JEODEZİK DEFORMASYON ÖLÇÜTLERİNİN İRDELENMESİ, θ^2- ÖLÇÜTÜ

Yazan: Dr. Ergün ÖZTÜRK

KTÜ. TRABZON

1. GİRİŞ

Jeodezik deformasyon ölçütlerinde uzun zamandan beri en yeni ve en duyarlı aletler kullanılmaktadır. Fakat bu ölçülerin irdelenmesinde yakın zamana kadar yaklaşık yöntemler uygulanmaktaydı. Ancak elektronik bilgisayarların yaygınlaşması ve matematik istatistik yöntemlerin uygulanması sonucunda deformasyon ölçülerinin irdelenmesi için kesin ve ekonomik çözümlere ulaşılabilmiştir. Son zamanlarda bu konu birçok yazar tarafından araştırılmış ve oldukça farklı çözüm yolları önerilmiştir. Sözgelişi AESCHLİMANN 1971, BAUMANN 1972, MİLEV 1973, PELZER 1971, UĞUR 1974 gibi. Burada sadece PELZER (1971) tarafından geliştirilip kısmen düzeltilen (PELZER 1974) yöntemin ana fikri ve özellikle yüzey ağlarındaki uygulama için gerekli formüller verilip, irdeleme yönteminin dayandığı teoriye girilmeyecektir.

Mühendislik yapılarının gözlenmesi veya güncel yerkabuğu hareketlerinin incelenmesi amacıyla yapılan jeodezik deformasyon ölçüleri kısaca şöyle özetlenebilir: Bir t_o zamanında yapılan başlangıç ölçüleri yardımıyla belirli noktaların birbirine göre konumu saptanır. Bu işlem aynı veya benzer yollarla daha sonra t_1, t_2, ... zamanlarında tekrarlanır ve sonuçların irdelenmesi yoluyla belirli noktalardaki aykırılıkların doğrultu ve büyüklükleri araştırılır. Böyle bir irdelemenin amacı ; başlangıç ve tekrarlama ölçüleriyle elde edilen iki nokta kümesinin eşdeğer olup olmadıklarının saptanmasıdır.

İki ölçü arasında geçen sürede hiçbir noktada deformasyon oluşmasa bile kaçınılmaz ölçü hataları nedeniyle, bu ölçülerden elde edilen nokta kümeleri arasında matematik anlamda kesin bir eşdeğerlik beklenemez. İki nokta kümesinin birbiri üzerine çakıştırılması sonucunda bazı noktalarda az çok aykırılıklar görülecektir. Bunların tesadüfi aykırılıklar olarak mı görülmesi gerektiği, yoksa nokta kümesinin deformasyonu olarak mı değerlendirilmesi gerektiği sorusuna θ^2- ölçütü uygulanarak cevap verilebilir.

2. ÖLÇÜLERİN DENGELENMESİ

İncelenecek nokta kümesinin yaklaşık koordinatlarının hesaplanmasından sonra, başlangıç ve tekrarlama ölçüleriyle elde edilen gözlemler iki vektörde toplanabilirler *.)

$$\underline{l}_o = \left[l_{o1},\ l_{o2},\ \dots\ l_{on_o} \right]^T \quad \text{başlangıçta yapılan gözlemler,}$$

$$\underline{l}_1 = \left[l_{11},\ l_{12},\ \dots\ l_{1n_1} \right]^T \quad \text{tekrarlama ölçüsündeki gözlemler.}$$

n_o, n_1 : başlangıç ve tekrarlama ölçülerindeki gözlem sayıları.

Ölçülerin ağırlık matrisleri de $\underline{P}_o$ ve $\underline{P}_1$ ile gösterilsin.

---

* Matrisler altı çizili büyük harflerle, vektörler altı çizili küçük harflerle gösterildi. Bunların evrikleri üzerlerine konan ^{T} harfiyle ve matrislerin tersleri $^{-1}$ ile tanımlandı.

İlk işlem heriki gözlem grubunun ayrı ayrı endirek ölçüler dengelemesi yöntemine göre kesin dengelenmeleridir. Böylece incelenecek ağ için iki ayrı çözüm vektörü elde edilir. Başlangıç ve tekrarlama ölçülerindeki gözlemler gerek yönetimce, gerek sayıca farklı olabilirler. İki ölçüden sadece birinde gözlenebilen noktalar varsa- söz gelişi bazı noktaların kaybolması veya gözlenen nokta sayısı azaltılarak ölçü programının değiştirilmesi gibi durumlarda - ortak olmayan bu noktalara ait bilinmiyenler dengeleme sırasında yok edilmelidir.

Dengeleme sonucunda ağ noktalarının yaklaşık koordinatlarına eklenecek bilinmeyenler

$\underline{x}_o$, $\underline{x}_1$: ortak noktalara ait bilinmiyenleri,

$\underline{y}_o$, $\underline{y}_1$: ortak olmayan noktalara ait bilinmiyenleri

göstermek üzere dört ayrı vektörde toplanırsa ; hata denklemleri gerek başlangıç ölçüsü (i = o) , gerekse tekrarlama ölçüsü(i = 1) için

$$\underline{l}_i + \underline{v}_i = \left[\underline{A} \mid \underline{B}\right]_i \left[\begin{array}{c}\underline{x} \\ \hline \underline{y}\end{array}\right]_i \tag{1}$$

şeklinde kurulabilirler. Burada katsayılar matrisi bilinmiyenlere uygun olarak $\underline{A}_i$ ve $\underline{B}_i$ gibi iki alt matrise bölünmüştür.

Bu hata denklemlerinden

$$\left[\begin{array}{c|c}\underline{A}^T \underline{PA} & \underline{A}^T\underline{PB} \\ \hline \underline{B}^T\underline{PA} & \underline{B}^T\underline{PB}\end{array}\right]_i \left[\begin{array}{c}\underline{x} \\ \hline \underline{y}\end{array}\right]_i - \left[\begin{array}{c}\underline{A}^T\underline{Pl} \\ \hline \underline{B}^T\underline{Pl}\end{array}\right]_i = \underline{o} \tag{2}$$

normal denklemleri kurulur. Aşağıdaki kısaltmalar ve dönüşümler kullanılırsa ;

$$\left[\begin{array}{c|c}\underline{N}_{AA} & \underline{N}_{AB} \\ \hline \underline{N}_{BA} & \underline{N}_{BB}\end{array}\right]_i \left[\begin{array}{c}\underline{x} \\ \hline \underline{y}\end{array}\right]_i - \left[\begin{array}{c}\underline{w}_A \\ \hline \underline{w}_B\end{array}\right]_i = \underline{o} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \underline{N}_i &= \underline{N}_{AA} - \underline{N}_{AB}\, \underline{N}_{BB}^{-1}\, \underline{N}_{BA} \\ \underline{w}_i &= \underline{w}_A - \underline{N}_{AB}\, \underline{N}_{BB}^{-1}\, \underline{w}_B \end{aligned} \tag{4}$$

ortak olmayan noktalardaki bilinmiyenlerin yok edilmesinden sonra,

$$\underline{N}_i\, \underline{x}_i - \underline{w}_i = \underline{o} \tag{5}$$

ortak noktalara ait normal denklemler elde edilir.

Deformasyon ölçülerinin irdelenmesinde hiçbir noktanın değişmez, sağlam olduğu önceden varsayılamayacağından; yüzey ağlarındaki alışılmış uygulamadan farklı olarak burada hiçbir nokta sabit alınıp, koordinatları değişmez kabul edilemez . x- ve y- doğrultularında çok küçük de olsa sabit birer koordinat ötelemesi ve nokta kümesinin küçük bir dönüklüğü her zaman söz konusudur. Bu gibi durumlarda belirsiz bir konumlama ve yöneltmeden söz edilir. Hiçbir uzunluk ölçülmemişse ; o zaman ölçek de belirsizdir. Yukarıdaki (5) normal denklemlerini çözebilmek için $\underline{N}_i$ matrisinin tersinin bilinmesi gerekir. Oysa burada en azından belirsiz bir konumlama ve yöneltme söz konusu olduğundan serbest ağların (freies Netz) dengelenmesi sorunuyla karşılaşılır. $\underline{N}_i$ matrisinin doğrudan tersi alınamaz. Determinatı sıfır, matris bozuktur (singulär). Bilindiği gibi:

a) Sadece açı veya doğrultuların ölçüldüğü bir ağda; $\underline{N}_i$ matrisinin bozukluk derecesi (Rangabfall, Defekt) r = 4 dür. Koordinat eksenleri doğrultusunda 2 belirsiz öteleme, 1 belirsiz dönme ve 1 belirsiz gerilme (ölçek değişmesi) ağın dış prametreleridir. $\underline{N}_i$ nin bozukluk derecesi r çoğu kez ağın serbestlik derecesi veya dış serbestlik derecesi (freiheitsgrade, äussere freiheitsgrade) diye tanımlanır.

b) Yalnızca uzunlukların ölçüldüğü bir ağda; r = 3 .
(2 belirsiz ötelem, 1 belirsiz dönme)

c) Uzunluk ve doğrultuların ölçüldüğü karışık bir ağda ; r = 3, yani 2 belirsiz öteleme ve 1 belirsiz dönmedir.

Bozuk matrislerin terslerinin hesabı için çeşitli yöntemler önerilmiştir, sözgelişi MEISSL 1969, MITTERMAYER 1971,1972 ve PELZER 1974 gibi. Çözüm için normal denklemlere

$$\underline{x}^T \underline{x} = \min. \tag{6}$$

şeklinde fazladan bir koşul eklenmesi yeterli olmaktadır. Böylece bilinmiyenlerin erişilebilen en büyük incelikle hesaplanması olarak yorumlanabilen,

$$iz(\underline{Q}) = \min. \tag{7}$$

kofaktörler matrisi $\underline{Q}$ nun izinin (esas eksen üzerindeki elemanları toplamı) en küçük olması sonucuna varılmaktadır. PELZER'e göre $\underline{N}_i$ matrisinin genel - leştirilmiş tersi (verallgemeinerte Inverse)

$$\underline{Q}_i = (\underline{N}_i + \underline{GG}^T)^{-1} - \underline{GG}^T \tag{8}$$

ile hesaplanabilir. MEISSL (1969) 2p,r boyutlu $\underline{G}$ matrisinin ağın yaklaşık koordinatlarıyla $(\bar{x},\bar{y})$

$$\underset{(2\bar{p},4)}{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \\ 1 & 0 & -\bar{y}_1 & \bar{x}_1 \\ 0 & 1 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \\ 1 & 0 & -\bar{y}_2 & \bar{x}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \bar{x}_p & \bar{y}_p \\ 1 & 0 & -\bar{y}_p & \bar{x}_p \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \underset{(2p,3)}{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \bar{x}_1 \\ 1 & 0 & -\bar{y}_1 \\ 0 & 1 & \bar{x}_2 \\ 1 & 0 & -\bar{y}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \bar{x}_p \\ 1 & 0 & -\bar{y}_p \end{bmatrix} \qquad (9)$$

p= her iki ölçüde de ortak nokta sayısı.

kolayca yazılabileceğine işaret etmiştir. Buradan koordinat bilinmeyenleri

$$\underline{x}_i = \underline{Q}_i \, \underline{w}_i \qquad (10)$$

ve sonuç olarak ; (2) de göznüne alınarak (1) den

$$\underline{v}_i = \left[\underline{E} - \underline{B}(\underline{B}^T \underline{P}\ \underline{B})^{-1} \underline{B}^T \underline{P} \right]_i (\underline{A}\ \underline{X} - \underline{1})_i \qquad (11)$$

E = birim matrisi,

düzeltmeler hesaplanabilir. Birim ağırlığın ortalama hatası

$$m_i = \sqrt{\frac{\underline{v}_i^T \underline{P}_i \underline{v}_i}{f_i}} \qquad (12)$$

$f_i = n_i - u_i$ fazla ölçü sayısı,

u_i = ortak olan, olmayan bütün noktalardaki koordinat bilinmeyenlerinin toplam sayısı,

bilinen formülüyle elde edilir.

Her iki ölçüde de bütün noktaların ortak olması halinde formüller çok daha sadeleşecektir. O zaman (4) dönüşümlerine gerek kalmadan alışılagelen dengeleme kurallarıyla hesap yapılacaktır.

3. İRDELEME YÖNTEMİNİN ANA KURALLARI

Jeodezik ölçülerin doğruluğu; teorik standart sapma σ nın uygulamada elde edilen değeri olarak da yorumlanabilen, birim ağırlığın ortalama hatası m_i (12) ile tanımlanır. m_i nin birbirinden bağımsız olarak başlangıç gözlemlerinden hesaplanan m_o ve tekrarlama gözlemlerinden elde edilen m_1 değerleriyle bir karesel ortalamada birleştirilebilirler.

$$m = \sqrt{\frac{f_o . m_o^2 + f_1 . m_1^2}{f_o + f_1}} \qquad (13)$$

Teorik standart sapma σ için başka bir değer de başlangıç ve tekrarlama gözlemlerinin dengelenmesi sonucunda elde edilen çözüm vektörlerinin farklarından hesaplanabilir. Aykırılık vektörü

$$\underline{d} = \underline{x}_o - \underline{x}_1 \tag{14}$$

olarak tanımlanan $\underline{d}$ nin başka bir geometrik anlamı daha vardır.

Eğer başlangıç ve tekrarlama gözlemleri ; ağın herhangi iki noktasının sabit oldukları varsayılarak, alışılageldiği gibi dengelenirlerse : heriki ölçüden elde edilen dengelenmiş koordinatlar Helmert- Transformasyonu ile birbiri üzerine çakıştırıldığında ; ortak noktalardaki aykırılıklar doğrudan doğruya $\underline{d}$ vektörünün elemanlarını verirler (PELZER 1971).

Genelleştirilmiş hata yayılma kanunu (WOLF 1975, s. 72) uygulanarak $\underline{d}$ vektörünün kofaktörler matrisi hesaplanırsa

$$\underline{Q} = \underline{Q}_o + \underline{Q}_1 \quad , \tag{15}$$

bunun genelleştirilmiş tersi alınarak da

$$\underline{P} = (\underline{Q} + \underline{G}\,\underline{G}^T)^{-1} - \underline{G}\,\underline{G}^T \tag{16}$$

ağırlık matrisi $\underline{P}$ bulunabilir.

Ağın herhangi bir noktasında deformasyon oluşup oluşmadığını araştırabilmek için; önce "sıfır hipotezi" H_o olarak hiçbir noktada deformasyon oluşmadığı varsayılsın. Bu hipotezin doğru olması halinde; görünen aykırılıklar , yani $\underline{d}$ vektörünün elemanları, tesadüfi gözlem hatalarının sonuçları olarak açıklanabilirler. Böylelikle $\underline{d}$ vektöründe toplanan bu aykırılıklardan doğrudan doğruya gözlemlerin inceliği için bir ölçüt hesaplanabilir.

$$\theta = \sqrt{\frac{\underline{d}_1^T\,\underline{P}_1\,\underline{d}_1}{h}} \tag{17}$$

"Ortalama aykırılık" diye de adlandırılan θ (PELZER 1971) ;birim ağırlığın ortalama hatası m nin (13) istatistik yönden bağımsız, bir başka değeridir. Burada h ; $\underline{d}$ vektörünün bağımsız elemanlarının sayısıdır. Aykırılık vektörü elemanlarının toplam sayısından $\underline{Q}$ matrisinin bozukluk derecesinin çıkarılması ile bulunur ve (17) formülündeki $\underline{d}_1$ vektörünün eleman sayısını verir.

$$h = u - r \tag{18}$$

$\underline{P}_1$: $\underline{P}$ matrisinin ilgili elemanlarından oluşan alt matristir.

Ortalama aykırılık θ nın diğer bir özelliği de değişmez olmasıdır. Toplam aykırılık vektörü $\underline{d}$ nin hangi h elemanı alınarak $\underline{d}_1$ oluşturulursa oluşturulsun ; θ nın değeri daima sabit kalır.

Başlangıçta varsayılan H_o hipotezi geçerli ise, başka bir deyişle $\underline{d}$ vektöründe toplanan aykırılıklar kaçınılmaz gözlem hatalarının sonucu olarak açıklanabilirlerse ;

$$\bar{F} = \frac{\theta^2}{m^2} \tag{19}$$

oranı pay-da h ve payda-da $f = f_o + f_1$ serbestlik dereceleriyle istatistik F- dağılımına uyacak ve böylece

$$P(\bar{F} > F_{1-,h,f} \quad H_o) = \alpha \tag{20}$$

istatistik tanımı geçerli olacaktır. Söz gelişi önceden seçilen bir α yanılma sınırı içinde(alışılagelen ; $\alpha = 0.05$) veya başka bir deyişle önceden seçilmiş $S = 1 - \alpha$ ($S = \%\ 95$) lik bir istatistik güven sınırı içinde ağda deformasyon olup olmadığına karar verilebilir. Eğer (19) ile hesaplanan $\bar{F}$ değeri F- dağılımı tablosundan alınan $F_{0.95,h,f}$ sınır değerinden büyük çıkarsa ; % 5 lik bir yanılma sınırı içinde (veya % 95 lik bir istatistik güven sınırı içinde) ağın herhangi bir yerinde deformasyon oluştuğu söylenebilir. Buna karşılık $\bar{F}$ değeri F tablo değerinden küçük ise; o zaman da ağdaki deformasyonların ölçü inceliğinden daha küçük daha küçük olduklarına ve bu sebeple belirlenemediklerine karar verilir.

4. DEFORMASYONLARIN BELİRLENMESİ

Aykırılık vektörü $\underline{d}$ yi irdeleyebilmek için, önce bu vektörün her elemanının (d_j, $j = 1,2,\ldots 2p$) m_j ortalama hatası

$$m_j = m\sqrt{Q_{jj}} \tag{21}$$

ve bununla da her eleman için "informasyon teorisi" ne göre

$$t_j = \frac{d_j}{m_j} \qquad \left(\frac{\text{uyarı "Signal"}}{\text{bozucu etken "Rauschen"}}\right) \tag{22}$$

oranı hesaplanır.

a) Bu uyarı/ bozucu etken oranı $\underline{d}$ vektörünün her elemanı için $t_j > 5$ bulunduğunda ; θ^2- ölçütünün (17) hesaplanmasına gerek kalmaksızın ağda deformasyan oluştuğuna karar verilebilir.

b) Uyarı/ bozucu etken oranı $t_j < 5$ bulunduğunda ; (19) testi uygulanır. $\bar{F}$ - test değeri, F- dağılımı cetvellerinden alınan sınır değerini aşarsa ; ağın herhangi bir yerinde deformasyon oluştuğuna karar verilir, fakat deformasyonun oluştuğu noktalar hakkında şimdilik bir şey söylenemez.

Eşdeğer olmayan böyle noktaların belirlenmesi için de, başka testlerin uygulanması gereklidir. Bu iş için teker teker ağın bütün noktalarındaki aykırılıklar incelenir. Ağın bir noktasının kaymış, diğer bütün noktalarının sağlam oldukları varsayılarak, $\underline{d}_1$ vektörü $\underline{d}_B$ ve $\underline{d}_F$ gibi iki alt vektöre ayrılır. $\underline{d}_B$ vektörü yalnız incelenen noktaya ait iki elemandan (dx, dy), $\underline{d}_F$ ise $\underline{d}_1$ in geriye kalan diğer elemanlarından oluşurlar.

$$\underline{d}_1 = \begin{bmatrix} \underline{d}_F \\ \hline \underline{d}_B \end{bmatrix} \tag{23}$$

ilgili ağırlık matrisi de buna uygun olarak alt matrislere ayrılır

$$\underline{P}_1 = \begin{bmatrix} \underline{P}_{FF} & \underline{P}_{FB} \\ \underline{P}_{BF} & \underline{P}_{BB} \end{bmatrix} \tag{24}$$

ve aşağıdaki dönüşümler uygulanırsa ;

$$\begin{aligned} \bar{\underline{d}}_B &= \underline{d}_B + \underline{P}_{BB}^{-1} \underline{P}_{BF} \underline{d}_F \\ \bar{\underline{P}}_{FF} &= \underline{P}_{FF} - \underline{P}_{FB} \underline{P}_{BB}^{-1} \underline{P}_{BF} \end{aligned} \tag{25}$$

(17) deki karesel büyüklük iki değerin toplamı olarak gösterilebilir.

$$\underline{d}_1^T \underline{P}_1 \underline{d}_1 = \underline{d}_F^T \bar{\underline{P}}_{FF} \underline{d}_F + \bar{\underline{d}}_B^T \underline{P}_{BB} \bar{\underline{d}}_B \tag{26}$$

Eşitliğin sağındaki ikinci terim incelenen noktaya ait aykırılıklardan, birinci terim ise ağın diğer noktalarındaki aykırılıklardan oluşmaktadır. (23) den (26) ya kadar verilen işlemlerle ağın $\underline{d}_1$ vektöründeki bütün noktalarının ortalama aykırılıktaki payları hesaplanır.

$$\theta_j^2 = \left(\frac{\bar{\underline{d}}_B^T \underline{P}_{BB} \bar{\underline{d}}_B}{2}\right)_j \qquad j = 1,2 \ldots k \tag{27}$$

k: $\underline{d}_1$ vektöründeki nokta sayısı,

paydadaki 2 $\underline{d}_B$ vektörünün eleman sayısıdır.

Ağdaki bozuk noktalardan biri, ortalama aykırılıkda (θ^2) en büyük payı olan noktadır. Hesaplanan bu $(\theta^2)_j$ değerleri arasından en büyük olanı seçilerek

$$\theta_{max}^2 = \max (\theta_j^2, j = 1,2 \ldots k) \tag{28}$$

bu noktada S = 1- α (= % 95) lik bir istatistik güvenle θ_j kadar bir deformasyon oluştuğuna karar verilir. Bu kararın yanılma olasılığı, başka bir deyişle sağlam bir noktanın deforme olmuş nokta olarak değerlendirilme olasılığı α (= % 5) dir.

Ağın deforme olan bir noktası böylece saptandıktan sonra; diğer noktalarında da istatistik güven sınırları içinde anlamlı aykırılıkların var olup olmadıklarının incelenmesi gerekir. Bu iş için θ^2 (17) büyüklüğü geriye kalan (k-1) nokta için yeniden hesaplanır.

$$\Theta^2_{kalan} = \frac{\underline{d}^T_F \; \bar{\underline{P}}_{FF} \; \underline{d}_F}{h - 2} \qquad (29)$$

ve FISHER'in F- dağılımına uyup uymadığı araştırılır (19), (20). Bu genel testle ağda daha başka deformasyonların da oluştuğu ortaya çıkarsa; yine (23) den (28) e kadar verilen işlemler yardımıyla deformasyonun oluştuğu nokta belirlenip, $\underline{d}_F$ vektöründen atılır. Bu işleme (29) ile hesaplanan (19) büyüklüğü (20) tablo değerinden büyük çıktığı sürece devam edilir.

Böylece eşdeğer olmayan noktaların saptanması işlemi sona erer. Bunların dışındaki noktaların sağlam olduklarına karar verilir.

5. SONUÇ

Jeodezik deformasyon ölçülerinin bu yöntemle irdelenme işlemi kısaca özetlenirse; ölçüler gerek serbest ağ olarak, gerekse alışılagelen yolla -en az bir noktanın koordinatları ve bir kenarın açıklık açısının değişmez olduğu varsayılarak- dengelenmiş olsunlar, heriki halde de PELZER' in Θ^2 - ölçütü uygulanabilir. İkinci halin birinciden farkı; sadece benzerlik dönüşümü (Helmert-Transformasyonu) ile iki nokta kümesinin birbiri üzerine çakıştırılmasıdır. İşlemleri sıralarsak:

1) Önce heriki nokta kümesi arasındaki aykırılık vektörü $\underline{d}$ (14) belirlenir.

2) Genelleştirilmiş hata yayılma kanunu uygulanarak, aykırılık vektörünün kofaktörler matrisi $\underline{Q}$ (15) ve $\underline{d}$ nin her elemanının ortalama hatası m_i (21) elde edilir.

3) Uyarı/ bozucu etken oranları t_j (22) hesaplanarak, Θ^2- ölçütü uygulanmaksızın, ağdaki deformasyonların belirlenmesine çalışılır.

4) $t_j < 5$ ($j = 1,2 \ldots 2p$) halinde; (16) ya göre ağırlık matrisi $\underline{P}$ hesaplanarak Θ^2-ölçütü (17) elde edilir. (13) işlemiyle belirlenen birim ağırlığın ortalama hatası m yardımıyla $\bar{F}$ (19) oranı bulunur.

5) $\bar{F}$ nin F- dağılımı cetvellerinden bulunan sınır değerinin altında kalması halinde ; iki nokta kümesi istatistik güven sınırları içinde eşdeğerdirler.

6) Buna karşılık $\bar{F}$, cetvelden alınan F- sınır değerini aşarsa ; 4.b) de (23) den (29) a kadar verilen işlemler yardımıyla irdeleme yapılarak deforme olan noktalar araştırılır.

Faydalanılan kaynaklar :

AESCHLIMANN , H. : Zur Genauigkeit geodätischer Verschiebungsmessungen, Doktora Tezi ETH Zürich 1971.

BAUMANN , E. : Die Anwendung statistischer Methoden bei der Untersuchung geodätischer Netze , DGK Reihe C Nr. 175 München 1972.

MEISSL , P. : Zusammenfassung und Ausbau der inneren Fehler-theorie eines Punkthaufens , DGK Reihe A, Heft 61 s. 8-21, München 1969.

MITTERMAYER , E. : Eine Verallgemeinerung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung freier Netze, Zeitschrift für Vermessungswesen 1971 s. 401-410.

MITTERMAYER , E. : Zur Ausgleichung freier Netze , Zeitschrift für Vermessungswesen 1972 s.481-489.

NIEMEIER , W. : Grundprinzip und Rechenformeln einer strengen Analyse geodätischer Deformationsmessungen , VII Int. Kurs für Ing. verm. hoher Präz. Darmstadt 1976.

PELZER , H. : Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen , DGK Reihe C, Heft 164, München 1971.

PELZER , H. : Analyse von deformationsmessungen , FIG-Kongress Wiesbaden 1971, Paper Nr. 605.1

PELZER , H. : Zur Behandlung singulärer Ausgleichungsauf gaben I ve II . Zeitschrift für Vemessuns-wesen 1974, s. 181-194 ve 479-488.

PELZER , H. Neuere Ergebnisse bei der statistischen Analyse von Deformationsmessungen , XIV.Int. Kongress der Vermessungsingenieure Washington 1974,608.3

UĞUR , E. : Kuzey Anadolu Fay kuşağının Gerede- Çerkeş bölümünde Yerkabuğu Hareketlerinin Jeodezik Yöntemlerle incelenmesi, Doktora Tezi, İTÜ 1974.

WOLF , H. : Ausgleichungsrechnung, Formeln für praktischen Anwendung,Ferd. Dümmler's Verlag, Bonn 1975.