 126 997	- 5 943	- 27	- 2	- 2	- 2	- 826 663	- 222 992	0	- 1	- 1	- 1
	1 000	- 139 384	- 145	0	0	0	0	- 134 514	- 2 467	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	- 360 703	515	0	1	1	1	- 373 311	6 420	1	1	1	1
45	100 000	- 1 744 577	- 5 533	- 9	- 2	- 2	- 2	4 343 790	- 3 044 195	- 2	- 2	- 3	- 3
	10 000	- 4 788 068	- 9 866	- 28	- 2	- 2	- 2	- 3 117 103	- 835 496	- 3	- 1	- 11	- 11
	1 000	- 524 971	- 24	- 1	- 1	- 1	- 1	- 506 651	- 9 161	- 1	- 1	- 1	- 1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	- 1 357 606	852	5	5	5	5	- 1 404 985	23 692	5	5	5	5
20	100 000	- 464 274	405	2	0	0	0	1 156 511	- 809 643	0	0	0	0
	10 000	- 1 273 316	724	0	2	2	2	- 829 053	- 220 793	0	- 1	- 1	- 1
	1 000	- 139 465	18	0	0	0	0	- 134 603	- 2 398	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	- 360 414	- 63	1	0	0	0	- 372 971	6 163	1	1	1	1
0.01	100 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	10 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	100 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	10 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Bağıl hesap. süresi	$\phi$	1.4	1.8	2.5	3.3	4.2	5.1	2.1	2.4	2.8	3.2	3.6	4.1
	$\phi$ ve h						5.5						4.5

\*) 1,2,3,... sayıları iterasyon adımlarını gösterir.

Çizelge-1.b: İteratif çözümlerde  
 $(\phi_{\text{gerçek}} - \phi_{\text{hesap}}) \times 10^{-13}$  farkları

Çizelge-2.a: (30.b) formülüne göre  
 $(\phi_{\text{gerçek}} - \phi_{\text{hesap}}) \times 10^{-13}$  farkları

21

$\phi$ (°)	h km	BARTELME ve MEISSL			VINCENTY				İTERASYONLAR					
		$\mu = 1$	$u=2$	$u=3$	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6
89.99	100 000	0	0	0	0	0	0	0	255 698	- 103	0	0	0	0
	10 000	0	0	0	0	0	0	0	1 081 077	-2 844	7	0	0	0
	1 000	0	0	0	0	0	0	0	534 402	-3 125	18	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	0	0	0	0	0	0	0	- 100 793	8 095	-65	1	0	0
70	100 000	- 134 959	0	0	- 434	0	0	0	415 765 388	-148 343	53	0	0	0
	10 000	116 423	0	0	-1 725	1	0	0	1 757 602 831	-4 078 115	9 462	-22	0	0
	1 000	547 371	-1	0	- 139	0	0	0	868 662 669	-4 482 058	23 126	-119	1	0
	0	0	0	0	- 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	-1 657 806	14	0	-1 459	0	0	0	-1 638 168 297	11 609 719	-82 278	583	-4	0
45	100 000	- 507 467	-1	0	292	-1	0	0	366 222 175	- 73 707	15	0	0	0
	10 000	436 554	-2	0	- 129	3	0	0	1 547 504 826	-2 026 291	2 653	-4	0	0
	1 000	2 053 547	-12	0	168	-1	0	0	76 435 682	-2 227 003	6 488	-19	0	0
	0	0	0	0	- 41	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	-6 215 636	131	0	-1 146	-7	0	0	-1 440 866 173	5 768 555	-23 095	92	0	0
20	100 000	- 134 593	0	0	2 244	-13	0	0	55 069 922	- 2 583	0	0	0	0
	10 000	115 465	0	0	8 248	-3	0	0	232 603 485	- 71 016	22	0	0	0
	1 000	543 422	-1	0	2 247	-2	0	0	114 818 786	- 78 050	53	0	0	0
	0	0	0	0	- 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	-1 643 791	14	0	- 706	-1	0	0	- 216 351 368	202 172	- 189	0	0	0
0.01	100 000	0	0	0	153	-1	1	0	1	0	0	0	0	0
	10 000	0	0	0	667	-3	1	0	3	0	0	0	0	0
	1 000	0	0	0	112	-1	0	0	2	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	0	0	0	359	1	0	0	-3	0	0	0	0	0
0	100 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	10 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1 000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	0	0	0	0	0	c	0	0	0	0	0	0	0
Bağıl hesap. süresi	$\phi$								0.9	1.0	1.1	1.2	1.2	1.3
	$\phi$ ve h	1.4	2.0	2.5	3.0	4.2	5	6						1.6

Çizelge-2.b: İkinci iteratif yönteme göre  
 $(\phi_{\text{gerçek}} - \phi_{\text{hesap}}) \times 10^{-13}$  farkları

$\phi$ (°)	h km	İ T E R A S Y O N L A R			BORKOWSKI	P A U L	OZONE	HETKKINEN
		1	2	3				
89.99	100 000	0	0	0	- 1	0	- 19	0
	10 000	0	0	0	- 1	0	- 3	0
	1 000	0	0	0	- 1	0	- 2	0
	0	0	0	0	- 1	0	0	0
	-1 000	0	0	0	- 1	0	0	0
70	100 000	100	0	0	0	1	0	0
	10 000	1 971	- 5	0	0	0	0	0
	1 000	488	- 3	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	1 664	-12	0	0	0	0	0
45	100 000	234	0	0	0	0	0	0
	10 000	4 186	- 6	0	0	0	0	0
	1 000	1 029	- 3	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1 000	3 576	-15	0	0	- 1	0	0
20	100 000	14	0	0	0	-41	0	0
	10 000	259	0	0	0	- 3	0	0
	1 000	63	0	0	0	- 2	0	0
	0	0	0	0	0	- 5	0	0
	-1 000	224	0	0	0	3	0	0
0.01	100 000	0	0	0	- 138 032	- 242 823 148 392	0	0
	10 000	0	0	0	46 438	- 531 183 684 104	0	0
	1 000	0	0	0	- 1 088	- 495 878 254 029	0	0
	0	0	0	0	- 667	- 170 104 043 407	0	0
	-1 000	0	0	0	- 354	- 527 485 992 418	0	0
0	100 000	0	0	0	0	**) program	*) program	0
	10 000	0	0	0	0	çalışmaz	çalışmaz	0
	1 000	0	0	0	0			0
	0	0	0	0	0			0
	-1 000	0	0	0	0			0
Bağıl hesap. süresi	$\phi$				2.9	3.5	2.0	4.3
	$\phi$ ve h		1.6		3.4	4.0	2.5	4.8

\*) z'ye  $10^{-9}$  değeri eklenirse, yani  $z = z + 10^{-9}$ , program çalışır

\*\*) Burada da z'ye  $10^{-9}$  eklenince program çalışır, fakat saçma sonuçlar çıkar.

Çizelge-3: Kesin Çözümlerde  
 $(\phi_{\text{gerçek}} - \phi_{\text{hesap}}) \times 10^{-13}$  farkları