İZOMETRİK ENLEM KAVRAMI VE
COĞRAFİ ENLEMLE ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLER

Ahmet KAYA

ÖZET

Elipsoitde izometrik enlem kavramı ele alınmıştır. İzometrik enlemle coğrafi enlem arasındaki dönüşüm hesapları için farklı çözüm yöntemleri tanıtılmış ve örneklerle açıklanmıştır.

ABSTRACT

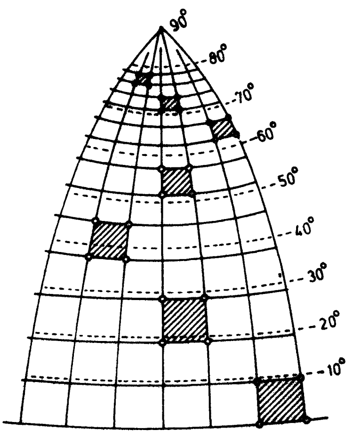
The concept of isometric latitude on the reference ellipsoid is described. Different solution methods for the isometric to geographical latitude trasformations are presented and examined.

1. GİRİŞ

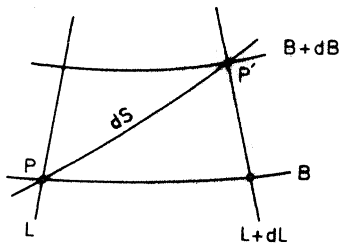
Elipsoit üzerinde tarif edilen coğrafi enlem (B) ve coğrafi boylam (L) bir noktanın konumunu belirleyen genel parametrelerdir. Elipsoitde coğrafi koordinatlar, diğer tarif edilen koordinat sistemlerinin biribirine dönüşümü için de ortak bir altlık teşkil ederler. Enlem çeşitleri olarak elipsoit üzerinde değişik amaçlarla; indirgenmiş enlem (B), jeosantrik enlem (γ) ve izometrik enlem (q) tarif edilir. Boylam yönündeki dönel simetri dolayısı ile; başka boylam tanımlarına ihtiyaç duyulmaz. Bazen L_o boylam başlangıcına göre $\ell = L-L_o$ şeklinde bölgesel boylam farkları kullanılır. Bu yazıda izometrik enlem kavramı ele alınacak ve özellikle q izometrik enlemi belirli iken B coğrafi enleminin hesaplanma yöntemleri tanıtılacaktır.

Tanım olarak; elipsoitde coğrafi boylamın diferansiyel artımı dL'ye eşit metrik diferansiyel artımı olan enleme izometrik enlem denir (Özbenli 1991). Elipsoit üzerinde, q izometrik enlemi ile oluşturulan izometrik koordinat ağının ilginç bir özelliği vardır. Elipsoit yüzeyinde sabit (B,L) koordinat çizgilerinin oluşturduğu yüzey ağı ortogonaldir, (biribirlerini dik olarak keserler) fakat diferansiyel kareler oluşturmaz. Yani 1^o lik enlem ve 1^o lik boylam farkının belirlediği alanlar, ekvator yakınında kareye benzediği halde; ekvatordan uzaklaşıldıkça kareden dikdörtgenlere dönüşür. Bunun yanında sabit (q,ℓ) izometrik koordinat ağı ise her zaman diferansiyel kareler oluşturur (Şekil-1). Bu özelliği dolayısıyla izometrik enlem ve izometrik koordinat çiftleri konform tasvirler teorisinde önemli bir yer tutarlar.

Bir yüzeyin başka bir yüzeye konform tasviri yapılacaksa; her iki yüzeyde izometrik parametre çiftleri seçilir. Elipsoidin küreye veya düzleme yapılacak konform tasvirlerinde ise elipsoitde (q,ℓ) izometrik koordinatları dikkate alınır. Bu temel prensip nedeniyle, coğrafi enlemle izometrik enlem arasındaki ilişkiden faydalanmayan bir konform tasvir yoktur denilebilir. Fakat tasvir ilişkileri sonuç olarak coğrafi koordinatlar üzerinden sağlandığı için; formül yapısının içinde bir yerlerde $(B \rightarrow q)$ ya da $(q \rightarrow B)$ dönüşümü gizlidir.



Şekil-1



Şekil-2

Elipsoitde (B,L) coğrafi koordinatlı bir P noktası ile buna diferansiyel anlamda yakın (B+dB, L+dL) coğrafi koordinatlı P' noktası arasındaki dS yay elemanının ifadesini dikkate alalım (Şekil-2).

dS yay elemanı için şekilden

$$dS^2 = M^2\,dB^2 + N^2\cos^2 B\,dL^2 \qquad (1)$$

yazılabilir. Bu ifade ise,

$$dq = \frac{M\,dB}{N\cos B} \quad \text{ile} \quad dS^2 = N^2\cos^2 B\,(dq^2 + dL^2) \qquad (2)$$

olarak ifade edilir. Bu bağıntıda M; meridyen yönündeki, N ise meridyene dik yöndeki ana eğrilik yarıçapıdır. M ve N'nin değerleri yerine yazılarak, e meridyen elipsinin 1. eksantrisitesini göstermek üzere dq diferansiyel ifadesi için bir başka gösterim şekli olarak yazılabilir. q izometrik enle-

$$dq = \frac{(1-e^2)\,dB}{(1-e^2\sin^2 B)\cos B} \qquad (3)$$

minin hesap formülünü elde etmek için bu diferansiyel ifadenin integrali alınmalıdır. Coğrafi enlem için 0'dan B'ye sınır değerleri ile bu integralin sonucunda q izometrik enlemi için

$$q = \int_0^B \frac{(1-e^2)\,dB}{(1-e^2\sin^2 B)\cos B} = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right)\left[\frac{1-e\sin B}{1+e\sin B}\right]^{\frac{e}{2}} \qquad (4)$$

formülü elde edilir (Grossmann 1976). Bu formül B coğrafi enlemi biliniyorken q izometrik enleminin hesabında kullanılır. Bu logaritmik formülden, q izometrik enlemi

$$q = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right) - e\ln\sqrt{\frac{1+e\sin B}{1-e\sin B}}$$

şeklinde ifade edilerek ve ayrıca,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin B}{1-\sin B}} \quad \text{ve} \quad \operatorname{arctanh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

özellikleri dikkate alınarak hiperbolik fonksiyonlarla q izometrik enlemi için bir başka ifade olarak

$$q = \operatorname{arctanh}(\sin B) - e\,\operatorname{arctanh}(e\sin B) \qquad (5)$$

formülü elde edilir. Böylece B coğrafi enleminden q izometrik enleminin hesabı için kapalı formüller elde edilmiştir. Bu işlemin tersi; yani q belli iken B coğrafi enleminin hesabı için kapalı formül verilemez. Bu maksatla ya iteratif yöntemler kullanılır, ya da seri açılımlardan yararlanılır.

Yukarıdaki formülden, kürenin ω ile gösterilen izometrik enlemi için $e = 0$ konulursa; ϕ kürede coğrafi enlemi göstermek üzere

$$\omega = \operatorname{arctanh}(\sin\phi) \qquad (6)$$

ifadesi elde edilir. Hemen bu formülün tersi olarak kürede ω izometrik enlemi belli iken küresel ϕ coğrafi enlemi

$$\phi = \arcsin(\tanh\omega) \qquad (7)$$

formülü ile hesaplanır.

2. İZOMETRİK ENLEMDEN COĞRAFİ ENLEMİN HESAPLANMASI

Bilinen q izometrik enleminden B coğrafi enleminin hesabında kapalı formülün bulunmadığı daha önce ifade edilmişti. Bu amaçla kullanılan çözüm yöntemleri

a. ΔB veya Δq enlem farkı serileri,
b. İteratif çözüm yöntemi,
c. Seri açılımlar,
d. Nümerik integrasyonla çözüm

olarak dört bölümde ele alınacaktır.

a. ΔB veya Δq Enlem Farkı Serileri

Seçilen bir B_o başlangıç enlemine karşılık gelen izometrik enlem q_o olsun. Bu başlangıç noktasına göre Taylor serisi açılımı yapılarak coğrafi ve izometrik enlem arasında sabit katsayılı seriler elde edilir. B_o enlemli bir P_o noktasında Taylor serisi

$$\Delta B = B - B_o \qquad \Delta q = q - q_o$$

olmak üzere

$$\Delta q = \left(\frac{dq}{dB}\right) \Delta B + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2q}{dB^2}\right) \Delta B^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3q}{dB^3}\right) \Delta B^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{d^4q}{dB^4}\right) \Delta B^4 + \ldots$$

$$\Delta B = \left(\frac{dB}{dq}\right) \Delta q + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2B}{dq^2}\right) \Delta q^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3B}{dq^3}\right) \Delta q^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{d^4B}{dq^4}\right)\Delta q^4 + \ldots$$

şeklinde yazılır. Formüllerdeki 1. türev (2) formülü ile tanımlıdır. Ardışık türevler buradan hesaplanarak formüllerde yerine yazılır ve ilgili katsayılar dahil edilerek yeni oluşan katsayılara c_i ve d_i denilirse seriler için

$$\Delta q = c_1 \Delta B + c_2 \Delta B^2 + c_3 \Delta B^3 + c_4 \Delta B^4 + c_5 \Delta B^5 \tag{8}$$

$$\Delta B = d_1 \Delta q + d_2 \Delta q^2 + d_3 \Delta q^3 + d_4 \Delta q^4 + d_5 \Delta q^5 \tag{9}$$

gösterimi elde edilir. Buradaki c_i ve d_i katsayıları, B_o enleminde hesaplanacak olup formül karşılıkları aşağıda verilmiştir (Grossmann 1976, Jordan/Eggert/Kneissl 1959);

$$c_1 = \frac{1}{\cos B}(1-\eta^2+\eta^4-\eta^6),$$

$$c_2 = \frac{t}{2\cos B}(1+\eta^2-3\eta^4),$$

$$c_3 = \frac{1}{6\cos B}(1+2t^2+\eta^2-3\eta^4+6t^2\eta^4)$$

$$c_4 = \frac{t}{24\cos B}(5+6t^2-\eta^2)$$

$$c_5 = \frac{1}{120\cos B}(5+28t^2+24t^4)$$

$$d_1 = \cos B\,(1+\eta^2),$$

$$d_2 = \frac{1}{2}\cos^2 B\; t\,(-1-4\eta^2-3\eta^4),$$

$$d_3 = \frac{1}{6}\cos^3 B\,(-1+t^2-5\eta^2+13t^2\eta^2-7\eta^4+27t^2\eta^4).$$

$$d_4 = \frac{1}{24}\cos^4 B\; t\,(5-t^2+56\eta^2-40t^2\eta^2)$$

$$d_5 = \frac{1}{120}\cos^5 B\,(5-18t^2+t^4)$$

Katsayılardaki η^2 ve t parametreleri $\eta^2 = e'^2\cos^2 B$; $t = \tan B$ olarak enleme bağlı kısaltmalardır.

Yukarıdaki (8) ve (9) serileri, izometrik enlemin gerekli olduğu formül yapılarında çok sık kullanılmıştır. Genellikle 30 dakikalık enlem aralıklarında cetveller oluşturularak; c_i ve d_i katsayıları ilgili enlemlerde hesaplanırlar.

b. İteratif Çözüm Yöntemi

İzometrik enlemi veren (5) formülü, B'ye göre düzenlenirse;

$$\sin B = \tanh\,[\,q + e\,\operatorname{arctanh}(e\,\sin B)\,]$$

şekline dönüşür. Formülün sağ tarafında da B coğrafi enlemini içeren terim bulunduğundan, q izometrik enleminden B coğrafi enleminin hesabı iteratif olarak mümkün olur. Buna göre hesaplanan B_i coğrafi enleminden bir sonraki B_{i+1} enlemi

$$\sin B_{i+1} = \tanh\,[\,q + e\,\operatorname{arctanh}(e\,\sin B_i)\,] \qquad (10)$$

formülüyle hesaplanır. İterasyona başlangıç için $B_1 = 0$ alınır. Bu durumda formülden elde edilen

$$\sin B_2 = \tanh\,(q)$$

ilk yaklaşımı (7) formülündeki küresel ifadeden başka bir şey değildir. Bu formül genellikle 5-6 adımlık bir iterasyonla sonuca ulaşır(Özbenli 1982).

c. Seri Açılımlar

Daha kolay hesaplama amacıyla, q izometrik enleminden B coğrafi enleminin hesabında iteratif olmayan seri açılımlar arayışı devam etmektedir. İlk metot olarak χ sembolü ile gösterilen konformal enlem ile q izometrik enlemi arasındaki

$$q = \ln \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\chi}{2}\right), \qquad q = \operatorname{arctanh}\,(\sin\chi)$$

ilişkisinden yararlanılabilir. Bu yöntemde bilinen q değerinden önce

$$\chi = \arcsin\,(\tanh q) \qquad (11)$$

şeklinde χ değeri hesaplanır. χ konformal enleminden B coğrafi enlemine geçiş için de

$$B - \chi = C2\,\sin 2\chi + C4\,\sin 4\chi + C6\,\sin 6\chi + C8\,\sin 8\chi \qquad (12)$$

serisinden yararlanılır (Adams, 1949; Kaya, 1984). Buradaki Ci katsayıları sadece seçilen elipsoide bağlı sabitler olup formül karşılıkları ve Hayford Elipsoidi için sayısal değerleri (radyan ve derece biriminde) aşağıdadır:

$$C2 = \frac{1}{2} e^2 + \frac{5}{24} e^4 + \frac{1}{12} e^6 + \frac{13}{360} e^8 = 3.370775881.10^{-3}.\rho = 0.1931312317°$$

$$C4 = \frac{7}{48} e^4 + \frac{29}{240} e^6 + \frac{811}{11520} e^8 = 6.627690422.10^{-6}.\rho = 0.0003797387°$$

$$C6 = \frac{7}{120} e^6 + \frac{81}{1120} e^8 = 1.787091988.10^{-8}.\rho = 0.0000010239°$$

$$C8 = \frac{4279}{161280} e^8 = 5.419122278.10^{-11}.\rho = 0.0000000031° \quad (12,a)$$

Bu konuda ikinci bir çalışma olarak; yukarıdaki yönteme benzer şekilde önce

$$\chi = \arcsin(\tanh q)$$

ile χ konformal enlemi hesaplanmış ve B enleminin hesabı için

$$\begin{aligned} B = \chi &+ e^2 \sin\chi \cos\chi + e^4 \sin\chi \cos\chi [\cos^2\chi - \tfrac{1}{6}\sin^2\chi] \\ &+ e^6 \sin\chi \cos\chi [\cos^4\chi - \tfrac{5}{6}\sin^2\chi \cos^2\chi + \tfrac{1}{30}\sin^4\chi] \\ &+ e^8 \sin\chi \cos\chi [\cos^6\chi - 2\sin^2\chi \cos^4\chi + \tfrac{49}{120}\sin^4\chi \cos^2\chi + \tfrac{31}{2520}\sin^6\chi] \end{aligned} \quad (13)$$

serisi önerilmiştir (Day, 1988). Bu çözüm serisinin, elemanter işlemlerden sonra yukarıdaki (12.a) serileri ile aynı olduğu görülmüştür. Şüphesiz(12) ve (12.a) serileri gerek kullanım gerekse hesap inceliği yönüyle daha avantajlıdır.

Aynı konuda bir üçüncü çalışma olarak küre ve elipsoit farkı olan terimler Lagrange serisi ile dönüştürülerek aşağıdaki seri elde edilmiştir (Bowring, 1990). Bowring tarafından çözüm için kısa çözüm formülü e'^8 mertebesinde;

$$\tan B = (1+e'^2)(1- \frac{1}{6} e'^4 \tanh^2 q + \frac{1}{5} e'^6 \tanh^4 q) \sinh q \quad (14)$$

ve daha yüksek dereceden e'^{12} mertebesinde bir formül de $T = \tanh q$ kısaltması ile

$$\tan B = (1+e'^2)[1- \frac{1}{6} e'^4 T^2 + \frac{1}{5} e'^6 T^4 + e'^8(\frac{13}{120} T^4 - \frac{19}{63} T^6) - e'^{10}(\frac{71}{210} T^6 - \frac{161}{315} T^8)] \sinh q \quad (14.a)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Fakat (14.a) serileri istenilen hesap inceliğinin çok üstünde olup; yukarıdaki (14) kısa formül yapısı çok özel amaçlar dışında pratik olarak kullanılabilir.

d. Nümerik İntegrasyonla Çözüm

Lichtenegger, izometrik enlem ile ilgili (3) temel diferansiyel denklemine nümerik integrasyon yönteminin uygulanmasını ele almıştır. Bu yöntemde

$$dq = f(B)\,dB \;,\; f(B) = \frac{(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)\cos B} \;,\; f^{-1} = 1/f(B)$$

temel fonksiyonlarından hareket edilmektedir. Bilinen q izometrik enleminden B coğrafi enleminin hesabı için; n değeri seçimlik adım sayısı olmak üzere; Runge-Kutta yöntemi uygulanarak, $\Delta q = q/n$, $B_o = 0^o$ ile başlanılmakta ve

$$\begin{aligned} \Delta B^{(1)} &= f^{-1}(B_o)\,\Delta q & \Delta B^{(3)} &= f^{-1}(B_o+\Delta B^{(2)}/2)\,\Delta q \\ \Delta B^{(2)} &= f^{-1}(B_o+\Delta B^{(1)}/2)\,\Delta q & \Delta B^{(4)} &= f^{-1}(B_o+\Delta B^{(3)})\,\Delta q \end{aligned} \qquad (15)$$

şeklinde farklar hesaplanmaktadır. Daha sonra bu farklardan

$$\Delta B = \frac{1}{6}\left[\Delta B^{(1)} + 2(\Delta B^{(2)} + \Delta B^{(3)}) + \Delta B^{(4)}\right]$$

değeri elde edilmekte ve $B_o = B_o + \Delta B$ konularak işleme n kere devam edilmektedir. Aranılan B coğrafi enlemi ise;

$$B = \sum_n \Delta B$$

şeklinde n tane toplam sonucu bulunur (Lichtenegger 1990). Bu yöntemin hesap makinesi ile yapılması çok zahmetli olacağından; ancak bilgisayarda kullanılabilir.

3. SAYISAL DEĞERLENDİRME VE SONUÇ

İzometrik enlem q, formül yapısı gereği $B = 90^o$ için tanımsızdır. Bu yazıda sunulan çözüm yöntemleri $0^o - 89^o$ coğrafi enlem değerleri için bilgisayarda programlanarak test edilmişlerdir. Ayrıca değişik ara değerlerle de hesap makinesi ile çözümler yapılmıştır. B coğrafi enleminden q izometrik enleminin hesaplanmasında; hesap makinesi ile elle hesap veya bilgisayarla programlanarak kullanım için (5) ile verilen

$$q = \text{arctanh}(\sin B) - e\ \text{arctanh}(e \sin B)$$

formülü en kullanışlı olanıdır. Bu formülün sonucunda q izometrik enleminin birimi radyan olarak elde edilir. İstenilen açı birimine geçmek için ilgili ρ faktörü ile çarpılmalıdır. Örnek olarak

$B = 38^\circ$ için $q = 0.7138455877$ radyan ve $q = 40^\circ\ 54'01.22184''$

değerleri bulunur.

Sabit katsayılı (8) ve (9) serilerinin kullanımı günümüzde diğer çözümler yanında pratik önemini yitirmiştir. Cetvellerle desteklenmiş sayısal hesap yerine, bu seriler formül türetmede çok kullanılır. (10) formülleri ile verilen iteratif çözüm yöntemi de elle hesap için külfetlidir. (15) formülleri olarak verilen nümerik integrasyon yönteminin uygulanması da ancak bilgisayar kullanıldığında mümkün olur.

İteratif işlem gerektirmeyen seri çözümler; hem elle hesap için hem de bilgisayarda kullanım yönünden çok daha uygundurlar. Seri açılımların, B coğrafi enlemi için $0^\circ - 89^\circ$ değerleri ile test edilmesinden; bulunması gereken coğrafi enleme yaklaşma hataları, mutlak değerce aşağıda verilmiştir.

(11-12) Kaya 1984 formülü	$B=39^\circ$	de max.	fark=0.00000004"
(13) Day 1988 formülü	$B=39^\circ$	de max.	fark=0.00000011"
(14) Bowring 1990 formülü	$B=71^\circ$	de max.	fark=0.00001701"

Her üç formülün burada belirtilen maksimum hataları sadece verilen enlem değerlerindedir. Diğer enlem değerlerindeki farklar çok daha küçüktür. Bu sonuçlardan da görüldüğü gibi yukarıdaki formüllerin üçü de, q izometrik enleminden B coğrafi enleminin hesabında 0.00001" hesap inceliğini sağlamaktadır. Elle yapılacak hesapta; işlem kolaylığı yönünden (11) - (12) ile verilen formül yapısının kullanımı çok daha kısadır. Bu formüllerde kullanılacak olan C2, C4, C6 ve C8 katsayıları Hayford elipsoidi sabitleri ile hem radyan hem de derece biriminde verilmiştir. Bilgisayar programlama için radyan birimindeki katsayılarla hesap çok daha duyarlı sonuçlar verir.

KAYNAKLAR

/1/ Adams,O.S. : Latitude Developments Connected With Geodesy and Cartography, US Coast and Geodetic Survey, Washington, 1949.

/2/ Bowring,B.R. : New Ideas on Isometric Latitude, Survey Review, 30, 236,p.270-280, 1990.

/3/ Day,J.W.R. : The Formula for Finding the Ordinary Latitude From the Isometric Latitude, Survey Review,29, 230, p.383-385, 1988.

/4/ Grossmann,W. : Geodaetische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung, Wittwer, Stuttgart,p.144,1976.

/5/ Jordan,Eggert, Kneissl. : Handbuch der Vermessunskunde, Band IV/2, 1959.

/6/ Kaya,A. : Elipsoidin Küreye Konform Tasviri Yoluyla Jeodezik Temel Problemlerin Çözümü Üzerine Bir İnceleme, (Doktora Tezi) K.Ü.Fen Bil.Ens.Trabzon, s.42,1984.

/7/ Lichtenegger,H. : Transformation of Geodetic and Isometric Latitude by Numerical Integration, Survey Review 30, 236,p.294-296, 1990.

/8/ Özbenli,E. : Elipsoidin Küreye Konform Tasviri, K.T.Ü. Yer Bilimleri Fakültesi, Trabzon, 1982.

/9/ Özbenli,E. : Jeodezi, K.T.Ü.Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Trabzon,s.31,1991.