Jeodezi:

İstasyon muvazenesine ait bir mesele

Yazan: Y. Mh.
Ekrem Ulsoy

Malûmdurki birinci derece postaları tarafından her istasyonda yapılan rasad neticeleri şebeke muvazenesinde kullanılabilmek için daha evvel bir istasyon muvazenesine tâbî tutulurlar. Bu yazımda bir istasyon muvazenesinin nasıl yabıldığını izah edecek değilim. Bu Harita Gn. Drk. de ötedenberi malum olan bir şeydir. Fakat acaba rasatları ve istasyon muvazenesi yapılmış bir noktada başka bir zamanda yapılan bir rasat nasıl pratik bir surette nazarı itibara alınmalıdır. Ve böyle bir usul ile kat'i ve sahih muvazene arasında ne fark vardır? Bu sene birinci derece rasat karneleri ve onların hesapları ile meşgul olan hesap postası bu gibi hesaplarla pek çok karşılaşmış ve aşağıda izah edileceği üzere Abendroth un «Die Ausgleichungspaxis in der Landesvermessung» isimli kitabının 23 üncü sahifesindeki misâle göre hesaplamıştır. Hem, işlerinin çokluğu dolayısile bu meselenin, yukardaki suale cevap verecek surette, tetkikini benden rica eden kıymetli arkadaşlarımın arzularını yerine getirmek, hem de gayet basit bir usul olan Abendroth un bu usulünü diğer arkadaşlara anlatmak gayesile bu makaleyi yazıyorum.

Birinci derece rasadları Schreiberin usulünün iyiliğinin anlaşılmasından sonra hep bu usul ile (kombine usulü) yapılmaktadır. Bu usul Almanyada 1876 dan beri tatbik edilmektedir. Bu usulde mevcut istikametler arasındaki bütün zaviyeler ölçülür, ki bunların adedi, eğer n istikamet mevcut ise:

$$\frac{1}{2} n (n - 1) \quad \text{dir.}$$

Hesap postasının karşılaştığı mesele en fazla şu şekildedir: Bir istasyonda 4 — 5 noktaya rasad edilmiş ve bunların muvazenesi bitirilmişdir, Bir sene sonra ayni istasyona yine bir posta çıkmış ve mühim görülen bir istikameti iki eski istikamete nazaran rasad etmiştir.

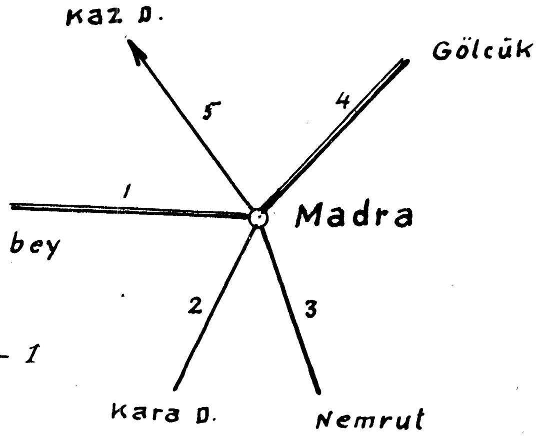
Evvelâ Abendroth un usulünü bir misâl ile görelim: Alınan istasyon Madra dır. Burada 1934 senesinde Gölcük, Kazdağ. Alibey ve 1935 senesinde de Alibey, Karadağ, Nemrut ve Gölcük noktalarına bakılmıştır.

Binaenaleyh biz bu iki muhtelif zamanda yapılan rasadları birleştirmek mecburiyetindeyiz. Müşterek olan istikametler çift hat ile gösterilmiştir. Şekilden anlaşılacağı üzere mesele « Kaz dağ » ı 1935 ölçüleri meyanına ithal etmektir.

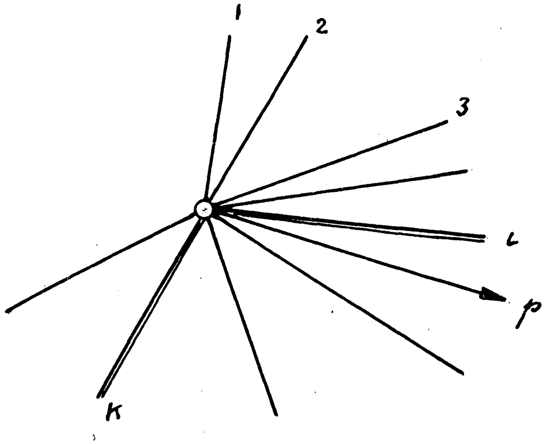
Bunun için evvelâ müşterek istikametler arasındaki birbirini 400 gırada tamamlayan zaviyelerin biri birinci, diğeri ikinci rasaddan alınır. cem edilir ve 400 den farkı bulunarak bu iki zaviyeye müsavi olarak taksim olunur. Misalde bu fark + 7,08 saniyedir. Bundan sonra bu müşterek istikametler esas gibi telâkki olunarak diğer istikametlerin bunlarla yaptıkları zaviyelerin mecmuunun bu müşterek istikametlerin yaptıkları zaviyeye müsavi olduğu yazılır. Aradaki fark yine her iki zaviyeye müsavi olarak taksim olunur, Her istikamet için bu ameliye yapılınca muvazene bitmiş olur.

Şimdi bunu riyazî olarak tetkik edelim:

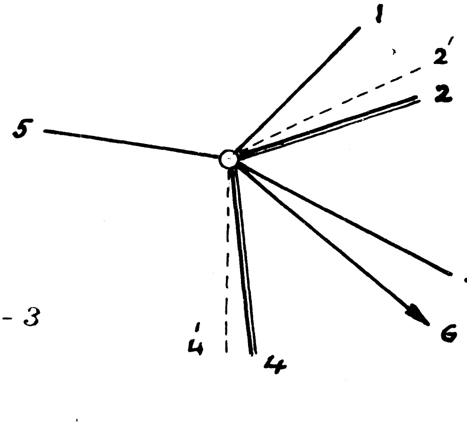
Şekil 2 de görüldüğü üzere n istikametli bir istasyon alalım. İstikametler 1, 2, 3 .... i, ... k .... n diye numaralanmıştır. İlâvesi



Şekil - 1



Şekil - 2



Şekil - 3

1934	g	1935	g
Gölcük	0.0000.00	Alibey	0.0000.00
Kaz d.	118.6464.04	Kara d.	57.7936.11
Aliboy	177.0579.77	Nemrut	119.3153.66
		Gölçük	222.9413.15

1-4 = 177.0579.77		+ 3.54	= 83.31
4-1 = 222.9413.15		+ 3.54	= 16.69
	399.9992.92	+ 7.08	00.00
	400.0000.00		
	+ 7.08		
5-4 = 118.6464.04		+ 1.77	= 65.81
1-5 = 58.4115.73		+ 1.77	= 17.50
1-4 = 177.0579.77			
1-4 = 177.0582.31			
	+3.54		
2-1 = 57.7936.11		+ 1.77	= 37.88
4-2 = 165.1477.04		+ 1.77	= 77.81
	222.9413.15		16.69
	222.9416.69		
	+3.54		
3-1 = 119.3153.66		+ 1.77	= 55.43
4-3 = 103.6259.49		+ 1.77	= 61.26
	222.9413.15		16.69
	222.9416.69		
	+3.54		
Muvazeneden sonra:		Kontrol:	
1	0.0000.00		
2	57.7937.88	57.7937.88	
3	119.3155.43	61.5217.55	
4	222.9416.69	103.6261.26	
5	341.5882.50	118.6465.81	
		58.4117.50	
		400.0000.00	

icap eden istikameti de p ile gösteriyorum. İlâveden evvelki istikametlere ait rasadları r'_1, r'_2, r'_3 ... ile ve sonrakileri de r''_1, r''_2.. ile göstereceğim.

İlk yaptığımız iş müşterek ı, k istikametleri arasındaki zaviyeleri toplamak ve 400 den farkını bulmakdı.

$$\mathrm{I} = r'_k - r'_ı$$
$$\mathrm{II} = r''_ı - r''_k + 400$$
$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = r'_k - r'_ı + r''_ı - r''_k + 400$$
$$400 - (\mathrm{I}+\mathrm{II}) = r'_ı - r'_k + r''_k - r''_ı$$

Bu farkı I ve II ye taksim edelim:

$$\mathrm{I} + \text{fark} = r'_k - r'_ı + \frac{r'_ı - r'_k + r''_k - r''_ı}{2} = \frac{r'_k - r'_ı + r''_k - r''_ı}{2}$$

$$\mathrm{II} + \text{fark} = r''_ı - r''_k + 400 + \frac{r'_ı - r'_k + r''_k - r''_ı}{2} = \frac{r'_ı - r'_k + r''_ı - r''_k}{2} + 400$$

Şimdi diğer bir istikameti, meselâ ilâvesi icap eden p istikametini alarak bunun müşterek ı ve k istikametlerile yapdığı zaviyeleri bulalım. Mecmuların ı, k arasındaki zaviyeye müsavi oldduğunu yazalım:

$$\begin{array}{c} r'_p - r'_ı \\ r'_k - r'_p \\ \hline r'_k - r'_ı \end{array}$$

$$\mathrm{I} - r'_k + r'_ı = \frac{r'_ı - r'_k + r''_k - r''_ı}{2}$$

Bunun $r'_p - r'_ı$ ile $r'_k - r'_p$ e müsavi olarak taksimi lâzımdır.

$$r'_p - r'_ı \quad + \quad \frac{r'_ı - r'_k + r''_k - r''_ı}{4}$$

$$r'_k - r'_p \quad + \quad \frac{r'_ı - r'_k + r''_k - r''_ı}{4}$$

Görülüyorki $r''_p - r'_ı$ ve $r'_k - r''_p$ zaviyelerine ait miktarı tashihler sabit ve binaenaleyh diğer istikametler için de aynıdır. Bu da müşterek istikametler arasındaki zaviyeler mecmuunun

400 den farkının dörtte birine müsavidir. Hakikaten misâlde de bütün miktarı tashihlerin $+\dfrac{7.08}{4}=+1{,}77$ olduğu görümektedir.

Şimdi sahih muvazeneye ğelelim. Yine kolay anlaşılmasını temin maksadile beş istikametli bir istasyon ile iki ve dört istikametlerine bağlanmış 6 istikametini alıyorum. Şekil 3.

Hata muadeleleri hakkındaki bilgiyi malûm farzederek 5 istikamet için doğrudan doğruya neticeyi yazıyorum. Yeni rasada ait olanlar ise çizginin altına yazılmıştır:

$$
\begin{array}{llllllll}
v_{12} = & +[12] & & & & & -(12) \\
v_{13} = & & +[13] & & & & -(13) \\
v_{14} = & & & +[14] & & & -(14) \\
v_{15} = & & & & +[15] & & -(15) \\
v_{23} = & -[12] & +[13] & & & & -(23) \\
v_{24} = & -[12] & & +[14] & & & -(24) \\
v_{25} = & -[12] & & & +[15] & & -(25) \\
v_{34} = & & -[13] & +[14] & & & -(34) \\
v_{35} = & & -[13] & & +[15] & & -(35) \\
v_{45} = & & & -[14] & +[15] & & -(45) \\
\hline
v_{26} = & -[12] & & & & +[16] & -(26) \\
v_{64} = & & & +[14] & & -[16] & -(64) \\
v_{24} = & -[12] & & +[14] & & & -(24)
\end{array}
$$

Buna nazaran v_{45} e kadar olan hata muadelelerinin normal muadelesini yazalım:

$$
\begin{array}{l}
4[12]-[13]-[14]-[15]-(12)+(23)+(24)+(25)=0 \\
-[12]+4[13]-[14]-[15]-(13)-(23)+(34)+(35)=0 \\
-[12]-[13]+4[14]-[15]-(14)-(24)-(34)+(45)=0 \\
-[12]-[13]-[14]+4[15]-(15)-(25)-(35)-(45)=0
\end{array}
$$

Bu dört muadele cem olunursa;

$$(\times)\quad [12]+[13]+[14]+[15]-(12)-(13)-(14)-(15)=0$$

bulunur. Bu muadele sıra ile normal muadelelere ilâve olunursa:

$$[12]=\frac{s_2}{5}\qquad [13]=\frac{s_3}{5}\qquad [14]=\frac{s_4}{5}\qquad [15]=\frac{s_5}{5}$$

çıkar. S-ler her normal muadeledeki malûm mıktarlar ile $(\times)$ işaretleri muadelenin malûm mıktarları mecmuuna müsavidir.

Umumî olarak düşünürsek n istikamet olduğuna göre:

$$[12]=\frac{s_2}{n}\qquad [13]=\frac{s_3}{n}\qquad [14]=\frac{s_4}{n}\qquad [15]=\frac{s_5}{n}\ldots$$

olur.

Şimdi bütün ölçüleri birden nazarı itibara alarak normal muadeleleri yazalım:

$$\begin{array}{rrrrrlr}
6[12] & -[13] & -2[14] & -[15] & -[16] & -(12)+(23)+(24)+(25)+(26)+(24) & =0 \\
-[12] & +4[13] & -[14] & -[15] & & -(13)-(23)+(34)+(35) & =0 \\
-2[12] & -[13] & +6[14] & -[15] & -[16] & -(14)-(24)-(34)+(45)-(64)-(24) & =0 \\
-[12] & -[13] & -[14] & +4[15] & & -(15)-(25)-(35)-(45) & =0 \\
-[12] & & -[14] & & +2[16] & -(26)+(64) & =0
\end{array}$$

Yukarıdaki normal muadelerle mukayese edersek 1 ve 3 üncü muadeleler ufak bir değişikliğe uğramış ve 5 inci bir muadele ilâve olunmuştur. Dikkat edilirse değişiklik, müşterek olan istikametlere ait muadelelerde vukua gelmiştir. Normal muadeleleri n istikamet için yazmış olsaydık ve yeni istikameti ı ve k ıncı istikametlere bağlamış bulunsaydık bu takdirde [1 ı] ve [1 k] ya ait muadelelerin değişikliği [1 ı] ve [1 k] nın müsbet emsalli haddinde $n-1$ iken $n+1$ olacak ve bundan başka bu muadelelere yeni istikamete ait bir meçhul ile bunlara tekabül eden malûm mıktarlar girecektir. Meselâ ilk muadelede [12] nin emsali 4 iken 6 olmuş ilâve edilecek istikamet olan 6 istikametine ait [16] meçhulü girmiş ve (26), (24) yeni ölçüleri ilâve olunmuştur. Birde müşterek olan istikametlerin emsalleri -1 iken -2 olmuştur. 6 ncı istikamete ait muadelenin sureti teşekkülünü izaha hacet yoktur.

Bu yeni normal muadeleleri cem edecek olursak birinci sistemde elde edilen mecmuun aynını elde ederiz.

Yeni mecmu:

$$(\times)\quad [12]+[13']+[14]+[15]-(12)-(13)-(14)-(15)=0$$

dır. Bunu 2 ve 4 üncü muadelelere ilâve edersek birinci sistemden [13] ve [15] için elde edilen kıymetlerin aynını elde ederiz. Zira burada değişen bir şey yoktur. Müşterek istikametlere ait olan 1, 3 ve 5 inci muadeleleri nazarı itibara alalım. 1 ve 3 e $(\times)$ işaretli muadeleyi ilâve ettikten ve 5 inci muadeleyi de aynen yazalım:

$$(\times\times)\quad \begin{aligned} 7[12]-[14]-[16]&=s_2-(26)-(24)\\ -[12]+7[14]-[16]&=s_4+(64)+(24)\\ -[12]-[14]+2[16]&=(26)-(64)\end{aligned}$$

Eğer n istikamet alır, yeni p istikametini ı ve k ıncı istikametlere rabt ettiğimizi kabul edersek $(\times\times)$ muadeleleri umumî olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} (n+2)[1\imath]-[1k]-[1p]&=s_\imath-(\imath p)-(\imath k)\\ -[1\imath]+(n+2)[1k]-[1p]&=s_k+(pk)+(\imath k)\\ -[1\imath]-[1k]+2[1p]&=(\imath p)-(pk)\end{aligned}$$

Bu üç muadeleyi de cem edelim:

$$n[1\imath]+n[1k]=s_\imath+s_k$$

Birinci muadeleden ikinciyi çıkarırsak:

$$(n+3)[1\imath]-(n+3)[1k]=s_\imath-s_k-(\imath p)-2(\imath k)-(pk)$$

Şu halde:

$$[1\imath]+[k]=\frac{s_\imath+s_k}{n}$$

$$[1\imath]-[1k]=\frac{s_\imath-s_k}{n+3}-\frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{n+3}$$

Bunları cem ve tarh suretile:

$$[1\imath]=\frac{(2m+3)s_\imath+3s_k}{2n(n+3)}-\frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{2(n+3)}$$

$$[1k]=\frac{3s_\imath+(2n+3)s_k}{2n(n+3)}+\frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{2(n+3)}$$

elde edilir. [1p] yi de hasaplayalım:

$$2[1p]=[1\imath]+[1k]+(\imath p)-(pk)$$

$[1\imath]+[1k]$ yerine müsavisini koyup hal edersek:

$$[1p]=\frac{s_\imath+s_k}{2n}+\frac{(\imath p)-(pk)}{2} \quad \text{bulunur.}$$

Yeni noktanın ithalinden evvelki muvazene neticesinde $[1\imath]$ ve $[1k]$ için bulunmuş olan kıymetleri $w_\imath$, w_k ile gösterelim. Bu takdirde yeni kıymetleri aşağıdaki tarzda gösterebiliriz:

$$[1\imath]=\frac{2n+3}{2n(n+3)}s_\imath+\frac{3}{2n(n+3)}s_k-\frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{2(n+3)}$$

$$=\frac{2n+3}{2n+6}w_\imath+\frac{3}{2n+6}w_k-\frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{2n+6}$$

$$[1k]=\frac{2n+3}{2n(n+3)}s_k+\frac{3}{2n(n+3)}s_\imath+\frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{2(n+3)}$$

$$=\frac{2n+3}{2n+6}w_k+\frac{3}{2n+6}w_\imath+\frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{2n+6}$$

$$[1p]=\frac{1}{2}(w_\imath+w_k)+\frac{1}{2}\left\{(\imath p)-(pk)\right\}$$

Bu düsturları kendi misâlimize tatbik için $n=5$, $\imath=2$, $k=4$, $p=6$ koymak kâfidir. Bu takdirde:

$$[12]=\frac{13}{16}w_2+\frac{3}{16}w_4-\frac{(26)+2(24)+(64)}{16}$$

$$[14]=\frac{13}{16}w_4+\frac{3}{16}w_2+\frac{(26)+2(24)+(64)}{16}$$

$$[16]=\frac{1}{2}(w_2+w_4)+\frac{1}{2}\left\{(26)-(64)\right\}$$

bulunur.

$[12]$ nin eski kıymetine w_2, $[14]$ ünküne w_4 ve umumî olarak da $w_\imath$, w_k demiştik. Aradaki farkları $\Delta_\imath$, Δ_k ile gösterirsek:

$$[1\imath]-w_\imath=\Delta_\imath\,,\quad [1k]-w_k=\Delta_k$$

$$\Delta_\imath=-\frac{3}{2n+6}w_\imath+\frac{3}{2n+6}w_k-\frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{2n+6}$$

$$\Delta_k=-\frac{3}{2n+6}w_k+\frac{3}{2n+6}w_\imath+\frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{2n+6}$$

$w_k - w_i = w_{ik}$ diyelim. Bu ı ve k istikametleri arasındaki zaviyedir. Binaenaleyh:

$$\Delta_i = + \frac{3}{2n+6} w_{ik} - \frac{(ıp)+2(ık)+(pk)}{2n+6}$$

$$\Delta_k = - \frac{3}{2n+6} w_{ik} + \frac{(ıp)+2(ık)+(pk)}{2n+6}$$

olur. w_{ik} nın tahavvül mıktarını da hesaplayalım:

$$w_{ik} = w_k - w_i$$

olduğu düşünülürse:

$$w_{ik} + \Delta_{ik} = w_k + \Delta_k - (w_i + \Delta_i)$$

$$\Delta_{ik} = \Delta_k - \Delta_i$$

$$\Delta_{ik} = - \frac{3}{n+3} w_{ik} + \frac{(ıp)+(pk)+2(ık)}{n+3}$$

bulunur.

Δ_{ik} ilk kıymet ile bütün ölçüler nazarı itibara alınarak yapılan muvazene neticesi arasındaki farkı göstermektedir. Halbuki esas mesele Abendroth un usulü ile bütün ölçüleri nazarı itibara alan kat'i muvazene arasındaki farkı bulmaktı. Abendroth un usulünde arazide yapılan rasadlar doğrudan doğruya değil bilâkis iki ayrı muvazene neticeleri kullanılmaktadır. Onun için ilâve olunacak istikamete ait rasadları da muvazeneye tâbi tutalım. Bu iki istikamete rabt olunduğu için üç rasad var demektir ki, bunlara ait hata muadeleleri, hata muadeleleri meyanında ve çizginin altındadır. Yani elimizde üç hata muadelesi mevcuttur. Fakat biz bu hata muadelelerini, elde mevcut üç istikameti sırasile 1, 2, 3 diye numralayarak başka türlü yazabiliriz. Buna nazaran normal muadeleler şu şekli alır:

$$2[12] - [13] \quad (12) + (23) = 0$$

$$-[12] + 2[13] - (13) - (23) = 0$$

Buradan:

$$[12] = \frac{+2(12)+(13)-(23)}{3}$$

$$[13] = \frac{+(12)+2(13)+(23)}{3}$$

$$[23] = \frac{-(12)+(13)+2(23)}{3}$$

istihrac olunur.

Umumî olarak ise [13] yerine:

$$[\imath k] = + \frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{3}$$ yazılabilir.

Abendroth un usulünde $[\imath k]+[k \imath]$ nin 400 den farkı bulunuyordu. Bunu bulalım:

$$+ \frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{3} - w_{\imath k}$$

Bu farkı $[\imath k]$ ile $[k \imath]$ ye mütesaviyen taksim ediyorduk. Yani her zaviye:

$$\frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{6} - \frac{1}{2} w_{\imath k}$$

kadar tashih ediliyordu. Şu halde $w_{\imath k}$ zaviyesi şimdi:

$$w_{\imath k} - \frac{1}{2} w_{\imath k} + \frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{6}$$

$$= \frac{1}{2} w_{\imath k} + \frac{(\imath p)+2(\imath k)+(pk)}{6}$$ olur.

İdeal muvazenede ise:

$$w_{\imath k} + \Delta_{\imath k} = \frac{n+3}{n+3} w_{\imath k} - \frac{3}{n+3} w_{\imath k} + \frac{(\imath p)+(pk)+2(\imath k)}{n+3}$$

$$= \frac{n}{n+3} w_{\imath k} + \frac{(\imath p)+(pk)+2(\imath k)}{n+3}$$ dir.

İlâveden evvel, Abendroth usulü ve topdan muvazene neticelerini toplu olarak yazalım:

İlâveden evvel: $w_{\imath k}$

Abendroth: $\frac{1}{2} w_{\imath k} + \frac{(\imath p) + 2(\imath k) + (p k)}{6}$

Topdan muvazene: $\frac{n}{n+3} w_{\imath k} + \frac{(\imath p) + 2(\imath k) + (pk)}{n+3}$

Son iki neticeyi başka bir şekilde de gösterebiliriz.

$(\imath k)$, $\imath$ ve k istikametleri arasındaki zaviye rasaddır. Binaenaleyh $w_{\imath k}$ dan farkı δ_1 gibi gayet ufak bir mıktar olacaktır.

$(\imath p) + (p k)$ da ayni zaviyeye ait muvazene edilmemiş bir kıymetdir. Şu halde bu da ancak δ_2 gibi ufak bir mıktar fark eder. Buna nazaran:

$$(\imath p) + 2(\imath k) + (p k) = 2 w_{\imath k} - 2\delta_1 + w_{\imath k} - \delta_2 = 3 w_{\imath k} - (2\delta_1 + \delta_2)$$

Şu halde düsturlar:

Abendroth: $\frac{1}{2} w_{\imath k} + \frac{3 w_{\imath k} - (2\delta_1 + \delta_2)}{6} = \frac{1}{2} w_{\imath k} + \frac{3}{6} w_{\imath k} - \frac{2\delta_1 + \delta_2}{6} = w_{\imath k} - \frac{2\delta_2 + \delta_2}{6}$

Toptan muvazene: $\frac{n}{n+3} w_{\imath k} + \frac{3 w_{\imath k} - (2\delta_1 + \delta_2)}{n+3} = \frac{n}{n+3} w_{\imath k} + \frac{3}{n+3} w_{\imath k} - \frac{2\delta_1 + \delta_2}{n+3} = w_{\imath k} - \frac{2\delta_1 + \delta_2}{n+3}$

Şimdi $[\imath p]$ ye gelelim:

$\imath$, p, k istikametlerinin kendilerine göre muvazenesinden sonra $(\imath p)$ ile $(p k)$ için birer kıymet bulunur. Bunları $(\imath p m)$. $(p k m)$ gösterelim. Şekilden anlaşılacağı üzere:

$$w_{\imath} + (\imath p m) = w_k - (p k m)$$

dır. Ve bu da I ile p arasındaki zaviye için bir kıymettir. Bunu $(I p)$ ile göstereceğim:

$$w_{\imath} + (\imath p m) = w_k - (p k m) = (I p)$$

(ıp) ile (pk) için yukardaki düsturlarda geçdiği üzere rasadları koyarsak t_i. t_k gibi gayet ufak farklar olacaktır:

$$w_i + (ıp) + t_i = (1p)$$

$$w_k - (pk) + t_k = (1p)$$

$$[1p] = \frac{1}{2}(w_i + w_k) + \frac{1}{2}\left\{(ıp) - (pk)\right\}$$ idi. Şu halde:

$$[1p] = \frac{1}{2}\left\{w_i + (ıp) + w_k - (pk)\right\} = \frac{1}{2}\left\{(1p) - t_i + (1p) - t_k\right\}$$

$$= (1p) - \frac{t_i + t_k}{2}$$

Üç hata muadelesile yapılan muvazeneden elde edilen kıymetlerle t_i ve t_k yı hesaplayabiliriz.

$$t_i = (ıpm) - ıp) = \frac{2(ıp) + (ık) - (pk)}{3} - (ıp = \frac{-(ıp) + (ık) - (pk)}{3}$$

$$t_k = -(pkm) + (pk) = -\frac{-(ıp) + (ık) + 2(pk)}{3} + (pk) = \frac{(ıp) - (ık) + (pk)}{3}$$

Şu halde:

$$t_i + t_k = 0 \quad \text{ve} \quad [1p] = (1p) \qquad \text{olur.}$$

Müteaddit neticelerin mukayesesi;

Gerek Abendroth un usulünde, gerek kat'i ve umumi muvazenede yalnız müşterek istikametler değişmektedir. Müşterek istikametler arasındaki zaviyenin ilk muvazene edilmiş kıymeti w_{ik} ve ilâve esnasında ölçülen (ık) ve (ıp) + (pk) zaviyelerile w_{ik} arasındaki farklara δ_1, δ_2 dediğimize göre neticeler şöyle idi:

$$1: \quad w_{ik}$$

$$2: \quad w_{ik} - \frac{2\delta_1 + \delta_2}{6}$$

$$3: \quad w_{ik} - \frac{2\delta_1 + \delta_2}{n+3}$$

Abendroth un tarzında değişme mıktarının ilâveden evvelki istikamet adedine tâbi olmadığı görülmektedir. Bu değişme mıktarı $-\dfrac{2\,\delta_1+\delta_2}{6}$ dır.

Umumî muvazene neticesinde ise ilk istikamet adedi olan n in rolü gözükmektedir. Burada değişme miktarı $-\dfrac{2\,\delta_1+\delta_2}{n+3}$ dür. Şu halde ilk istikametlerin mıktarı çoğaldıkça ilâve istikametin neticeye tesiri azalacaktır ve gittikçe sıfıra yaklaşacakdır. Bundan şu anlaşılır:

Eğer n çok büyük bir adet ise (ki böyle bir şeyin pratik olarak imkânı yoktur), o vakıt w_{ik} yı hiç değişmemiş gibi kabul edebiliriz. Ve yalnız mesele yeni istikameti ı, k istikametleri arasına sokmağa kalır. Bu da ı, k, p istikametlerine ait rasatları muvazene etmek ile kabil olur.

Demek ki ilk istikamet adedi arttıkça 1 ve 3 numaralı neticeler bir birine yaklaşmakda, 2 No. ise sabit kalmaktadır. Umumî olarak n azamî 7 ve ekseriya 5 veya 6 dır. Vasatî olarak $n=5$ dersek 2 ve 3 numaralı neticelerin birbirlerinden çok farklı olmadıklarını görürüz. $n=3$ için ise bu iki usul birbirinin ayni olmaktadır.

Müşterek istikametlerin tahavvülünü şeklen de görebiliriz. Şekil 3 de müşterek istikametlerin muvazeneden sonraki vaziyetleri noktalı hatlarla gösterilmiştir. İstikametlerden birinin meselâ 2 istikametinin tahavvülü w_{ik} ya ait tahavvülün dörtte biridir. Yalnız müşterek istikametlere ait tahavvül mıktarlarının işaretleri şekilde de görüldüğü üzere makûs işaretli olduklarından w_{ik} nın tahavvül mıktarı umumî tahavvülün nısfı olur. Aynı sebepten w_{ki} de tashih edilmiş olacağından $w_{ik}+w_{ki}=400$ olarak istikametler beyninde tevazün elde edilmiş olur. Diğer istikametlerle müşterek istikametlerden biri arasındaki zaviye ise, yalnız müşterek olan değiştiği için, müşterek istikametler için bulunan tahavvül mıktarının dörtte biridir. Bizim misâlimizde müşterek istikametler arasındaki iki muhtelif rasad farkı 7,08 idi. Müşterek istikametlerin her biri ise bunun $\frac{1}{4}$ ü kadar tahavvül etmişlerdir.