

ÖZET

Her konuda olduğu gibi jeodezik uygulamalarda da kaynakların daha uygun kullanımı giderek önem kazanmaktadır. Teorik olarak Helmert'ten bu yana araştırılan ağ optimizasyonu problemleri yoğun hesaplamaları gerektirdiğinden ancak ölçme ve bilgisayar teknolojisinin hızlı gelişiminin sunduğu olanaklarla güncel uygulamalara girmiştir.

Jeodezik ağların yapısı ile kuruluş amaçları arasında sıkı bir ilişki vardır. Ağın duyarlılığı, güvenilirliği veya maliyeti gibi ölçütlere bağlı olarak saptanan bir amaç fonksiyonu, ağın en uygun konumu, ölçü planı veya ölçü ağırlıkları gibi parametreler cinsinden belirlenerek ağlar henüz plânlama aşamasında amaca uygun hale getirilebilirler.

Bu çalışmanın ilk bölümünde jeodezik ağlarla matematiksel optimizasyon ilişkisine kısaca değinilmekte, ikinci bölümde ise skaler ve ölçüt matrisleri biçimindeki amaç fonksiyonları özetlenmektedir. Optimizasyon probleminin sınıflandırılmasından sonra ölçüt matrisleriyle ikinci derece optimizasyonun çözüm yollarından biri olan U-çözümü ana hatlarıyla açıklanmakta ve güncel bir ağa uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar açıklanmaktadır. Son bölümde bazı sonuç ve öneriler yer almaktadır.

1. GİRİŞ

Bir yatırım planlanırken elde bulunan olanakların en uygun biçimde kullanımı giderek önem kazanmaktadır. Araç, hammadde, para, personel ve zaman gibi yatırımın gerçekleşmesinde gerekli olanaklar parametre şeklinde belirtilebiliyor ve en çok kazanç, en iyi kalite, en az harcama gibi amaçlar da bu parametreler cinsinden ifade edilebiliyorsa matematiksel optimizasyon söz konusu olabilir. Sorun, sınırlı olanaklarla en yüksek kazanç ve kalite elde etmenin amaçlandığı maksimum ilkesi veya belli bir amaç için en az hammadde, para, işgücü ve zaman kullanımının amaçlandığı minimum ilkesine göre çözülebilir.

Matematik tanımlama ile problem,

Amaç fonksiyonu $Z = c (x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow \max.$

Koşullar $a_i (x_1, x_2, \dots, x_k) \leq b_i$

biçiminde ifade edilebilir. Burada b_i sınır değeri veya kapasite, x_i ($i=1,2, \dots, k$) parametreler (olanaklar) adını alır.

Jeodezik ağlar da benzer düşüncelerle matematiksel optimizasyona konu olabilir. Bir jeodezik ağ tasarımı sırasında, ağ noktalarının nerelerde, hangi sıklıkta olması gerektiği, fiziksel yeryüzünün buna ne ölçüde olanak verdiği veya sınırladığı, ağın işlevlerini yerine getirmesi için nerelerde hangi konum duyarlıklarına sahip olması, bu duyarlılığın sağlanması için elde bulunan donatım, işgücü, para ve zamanın sınırlamaları da dikkate alınarak en uygun nasıl kullanılacağı, hangi ölçülerin kaç kez yapılacağı gibi temel soruların sağlıklı biçimde cevaplandırılması ile uygun bir jeodezik yatırım gerçekleştirilebilir.

Genel olarak jeodezik ağların duyarlık, güvenilirlik ve maliyetine bağlı olarak belirlenen amacı sağlaması için ağın ölçü planı ve ölçü duyarlıklarının saptanması işlemine " jeodezik ağların optimizasyonu " veya " dizaynı " adı verilir (Ayan, 1981).

Jeodezik ağ dizaynı konusu çok daha geniş kapsamlı olmakla birlikte burada yalnızca yatay kontrol ağları için incelenecektir.

2. OPTİMİZASYONDA KULLANILACAK AMAÇ FONKSİYONLARI

2.1 Duyarlık Ölçütlerinden Türetilen Amaç Fonksiyonları

Ağ optimizasyonunda amaç fonksiyonları daha çok duyarlık ölçütlerinden türetilir. Bu amaçla nokta koordinatlarının bilinmeyen olarak seçildiği dolaşlı ölçüler dengelemesinde

$$\Sigma_{xx} = (A^T P A)^{-1} \sigma_o^2 = Q_{xx} \sigma_o^2 \quad (1)$$

eşitliğiyle hesaplanan ve ağın bir noktasına, bir bölümüne veya tümüne ilişkin konum duyarlıkları için temel verileri oluşturan varyans-kovaryans matrisinin

$$Z = f (\Sigma_{xx}) \rightarrow \min. \quad (2)$$

biçimindeki fonksiyonları kullanılabilir. Dizayn edilen ağlar, gerçekleştirdiği amaca göre optimizasyon deyimleriyle adlandırılırlar. Çok kullanılan skaler amaç fonksiyonları aşağıda açıklanmıştır.

a. Ağın global konum duyarlılığı için varyans ölçütünün minimum olması istenebilir. Bu amacı sağlayan ağlara A-optimal ağlar denir.

$$Z = \text{tr} (\Sigma_{xx}) \rightarrow \min. \quad (3)$$

b. Σ_{xx} matrisinin normunun minimum olması istenebilir. Bu ağlara N-optimal ağlar denir.

$$Z = N (\Sigma_{xx}) = \| \Sigma_{xx} \| = \left[\text{tr} (\Sigma_{xx} \Sigma_{xx}) \right]^{1/2} \rightarrow \min. \quad (4)$$

c. Σ_{xx} matrisinin determinantının minimum olması istenebilir. Bu ağlara D-optimal ağlar denir.

$$Z = \det (\Sigma_{xx}) \rightarrow \min. \quad (5)$$

d. Güven elipslerinin eksenlerinden en büyüğünün (Σ_{xx} matrisinin en büyük özdeğerinin) minimum olması istenebilir. Bu ağlara E-optimal ağlar denir.

$$Z = \lambda_{\max} \rightarrow \min. \quad (6)$$

e. Güven elipslerinin en büyük ve en küçük eksenleri arasındaki farkın minimum olması istenebilir. Bu ağlara S-optimal ağlar denir.

$$Z = (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) \rightarrow \min. \quad (7)$$

f. Konum duyarlıklarının her doğrultuda birbirine yakın olması istenebilir. Bu ağlara I-optimal ağlar denir.

$$Z = 1 - (\lambda_{\max} / \lambda_{\min}) \rightarrow \min. \quad (8)$$

2.2 Güven Ölçütlerinden Türetilen Amaç Fonksiyonları

Jeodezik ağların kuruluş amaçlarını yerine getirmesinin garanti altına alınması önem taşır. Geometrik yapısı tek tek ölçü hatalarını veya ağın tümüne ilişkin model hatalarını ortaya çıkarabilecek şekilde olan ağlar güvenilir ağlar olarak tanımlanabilir.

Bir l_i ölçüsünün diğer ölçüler tarafından kontrol edilebilirliğini diğer

deyişle ağıın tüm serbestlik derecesinden (fazla ölçü sayısı $f = n-u$ dan) aldığı payı " 0 " ile " 1 " değerleri arasında ifade eden kısmi serbestlik derecesinin (r_i) büyük olması amaç fonksiyonu olarak alınabilir. Burada

$$r_i = p_i q_{v_i} v_i \quad (9)$$

$$Q_{vv} = P^{-1} - A Q_{xx} A^T \quad (10)$$

biçiminde hesaplanmaktadır (Ayan, 1981).

Yine her ölçünün r_i değerinin seçilen bir r_{min} değerinden büyük olması istenebilir.

Bir ağıın tümünün güvenilir olması amacıyla

$$\Lambda = \frac{1}{f} \Delta^T P Q_{vv} P \Delta \quad (11)$$

skaler büyüklüğünün olabildiğince büyük olması istenebilir.

Burada Δ model hipotezine uygun olmayan ölçülerin taşıdığı model hatalarını, f serbestlik derecesini, Q_{vv} düzeltmelerin kofaktörler matrisini göstermektedir.

2.3 Maliyet Ölçütlerinden Türetilen Amaç Fonksiyonları

Ekonomi faktörü, belli bir maliyetle maksimum duyarlık sağlamak veya belli duyarlıkları minimum maliyetle sağlamak biçiminde ele alınabilir. Yapılacak harcamalar (C), ağda nokta sayısı (m) ve ölçü sayısı (n) nin fonksiyonu olarak

$$Z = C (n, m) \rightarrow \min.$$

biçiminde yazılabilir. Ağıın yapısının ve ölçü ağırlıklarının iyi seçimi maliyeti doğrudan etkiler. Bu yüzden maliyet faktörünün doğrudan amaç fonksiyonu olarak değil

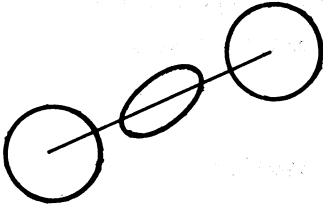
$$\underline{C}^T \underline{P} = \sum_{i=1}^n c_i p_i \leq k \quad \text{veya} \quad \underline{P}^T \underline{C} \underline{P} = \sum_{i=1}^n c_i p_i^2 \leq k$$

şeklinde koşullar (kısıtlamalar) olarak ele alınması yaygındır. Burada p_i , i nci ölçünün ağırlığını, c_i maliyetine ilişkin bir katsayıyı k ise maliyete ilişkin bir sınır değerini göstermektedir.

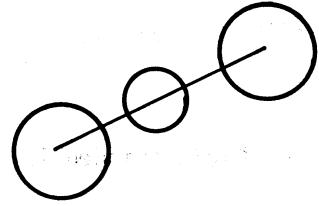
2.4 Ölçüt Matrisleri Biçimindeki Amaç Fonksiyonları

Daha önce açıklanan duyarlık ölçütlerinden türetilen skaler amaç fonksiyonları, ancak sınırlı istekleri karşılayabilir. Bir anda çok daha ayrıntılı beklentilere cevap verebilen ve " bir ağda beklenen konum duyarlıklarını tam olarak ifade eden, önceden ve hata kuramına uygun olarak hesaplanabilen ideal bir varyans-kovaryans matrisi " biçiminde tanımlanabilecek ölçüt matrisi yapısındaki amaç fonksiyonları en çok kullanılan fonksiyonlar olup optimizasyonun en genel şeklini ifade etmektedir.

Özel amaçlı bazı ağlar dışında jeodezik ağların sahip olacağı ideal yapı için, ağın her noktasında güven elipslerinin aynı yarıçaplı daireler biçiminde ve bağıl güven elipslerinin elipsler biçiminde olduğu (Şekil-1 de gösterilen) homojen-izotrop yapı ya da güven elipslerinin her noktada aynı yarıçaplı daireler biçiminde ve bağıl güven elipslerinin farklı yarıçaplı daireler biçiminde olduğu (Şekil-2 de gösterilen) tam izotrop yapı önerilebilir.



Şekil-1: Homojen-İzotrop Yapı



Şekil-2: Tam İzotrop Yapı

Her iki yapıyı da temsil etmek üzere akla gelebilecek ilk ölçüt matrisi, birim matris olabilir. Çünkü $\underline{Q}_{xx} = \underline{I}$ alındığında güven elipslerinin büyük ve küçük eksenleri $A = B = m_0$ olacaktır. Ancak bu durumdaki bir ağın tasarımı olanaksızdır. Çünkü köşegen dışındaki sıfır elemanları bilinmeyenler arasındaki korelasyonun diğer deyişle bu noktaların ölçülerle bağlantısının olmamasını gerektirir ki bu olanaksızdır. Amaca uygun bir ölçüt matrisi iki ayrı yol izlenerek hesaplanabilir.

a. Ağın ölçü planı belirlendikten sonra uygun olduğu düşünülen bir ilk $\underline{P}$ matrisi ile (örneğin $\underline{P} = \underline{I}$ ile) ilk $\underline{Q}_{xx}$ matrisi hesaplanır. Bu matris beklenen duyarlıklara göre adım adım değiştirilerek hedefe ulaşılır (Wimmer, 1981).

b. Ağda planlanan ölçüler ve onların varyans-kovaryans matrisi hiç dik-kate alınmadan noktalar arasındaki enine ve boyuna korelasyonlar, uzaklıkların fonksiyonu olarak Bessel, üstel veya benzeri fonksiyonlarla analitik olarak ifade edilir (Grafarend, 1979).

2.4.1 Q_{SYD} Yapısında Ölçüt Matrisleri

m sayıda noktadan oluşan bir ağı duyarlılığı (1) eşitliği ile verilen varyans-kovaryans matrisinden yararlanarak 2 m boyutlu bir güven hiperelipsoidi ile ifade edilebilir. Bu hiperelipsoidin yarı eksen uzunlukları, kofaktörler matrisinin özdeğerlerinin karekökleri ve eksenlerin yönleri de hiperelipsoidin özvektörleri ile karakterize edilebilir.

Başlangıçta uygunluğu kabul edilen bir $\underline{P}$ matrisi veya $\underline{P} = \underline{I}$ gibi bir matrisle kofaktörler matrisi

$$\underline{Q}_{xx} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^+ \quad (12)$$

oluşturulur. $\underline{Q}_{xx}$ simetrik matrisinden

$$\underline{V}^T \underline{Q}_{xx} \underline{V} = \underline{\Lambda} \quad (13)$$

ortogonal transformasyonu ile $\underline{\Lambda}$ özdeğerler matrisi elde edilir. Burada $\underline{V}$ matrisi, $\underline{Q}_{xx}$ matrisinin ($q_i^T q_i = 1$ ve $q_i^T q_j = 0$, $i=1, \dots, 2m$, $j=1, \dots, 2m$) özelliğini taşıyan, normlandırılmış özvektörlerinden oluşan ortonormal dönüşüm matrisidir. Bu yüzden $\underline{V}^T = \underline{V}^{-1}$ dir. Burada $\text{rank}(\underline{Q}_{xx}) = k \leq 2m$ değerindedir. $\underline{\Lambda}$ nın köşegen elemanları ve aynı sıraya uyarak $\underline{V}$ nin sütunları,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_k, \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{2m} = 0 \quad (14)$$

şeklinde büyükten küçüğe sıralanabilir. Hesaplanan özdeğerlerin beklenen duyarlıkları sağlayıp sağlamayacağı irdelenir. Gereğinde $\underline{\Lambda}$ özdeğerleri

$$\hat{\underline{\Lambda}} = \text{diag} (\hat{\lambda}_i) \leq \text{diag} (\lambda_i) \text{ veya } \hat{\lambda}_i \leq \lambda_i, i = 1, 2, \dots, 2m$$

şeklinde değiştirilirler.

Bu değiştirme işlemi, şu yol izlenerek gerçekleştirilir :

$$\hat{\lambda}_1 = \lambda_1 - t (\lambda_1 - \lambda_k) \quad (15)$$

ile $\hat{\lambda}_1$ hesaplanır. Burada t, $0 \leq t \leq 1$ değerinde bir katsayıdır. Yeni özdeğerler,

$$\hat{\lambda}_i = \min (\lambda_i, \hat{\lambda}_1) \quad i = 1, 2, \dots, 2m \quad (16)$$

şeklinde seçilir. Yani $\hat{\lambda}_1$ maksimal değerinden büyük olan her λ_i değeri, $\hat{\lambda}_1$ ile değiştirilir. Ancak $\hat{\lambda}_1$ den küçük olan λ_i değerleri değiştirilmez. $t=0$ özel durumunda özdeğerlerin tümü değişmeden kalır. Bu durumda

$$\underline{Q}_{xx} = \hat{\underline{Q}}_{xx} = \underline{Q}_{SVD} \quad (17)$$

olur. $t = 1$ alındığında ise sıfırdan farklı tüm özdeğerler değişeceğinden

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_3 = \dots = \hat{\lambda}_k = c$$

olup tüm elemanları c sabit sayısına eşit bir $\hat{\underline{\Lambda}}$ elde edilecektir. Böylece

$$\hat{\underline{Q}}_{xx} = \underline{Q}_{SVD} = c \underline{I}_k \quad (18)$$

biçimine dönüşür. Böylece korelasyon fonksiyonlarına gerek duyulmadan, istatistik kabul ve modeller gerekmesizin ölçüt matrisi hesaplanabilir. Ancak $\underline{Q}_{SVD}$ matrisinin fiziksel olarak gerçekleşmesi her zaman garanti edilemez. Ağın geometrisine bağlı olarak hesaplama güçlükleri çıkabilir (Wimmer, 1981).

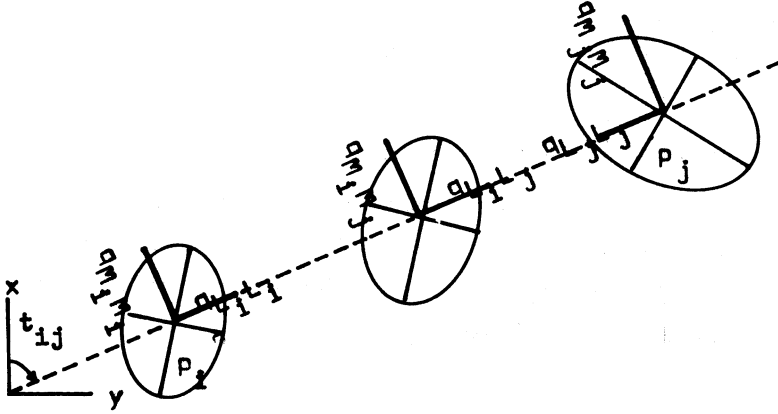
2.4.2 $\underline{Q}_{TK}$ (Taylor-Karman) Yapısındaki Ölçüt Matrisleri

Bir ağda yapılacak ölçüler dikkate alınmaksızın, nokta koordinatları arasındaki korelasyon ifade edilebilir. Bir ağda (1) eşitliğinde ifade edilen $\underline{Q}_{xx}$ kofaktörler matrisinin P_i ve P_j gibi iki ağ noktasına ilişkin alt matrisi,

$$\underline{Q}_{IJ} = \begin{bmatrix} q_{Y_i Y_i} & q_{Y_i X_i} & q_{Y_i Y_j} & q_{Y_i X_j} \\ & q_{X_i X_i} & q_{X_i Y_j} & q_{X_i X_j} \\ & & q_{Y_j Y_j} & q_{Y_j X_j} \\ & & & q_{X_j X_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{ii} & Q_{ij} \\ & Q_{jj} \end{bmatrix} \quad (19)$$

şeklinde olup Şekil-3 te gösterilen güven ve bağlı güven elipsleri bu veriler yardımıyla hesaplanabilir.

P_i ve P_j noktalarını birbirine bağlayan doğrultuda boyuna korelasyon ($\emptyset_L$) ve buna dik doğrultudaki enine korelasyon ($\emptyset_M$), güven elipslerinin ortogonal bir projeksiyonu ile sağlanabilir.



Şekil-3

$P_i P_j$ doğrultusu için projeksiyon vektörü $\underline{f}_{L_{ij}}$ ve ona dik doğrultu için projeksiyon vektörü $\underline{f}_{M_{ij}}$

$$\underline{f}_{L_{ij}} = \begin{bmatrix} \cos t_{ij} \\ \sin t_{ij} \end{bmatrix} \quad \underline{f}_{M_{ij}} = \begin{bmatrix} -\sin t_{ij} \\ \cos t_{ij} \end{bmatrix} \quad (20)$$

şeklinde yazılabilir. $\underline{f}^T Q \underline{f}$ dönüşümü,

$$\bar{Q}_{L_{IJ}} = \begin{bmatrix} \underline{f}_{L_{ij}}^T Q_{ii} \underline{f}_{L_{ij}} & \underline{f}_{L_{ij}}^T Q_{ij} \underline{f}_{L_{ij}} \\ \underline{f}_{L_{ij}}^T Q_{ji} \underline{f}_{L_{ij}} & \underline{f}_{L_{ij}}^T Q_{jj} \underline{f}_{L_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{L_i L_i} & q_{L_i L_j} \\ q_{L_j L_i} & q_{L_j L_j} \end{bmatrix} \quad (21. a)$$

$$\bar{Q}_{M_{IJ}} = \begin{bmatrix} \underline{f}_{M_{ij}}^T Q_{ii} \underline{f}_{M_{ij}} & \underline{f}_{M_{ij}}^T Q_{ij} \underline{f}_{M_{ij}} \\ \underline{f}_{M_{ij}}^T Q_{ji} \underline{f}_{M_{ij}} & \underline{f}_{M_{ij}}^T Q_{jj} \underline{f}_{M_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{M_i M_i} & q_{M_i M_j} \\ q_{M_j M_i} & q_{M_j M_j} \end{bmatrix} \quad (21. b)$$

P_i ve P_j güven elipslerinin eksenlerini $P_i P_j$ ve ona dik doğrultuya dönüştürmüş olur. (21) kovaryanslarının geometrik ortalama biçiminde normlandırılmasıyla boyuna ve enine korelasyon değerleri

$$\phi_{L_{ij}} = \frac{q_{L_i L_j}}{\sqrt{q_{L_i L_i} q_{L_j L_j}}} \quad \phi_{M_{ij}} = \frac{q_{M_i M_j}}{\sqrt{q_{M_i M_i} q_{M_j M_j}}} \quad (22)$$

eşitlikleriyle bulunabilir (Bill, 1985).

Ölçüt matrislerinin oluşturulmasında temel düşünce ise (22) değerlerinin yerine geçmek üzere, noktalar arasındaki korelasyonun, aralarındaki r uzaklıklarının tüm ağ için seçilen bir d karakteristik mesafesine oranlarının fonksiyonu olarak ifade edilmesidir. Önerilen birçok korelasyon fonksiyonundan bazıları,

Baarda fonksiyonu $\phi(r) = 1 - mr$

Bessel fonksiyonu $\phi(r) = \frac{r}{d} K_1\left(\frac{r}{d}\right)$

Üstel fonksiyonu (Wimmer) $\phi(r) = e^{-r/d}$

Üstel kosinüs fonksiyonu $\phi(r) = e^{-r/d} \cos r$

Burada K_0 , K_1 katsayıları Bessel fonksiyonları için tablolar halinde düzenlenmiştir (Grafarend et al. 1979). m ise o kenarın eğimini (iniş veya çıkış miktarını) ifade etmektedir.

Bu fonksiyonlardan yararlanarak ve

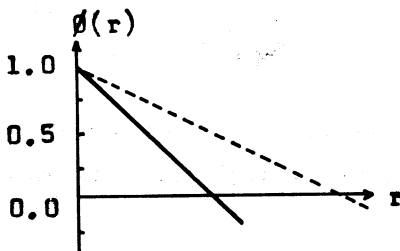
$$f(r) = -\phi(r) + \frac{2}{r} \int_0^r x \phi(x) dx$$

fonksiyonu yardımıyla enine ve boyuna korelasyonlar

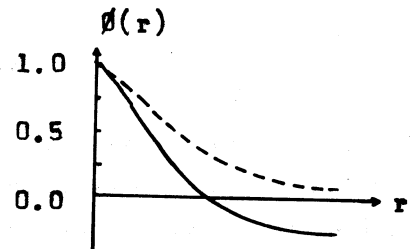
$$\phi_M(r) = f(r) + \phi(r)$$

$$\phi_L(r) = -f(r) + \phi(r)$$

eşitlikleriyle hesaplanabilir. Kısaca değinilen korelasyon fonksiyonları (Wimmer, 1981) de tablo halinde düzenlenmiştir. Şekil-4 Baarda ve Bessel fonksiyonlarına ait grafikleri göstermektedir.



Baarda Fonksiyonu



Bessel Fonksiyonu

Şekil-4

Enine ve boyuna korelasyon değerleri kullanılarak Taylor-Karman yapısında bir ölçüt matrisinin elemanları, aşağıdaki eşitlikler kullanılarak hesaplanabilir :

$$\begin{aligned}
 q_{X_i X_j} &= \phi_M(r) + (\phi_L(r) - \phi_M(r)) \frac{\Delta X^2}{r^2} \\
 q_{X_i Y_j} &= q_{Y_i X_j} = (\phi_L(r) - \phi_M(r)) \frac{\Delta X \Delta Y}{r^2} \\
 q_{Y_i Y_j} &= \phi_M(r) + (\phi_L(r) - \phi_M(r)) \frac{\Delta Y^2}{r^2} \quad (23) \\
 q_{X_i X_i} &= q_{Y_i Y_i} = 1 \\
 q_{X_i Y_i} &= q_{Y_i X_i} = 0
 \end{aligned}$$

Ölçüt matrisleri, bilgisayar olanaklarıyla seçilen korelasyon fonksiyonuna göre istenen yapıda kolayca ve çok hızlı olarak hesaplanabilir. Ancak hesaplanan korelasyonlar, seçilen karakteristik mesafeye bağlı olacaktır. Bu uzunluğun seçimi ancak deneysel olarak uygun biçimde gerçekleştirilebilir. Birçok uygulamadan elde edilebilecek yargı, d'nin ağın en kısa kenarından daha küçük olacağı biçimindedir (Wimmer, 1981 ; Kınık, 1986). Ayrıca korelasyonların ağın yapısına bağlı olmadan yalnızca noktaların birbirlerine göre uzaklıklarının fonksiyonu olarak ifadesi, her zaman istenen sonuçları vermeyebilir. Bu sorunlarıyla ölçüt matrislerinin oluşturulması, optimizasyonun temel sorunu olmaya devam etmektedir.

3. AĞ OPTİMİZASYONUNUN SINIFLANDIRILMASI

Çok değişik sınıflandırmalar olası olmakla birlikte Grafarend tarafından, optimum hale getirilmek üzere seçilen parametrelere göre yapılan sınıflandırmadan söz edilebilir. Buna göre, optimizasyon problemleri, serbest ağlarda en iyi konumlandırmanın diğer deyişle en uygun datumun seçildiği sıfırıncı derece optimizasyon (datum problemi), ağın noktalarının veya ölçü planının diğer deyişle en uygun konfigürasyonunun belirlendiği birinci derece optimizasyon (şekil optimizasyonu), konfigürasyonu belli bir ağda istenen nokta konum duyarlıklarını elde etmek için en uygun ölçü ağırlıklarının belirlendiği ikinci derece optimizasyon (ağırlık optimizasyonu) ve mevcut bir ağın

beklenen duyarlılığı sağlayacak biçimde geliştirilmesi için eklenecek nokta ve/veya ölçülerin belirlendiği üçüncü derece optimizasyon biçiminde sınıflandırılabilirler.

Bunun dışında çözüm yöntemlerine göre yapılacak bir sınıflandırma ile optimizasyon, simülasyon yöntemleri ve analitik yöntemler olarak iki sınıfta incelenebilir. Simülasyon yöntemi, ölçülerin sıra ile çıkarılması ve amaca en az katkısı olan ölçünün saptanıp terk edilmesi işlemlerinin yinelenmesi biçiminde uygulanır. Analitik yöntemlerde ise amacın sağlanması için parametrelerin en uygun değerleri adım adım veya doğrudan hesaplanır.

4. ÖLÇÜT MATRİSLERİYLE İKİNCİ DERECE OPTİMİZASYON

İkinci derece optimizasyon, noktaların yaklaşık koordinatları ve ölçü planı diğer deyişle $\underline{A}$ katsayılar matrisi ve ağıdan beklenen konum duyarlıklarını ifade eden $\underline{Q}_{xx}$ ölçüt matrisi belli iken

$$\underline{A}^T \underline{P} \underline{A} = \underline{Q}_{xx}^{-1} \quad (24.a)$$

veya serbest ağlar için

$$\underline{A}^T \underline{P} \underline{A} = \underline{Q}_{xx}^+ \quad (24.b)$$

eşitliğinden $\underline{P}$ matrisinin hesaplanması şeklinde tanımlanabilir (Ayan, 1981). $\underline{P}$ matrisinin dolu (ölçülerin korelasyonlu) olduğu bir çözüm, (θ) sembolüyle gösterilen ve $n \times m$ boyutlu $\underline{A}$, $r \times s$ boyutlu $\underline{B}$ matrisleri için

$$\underline{A} \theta \underline{B} = (a_{ij} \cdot B) \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

şeklinde tanımlanan Kronecker çarpımı (Rao-Mitra, 1971) ile sağlanabilir.

Ancak köşegen bir $\underline{P}$ matrisi elde etmek için (θ) sembolüyle gösterilen ve Khatri-Rao çarpımı olarak adlandırılan matris çarpımını tanımlamak gerekir. $n \times m$ boyutlu $\underline{A}$ ve $k \times m$ boyutlu $\underline{B}$ gibi iki matris için Khatri-Rao çarpımı, $\underline{A}$ ve $\underline{B}$ matrislerinin $\underline{a}_i$ ve $\underline{b}_i$ sütun vektörleriyle

$$\underline{A} \theta \underline{B} = [\underline{a}_1 \theta \underline{b}_1 \quad \underline{a}_2 \theta \underline{b}_2 \quad \dots \quad \underline{a}_m \theta \underline{b}_m] \quad (25)$$

şeklinde tanımlanır (Rao-Mitra, 1971).

Bu tanıma ek olarak $\underline{p} = \text{vecd } \underline{P} = (P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n)^T$ ve $\text{vec } \underline{Q}_{xx}^+ = (q_{11} \ \dots \ q_{m1} \ q_{12} \ q_{22} \ \dots \ q_{m2} \ \dots \ q_{mm})^T$ gösterimleriyle (24) eşitlikleri yerine

$$(\underline{A}^T \ 0 \ \underline{A}^T) \underline{p} = \underline{q} \quad (26)$$

eşitliği yazılabilir.

Artık problem, (26) eşitliğinden $\underline{P}$ nin çözümü şeklinde sürecektir. Ancak $\underline{A}^T \underline{P} \underline{A}$ matrisi simetrik olduğundan $(\underline{A}^T \ 0 \ \underline{A}^T)$ matrisinin m^2 sayıdaki satırından $(m^2 - m) / 2$ adedi birbirinin aynısıdır. O halde n sayıdaki ölçü ağırlığı bilinmeyenini m^2 yerine $(m^2 + m) / 2$ sayıda denklemden çözmek olasıdır. Bunun için $(\underline{A}^T \ 0 \ \underline{A}^T)$ matrisinde tekrarlanan $(\underline{A}^T \underline{P} \underline{A}$ nın köşegen dışı terimlerine karşılık gelen) satırlardan birer adedi çıkarılır.

Sistemi bozmamak için eşleri çıkarılan bu satırlar "1" ve tekrarlanmayan $(\underline{A}^T \underline{P} \underline{A}$ nın köşegen elemanlarına karşılık gelen) satırlar "0.5" ile çarpılır. Yine $(\underline{A}^T \ 0 \ \underline{A}^T)$ matrisinde değeri sıfıra eşit olup çözüme katkısı olmayan satırlar da sistemden çıkarılır. Böylece değiştirilmiş (indirgenmiş) $(\underline{A}^T \ 0 \ \underline{A}^T)$ matrisi kısaca $\underline{U}$ matrisi ile gösterilirse (yöntem bu yüzden $\underline{U}$ -çözümü adını almaktadır) (26) eşitliği

$$\underline{U} \underline{p} = \text{vech } \underline{Q}_{xx}^+ = \underline{t} \quad (27)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\text{vech } \underline{Q}_{xx}^+$, $\text{vec } \underline{Q}_{xx}^+$ vektöründen farklı olarak $\underline{Q}_{xx}^+$ matrisinin yalnızca üst veya alt üçgeninin vektör biçiminde ifadesini göstermektedir.

(27) eşitliği genelde bir lineer denklem takımı olarak ele alınıp çözülmek istendiğinde $\underline{U}$ matrisinin satır sayısı z ve $\text{rank}(\underline{U}) = k$ değerlerinin bilinmesi gerekir. Bu değerlere göre uygun çözüm eşitlikleri

$$\begin{aligned} k &= z = n & \text{için } \underline{p} &= \underline{U}^{-1} \underline{t} \\ k &= n < z & " & \underline{p} = (\underline{U}^T \underline{U})^{-1} \underline{U}^T \underline{t} = \underline{U}_L^{-1} \underline{t} \\ k &< n < z & " & \underline{p} = (\underline{U} \underline{U})^+ \underline{U}^T \underline{t} \\ k &= z < n & " & \underline{p} = \underline{U}^T (\underline{U} \underline{U}^T)^{-1} \underline{t} = \underline{U}_R^{-1} \underline{t} \\ k &< z < n & " & \underline{p} = \underline{U}^T (\underline{U} \underline{U}^T)^+ \underline{t} \end{aligned} \quad (28)$$

kullanılabilir (Wimmer, 1981).

(28) eşitliklerinden hangisiyle çözüm yapılacağına karar vermek için gerekli olan k ve z sayılarının bilinmesi için kenar ve doğrultu ölçülerine ilişkin düzeltme denklemlerinin, $\underline{A}^T \underline{P} \underline{A}$ ve $\underline{U}$ matrislerine etkileri incelenmelidir. Kenar ve doğrultu ölçülerinin $\underline{U}$ matrisinde oluşturdukları satır

sayısı ve bunların kendi aralarındaki bağımlılıklara ilişkin kurallar bildirildiğinde ölçü planı üzerinde yapılacak ön çalışmalarla $\underline{U}$ nun satır sayısı ve rankı hesaplanabilir (Ayan, 1981, Schmitt, 1979). Ancak uygulamada bilgisayar olanaklarıyla bu ön çalışmaya da gerek olmaksızın $\underline{U}$ nun satır sayısı $\underline{A}^T \underline{P} \underline{A}$ normal denklemler matrisinin üst veya alt üçgeninin sıfırdan farklı elemanlarının sayılması ile, $\underline{U}$ nun rankı ise sıfırdan farklı özdeğerlerinin sayılması ile doğrudan ve yanılğısız hesaplanabilmektedir.

(27) eşitliğinin (28) eşitlikleriyle çözümü biçiminde açıklanan bu yöntem, her kenar ve doğrultu ölçüsü için ayrı bir P_i ölçü ağırlığının hesaplanmasını özetlemektedir. Ancak pratikte bir istasyonda her doğrultuya farklı sayıda ölçü yapmak istenen bir durum değildir. Bu yüzden problem, bir P_i ağırlığında r sayıda doğrultu ölçüsü yapılacaksa

$$P_{i1} = P_{i2} = \dots = P_{ir}$$

biçiminde $(r-1)$ sayıda koşul ile çözülebilir. Bu amaçla her istasyon noktasındaki doğrultulara ait yöneltme bilinmeyenleri uygun bir yolla indirgenir (Ayan, 1981). Yine problemin çözümü sırasında (27) eşitliğinde $\underline{U}$ matrisinin her istasyon için ilgili sütunları toplanıp birer sütun haline getirilip $\underline{P}$ ağırlıklar vektöründe her istasyon için tek bir eleman bırakılır. Böylece P_i istasyonunun tüm doğrultuları için geçerli i nci grup ölçü ağırlığı bulunmuş olur (Ayan, 1981).

Bölüm 4 te açıklanan U -çözümü, Ek-1 deki akış diyagramı ile özetlenebilir.

Uygulamada ikinci derece optimizasyon şu üç adım izlenerek gerçekleştirilir

- En geniş ölçü planı ile her ölçü için ayrı ayrı ağırlıklar hesaplanır.
- Negatif, sıfır veya sıfıra çok yakın ağırlıklı ölçüler ölçü planından çıkarılır. Böylece ikinci derece optimizasyon, ölçü planının optimizasyonu (1 nci derece optimizasyon) biçiminde uygulanmış olur.
- Elde edilen ölçü planı ile ve grup ölçü ağırlıkları için optimizasyon yinelenir.

Bu arada, nasıl ulaşıldığı açıklanmadan, serbest kenar ağlarında $\underline{U}$ matrisinin tam ranklı olduğu ve genel inversler yerine Caylay inversiyle çözüm

yapılabileceği belirtilmelidir (Schmitt, 1979).

Ana hatlarıyla açıklanan çözüm yolunun, ağın geometrik yapısı ve ölçüt matrisinin yeterince tutarlı biçimde belirlenememiş olması gibi bir dezavantajı vardır. Bu durumda negatif ağırlıkların karşılık geldiği ölçüler çıkarılıp tasarım işlemi yinelenmelidir. Diğer taraftan yöntemin uygulanışında $\underline{A}$ katsayılar matrisi için bellek ayırımı ve hesaplama gereklidir. Halbuki $\underline{A}$ matrisini hesaplamadan doğrudan doğruya ölçü planı ve yaklaşık koordinatlar listesini kullanarak çözüm olasıdır. Bu amaçla

$$(\underline{A}^T \ \underline{\theta} \ \underline{A}^T) \underline{p} = \underline{q}$$

eşitliğinin en küçük kareler düşüncesiyle çözümü için

$$(\underline{A}^T \ \underline{\theta} \ \underline{A}^T)^T (\underline{A}^T \ \underline{\theta} \ \underline{A}^T) \underline{p} = (\underline{A}^T \ \underline{\theta} \ \underline{A}^T)^T \underline{q} \quad (29)$$

eşitliği yazılabilir. (29) eşitliği, (*) sembolüyle gösterilen ve aynı $(n \times m)$ boyutlu $\underline{A}$ ve $\underline{B}$ matrisleri için

$$\underline{A} * \underline{B} = (a_{ij} \ b_{ij}) \quad i=1,2,\dots,n, \ j=1,2,\dots,m$$

şeklinde ifade edilen Hadamard çarpımı ile (Rao-Mitra, 1971)

$$(\underline{A} \ \underline{A}^T * \underline{A} \ \underline{A}^T) \underline{p} = (\underline{A}^T \ \underline{\theta} \ \underline{A}^T)^T \underline{q} \quad (30)$$

olarak yazılabilir. (30) eşitliği de ölçüler için yazılan düzeltme denklemlerinin katsayılarından oluşan vektörler $\underline{a}_i$ ile gösterilirse, açık olarak

$$\begin{bmatrix} (a_{11}^T)^2 & (a_{12}^T)^2 & \dots & (a_{1n}^T)^2 \\ (a_{21}^T)^2 & (a_{22}^T)^2 & \dots & (a_{2n}^T)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n1}^T)^2 & (a_{n2}^T)^2 & \dots & (a_{nn}^T)^2 \end{bmatrix} \underline{p} = \begin{bmatrix} (a_{11}^T \ \underline{\theta} \ a_{11}^T)^T \\ (a_{21}^T \ \underline{\theta} \ a_{21}^T)^T \\ \dots \\ (a_{n1}^T \ \underline{\theta} \ a_{n1}^T)^T \end{bmatrix} \underline{q} \quad (31)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin elemanları, ölçü planı ve yaklaşık koordinatlar listesinden kolayca hesaplanabilir (Fritsch, 1981, Müller, 1984).

5. SAYISAL UYGULAMA

Ölçüt matrisleriyle ikinci derece optimizasyon probleminin bölüm 4 te açıklanan yöntemle çözümü, " Depremlerin Önceden Bilinmesi ve Hasarların Azaltılması Araştırmaları Projesi " çerçevesinde Jeodezi Çalışma Grubu tarafından Mudurnu Vadisi üstünde Taşkesti'de kurulan, 1981 yılından bu yana İ.T.Ü. ve Bonn Üniversitesi tarafından ölçme ve değerlendirmeler yapılan mikrojeodezik ağda uygulanmıştır. 14 noktadan oluşan bu ağda maksimum ölçü planı 75 kenar ve 150 doğrultu olarak belirlenebilir (Ek-2).

Uygulamada birim matris, Q_{SVD} ve karakteristik mesafe 25 m. den 500 m.ye kadar değişen Taylor-Karman yapılı ölçüt matrisleri denenmiştir. En uygun sonuçlar $d = 100$ m. olarak alınan Q_{TK} matrisi ile elde edilmiştir. Bu mesafe ise ağın en kısa kenarının 1/5 i kadardır. İlk aşamada en geniş ölçü planı ile her doğrultu ve kenar için ayrı ayrı ağırlıklar bulunmuş, ağırlığı negatif veya çok küçük çıkan ölçüler ikinci aşamada ölçü planından çıkarılmıştır. Son aşamada kalan ölçü planı ile grup ölçüler için optimizasyon işlemi yinelenmiştir.

Deprem araştırmaları amacıyla kurulan bu ağda amaç fonksiyonu olarak, her noktada 4 mm. yarıçaplı (Helmert) hata daireleri (Ek-2 de sürekli çizgilerle gösterilen) ya da homojen-izotrop bir ağ istendiğinden büyük ve küçük eksenleri 2.8 mm. uzunluğunda daire biçiminde elipsler (Ek-2 de nokta nokta çizilmiş dairelerle gösterilen) seçilmiştir.

Bu işlemler sonunda amacın sağlanması için 75 kenardan 53 ünün Tablo-1 de özetlenen duyarlıklarla ölçülmesi ve 14 noktadan yalnızca tabloda belirtilen 6 noktada doğrultu ölçmeleri yapılmasının yeterli olacağı sonucuna varılmıştır.

Kenar ölçmelerinde Range Master III ve geomensor ile doğrultu ölçmelerinde Wild T3 teodoliti kullanılacağı düşünüldükçe tüm önerilen duyarlıkların kolayca sağlanabilir olacağı kanısına varılmıştır. Hesaplanan ölçü ağırlıklarıyla yapılan hata analizinde en büyük hata dairesinin yarıçapı 5.1 mm. ve en küçük dairenin yarıçapı 3.9 mm. olarak bulunmuştur. Bir başka kontrol olarak önerilen ölçü planı ile ve mevcut donanım için doğrultuların $\pm 2^{cc}$, üç km.den kısa kenarların ± 2 mm.(geomensor ile) ve üç km.den uzun kenarların firmaca verilen duyarlıklarla ölçüldüğü varsayılarak yapılan hata analizinde ise en büyük hata dairesi yarıçapının 3.9 mm. ve en küçükünün ise 1.6 mm. olduğu görülmüştür.

KENAR ÖLÇÖLERİ					
Ölçü	P_i	m_i (cm)	Ölçü	P_i	m_i (cm)
1 - 3	0.255	0.561	10 - 11	0.329	0.493
1 - 5	0.162	0.702	10 - 14	0.144	0.745
1 - 7	0.232	0.587	10 - 15	0.074	1.037
1 - 10	0.153	0.721	11 - 12	0.138	0.762
1 - 11	0.128	0.792	11 - 14	0.084	0.975
1 - 12	0.178	0.671	11 - 15	0.066	1.095
1 - 13	0.112	0.842	11 - 16	0.202	0.630
1 - 15	0.084	0.974	12 - 13	0.136	0.765
2 - 3	0.178	0.669	12 - 14	0.106	0.867
2 - 7	0.154	0.719	12 - 15	0.100	0.890
2 - 8	0.204	0.625	12 - 16	0.127	0.792
2 - 10	0.090	0.942	13 - 14	0.035	1.500
2 - 11	0.088	0.950	13 - 15	0.035	1.500
2 - 13	0.051	1.252	13 - 16	0.035	1.500
2 - 16	0.083	0.976	14 - 15	0.035	1.500
3 - 4	0.295	0.520	14 - 16	0.035	1.500
3 - 5	0.248	0.567	15 - 16	0.035	1.500
3 - 14	0.145	0.741	4 - 15	0.147	0.736
3 - 15	0.125	0.799	4 - 16	0.132	0.778
4 - 7	0.186	0.655	5 - 7	0.171	0.682
4 - 8	0.248	0.569	5 - 8	0.204	0.625
4 - 13	0.241	0.575	5 - 11	0.090	0.941
7 - 13	0.091	0.936	5 - 12	0.222	0.600
7 - 14	0.144	0.745	5 - 13	0.124	0.801
7 - 15	0.044	1.340	5 - 16	0.143	0.747
8 - 14	0.186	0.656	7 - 10	0.180	0.665
8 - 15	0.177	0.671			
DOĞRULTU ÖLÇÖLERİ					
İstasyon	P_i	m_i (cc)			
2	0.0044	4.27			
11	0.0035	4.76			
13	0.0540	1.22			
14	0.0616	1.14			
15	0.0368	1.47			
16	0.0755	1.03			

Tablo-1 : 4 mm. yarıçaplı hata daireleri için hesaplanan ölçü ağırlıkları ve duyarlılıkları.

Böylece mevcut olanaklarla 75 kenar ve 14 noktada toplam 150 doğrultu yerine 53 kenar ve 6 noktada toplam 49 doğrultu ölçerek her noktada ± 4 mm. lik konum duyarlıklarını elde etmek olasıdır.

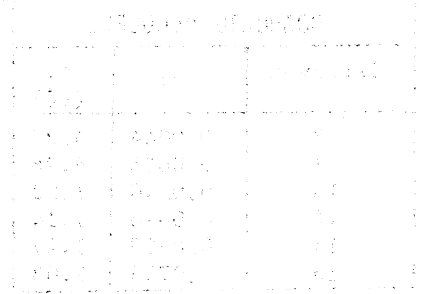
6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bir jeodezik ağı, matematiksel optimizasyon olanakları ile henüz tasarım aşamasında beklenen amacı gerçekleştirmesi kontrol altına alınabilir. Noktaların yaklaşık koordinatlarının belirlenmesinden sonra ölçüt matrisleriyle ikinci derece optimizasyon uygulamalarıyla önce en uygun ölçü planı sonra da en uygun ölçü ağırlıklarının saptanması gerçekleştirilebilir.

Böylece, beklenen duyarlılığı sağlayamama kuşkusu ile gereğinden fazla ölçü yapmak veya uygun bir planlama olmadığından yapılan ölçülerin gerekli duyarlılığı sağlayamaması ve ölçü tekrarlarının yapılması gibi uygulamada karşılaşılan olasılığı yüksek olan sorunlar çözümlenmiş olur.

Bir anda ağı tüm noktalarında beklenen konum duyarlıklarının sağlanması, hatta ağı bir kısım noktalarının diğerlerine göre daha duyarlı olması gibi bir çok isteğe aynı anda cevap verebilen ölçüt matrisleri (Schmitt, 1980) en genel amaç fonksiyonları olarak kullanılabilirler.

İkinci derece optimizasyon probleminin kısaca açıklanan klasik çözümünden başka ağırlıkların pozitif çıkması, kullanılacak donanıma bağlı olarak belli sınırlar içinde kalması gibi ek koşulları da kapsayacak biçimde direkt veya iteratif çözüm algoritmaları geliştirilmiştir. Ancak ölçüt matrislerinin oluşturulmasında karakteristik mesafenin seçimi, matrisin regüler veya singüler oluşunun doğrudan seçilen korelasyon fonksiyonuna bağlılığı, regüler ölçüt matrislerinin singüler dönüşümleri gibi birçok sorun henüz tam anlamıyla yanıt bulmuş değildir.

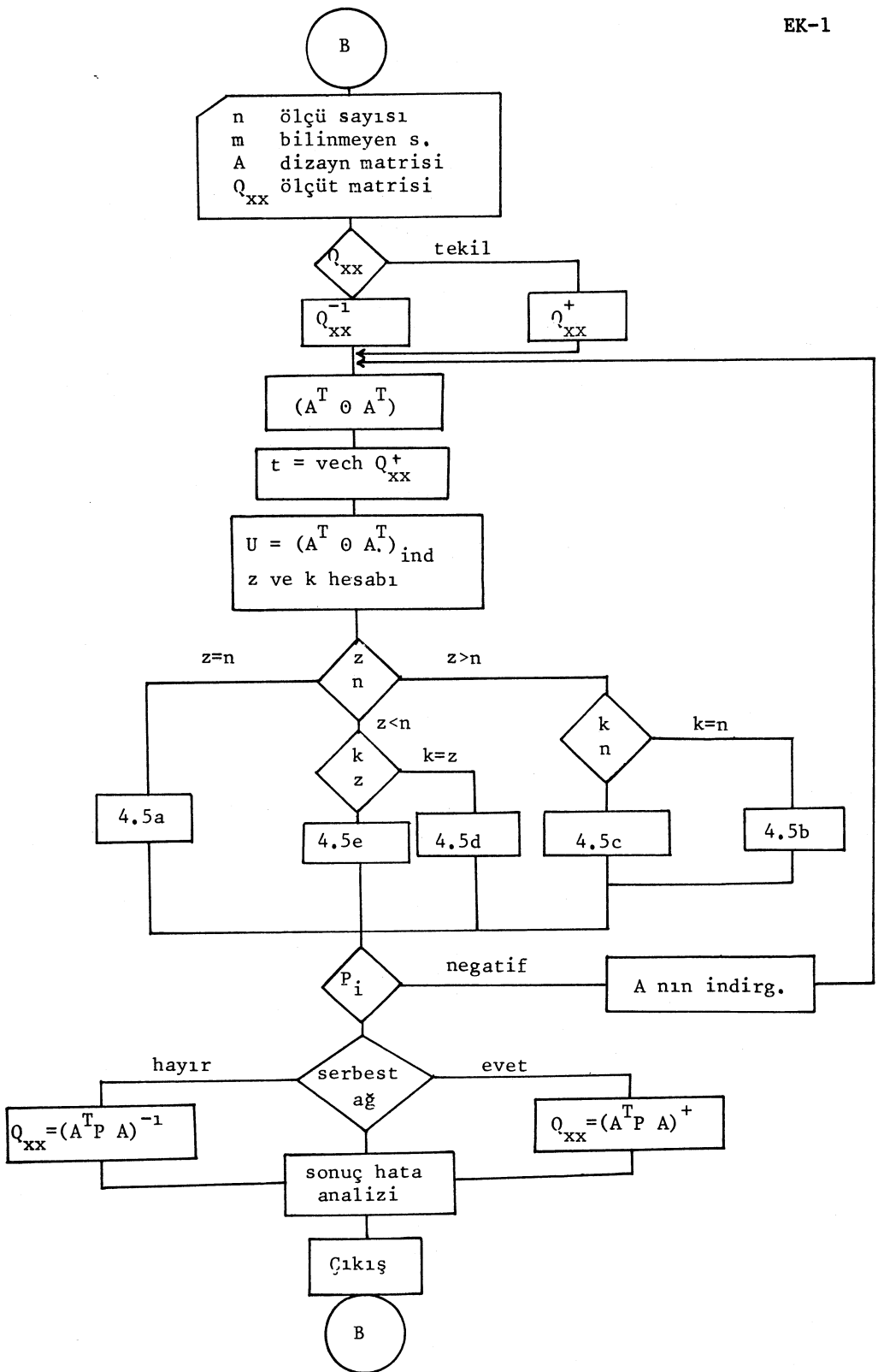


Şekil 1. Jeodezik ağı ve ölçüt matrisi

Jeodezik ağı, bir dizi noktadan oluşur ve bu noktalar arasındaki mesafeler ölçülür. Bu ölçümler, ağı optimizasyon için kullanılır. Optimizasyon, ağındaki noktaların konumlarını, ölçülen mesafelere göre en uygun şekilde belirlemeyi amaçlar. Bu süreç, genellikle matematiksel optimizasyon teknikleri kullanılarak gerçekleştirilir.

KAYNAKLAR

- /1/ AKSOY, A. (1981) : Lineer Modellerde Parametre Tahmini ve Hipotez Testleri (İ.T.Ü. Ders Notu, yayınlanmadı).
- /2/ AYAN, T. (1981) : Jeodezik Ağların Optimizasyonu (İ.T.Ü. Doçentlik Tezi)
- /3/ BILL, R. (1985) : Theoretical and Emprical Studies of Correlation Functions in Planar Geodetic Networks. Geodatisches Institut Universitat Karlsruhe
- /4/ FRITSCH, D. (1981) : Second Order Design of Geodetic Networks München
- /5/ GRAFAREND ET AL. (1979) : Optimierung geodatischer messoparation Sammlung Wichmann Neue Folge Band II, Karlsruhe
- /6/ KINIK, İ. (1986) : Jeodezik Ağların Optimizasyonu-Ölçüt Matrisleriyle İkinci Derece Optimizasyon. (İ.T.Ü. Master Tezi, yayınlanmadı).
- /7/ MÜLLER, H. (1984) : A Numerically Efficient Solution of the Second Order Design Problem Bull.Geod.
- /8/ RAO,C.R.-MITRA,S.K.(1979) : Generalized Inverse of Matrices and Its Applications John Wilay, New York
- /9/ SCHMITT, G. (1979) : Zur Numerik das Designs zweiter Ordnung DGK Reihe C, Nr. 256 München
- /10/ SCHMITT, G. (1980) : Second Order Design of a Free Distance Network, Considering different types of Criterion Matrices Bull. Geod.
- /11/ WIMMER, H. (1981) : Ein Beitrag zur Gewichtoptimierung Geodatischer Netza DGK Reihe C Nr.269 München



EK-2

Ö L Ç E K :

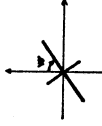
Ağ — 250 m.

Elipsler — 4 mm.

Beklenen prezizyon
Karesel ortalama nokta
konum hatası ($r = 4$ mm.)



Beklenen prezizyon
 $A = B = 0.28$ cm. olan
hata daireleri

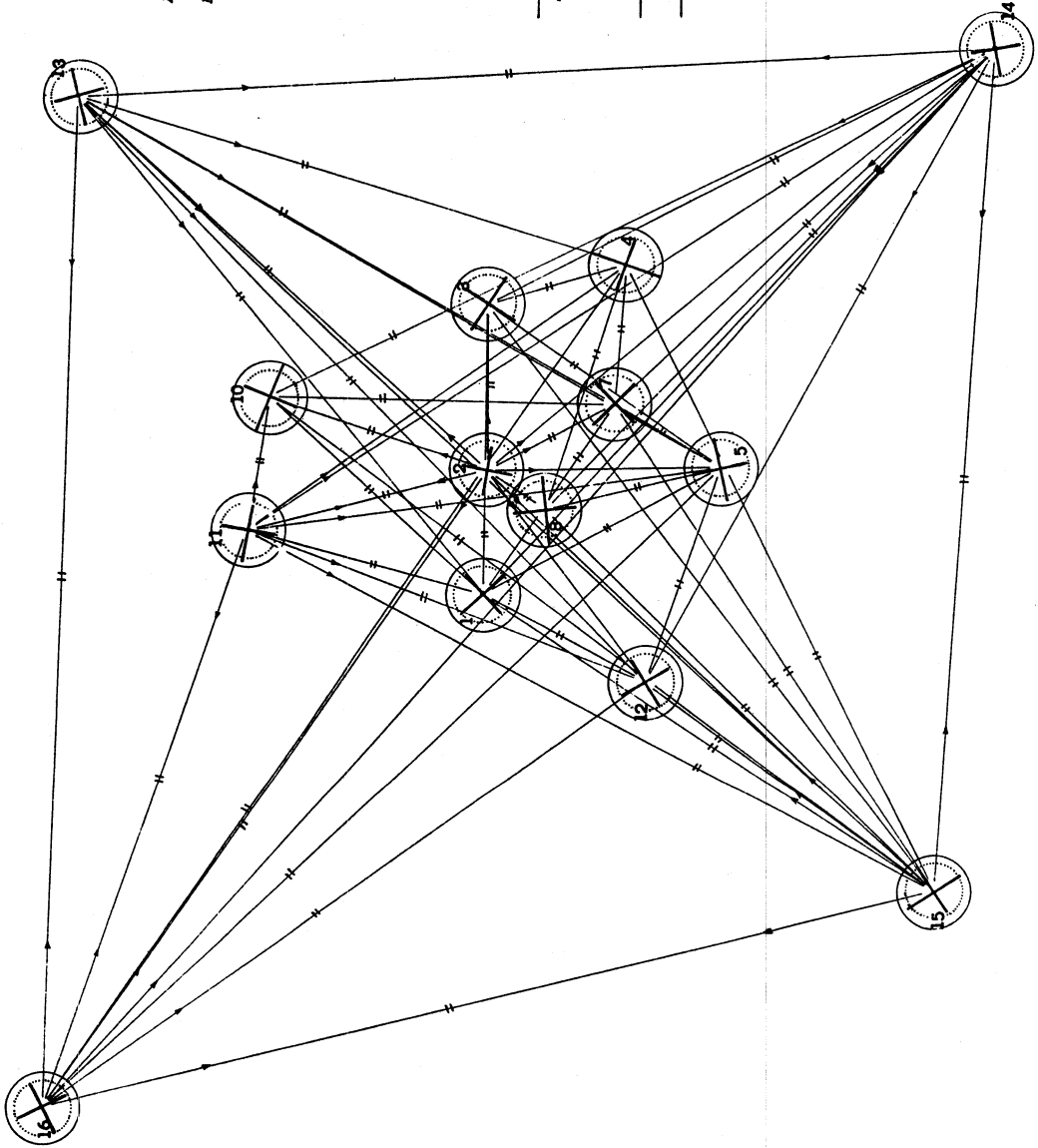


Elde edilen prezizyon
(Hata elipsinin elemanları
 W, A, B)

Ölçülen kenar

Ölçülen doğrultu

E K . 2



TAŞKESTİ MİKROJEODEZİK AĞI