İNDİRGENMİŞ HATA DENKLEMLERİ
VE
ÖNEMLİ UYGULAMALAR

Yazan:Yük.Müh.Yb.Ümit SÜATAÇ

Vasıtalı ölçülerin dengelenmesi hesabında, genel olarak bilinmeyenlere bağlı hata denklemleri kurulduktan sonra, bu denklemlere yaklaşık değerlerin ilâvesi ile değiştirilmiş hata denklemleri elde edilerek, eğer denklemleri linear hale getirmek durumu yoksa, doğrudan doğruya normal denklemlerin kurulmasına ve çözümüne geçilir.

Pratikte, bazı problemlerin hallinde, normal denklemlerin kurulmasından önce mevcut bilinmeyenlerden birini ortadan kaldırmak maksadı ile bir işlem daha yapılabilir. Böylelikle hataların bir noksan bilinmeyen cinsinden ifade edildiği "İndirgenmiş hata denklemleri" elde edilmiş olur. Bu işlemin önemi daha ziyade üç bilinmiyenli problemlerin hallinde ortaya çıkar. Zira indirgenmiş hata denklemleri bir bilinmiyenin ortadan kaldırılmasıile 2 bilinmiyen cinsinden ifadelerdir ve dolayısiyle bu hata denklemlerinden kurulan normal denklemlerin halli de kolaylaşmış olur. Bir bilinmiyenin ortadan kaldırılması işleminde iki ayrı uygulama yolu vardır. Bunlar;

a. Eğer hata denklemlerinin hepsi eşvezinli ve elemine edilecek bilinmeyenin katsayısı bütün hata denklemlerinin her birinde aynı ise "Toplam denklemi yardımı ile indirgeme"

b. Hata denklemleri herhangi bir özelliği olmayan denklemler ise "Schreiber kaidesi, veya diğer bir deyimle, Schreiber denklemi yardımı ile indergeme" metodlarıdır.

TOPLAM DENKLEMİ YARDIMI İLE İNDİRGEME

Eş vezinli hata denklemleri:

$$v_1 = a_1 x + b_1 y + c\ z - l_1$$

$$v_2 = a_2 x + b_2 y + c\ z - l_2$$

....

$$v_n = a_n x + b_n y + c\ z - l_n$$

olduğuna göre görülüyorki z bilinmeyenin katsayısı her hata denkleminde aynıdır.

Hata denklemlerinin her biri taraf tarafa c ile çarpılıp toplandığında eşitliğin ikinci tarafı üçüncü normal denkleme eşit olduğundan sıfıra eşittir.

$$[cv] = [ac]\ x + [bc]\ y + [cc]\ z - [cl] = 0$$

$$[cv] = 0$$

z bilinmiyenin katsayıları her bir hata denkleminde aynı olduğundan $[cv] = 0 = c\,[v]$ ve c katsayısı sıfıra eşit olmadığından $[v] = 0$ olacak demektir. Hata denklemlerinden hataların toplamını teşkil edip 0'a eşitlersek ve bu eşitliğin her iki tarafını hata denklemleri sayısına (n sayısına) bölersek,

$$-\frac{[a]}{n}x - \frac{[b]}{n} - cz + \frac{[l]}{n} = 0$$ denklemini elde etmiş oluruz.

İşte bu denklem "Toplam Denklemi" adı verilen denklemdir ve her bir hata denklemine ilave edildiğinde üçüncü bilinmiyen olan z bilinmiyenini ortadan kaldırır.

Bu durumda;

$$v_1 = \left(a_1 - \frac{[a]}{n}\right)x + \left(b_1 - \frac{[b]}{n}\right)y - \left(l_1 - \frac{[l]}{n}\right)$$

$$v_2 = \left(a_2 - \frac{[a]}{n}\right)x + \left(b_2 - \frac{[b]}{n}\right)y - \left(l_2 - \frac{[l]}{n}\right)$$

....

$$v_n = \left(a_n - \frac{[a]}{n}\right)x + \left(b_n - \frac{[b]}{n}\right)y - \left(l_n - \frac{[l]}{n}\right)$$ veya

$$a'_1 = \left(a_1 - \frac{[a]}{n}\right) \qquad b'_1 = \left(b_1 - \frac{[b]}{n}\right)$$

$$a'_2 = \left(a_2 - \frac{[a]}{n}\right) \qquad b'_2 = \left(b_2 - \frac{[b]}{n}\right)$$

....

$$a'_n = \left(a_n - \frac{[a]}{n}\right) \qquad b'_n = \left(b_n - \frac{[b]}{n}\right)$$ değerleri yerine konursa

$$v_1 = a'_1 x + b'_1 y - l'_1$$

$$v_2 = a'_2 x + b'_2 y - l'_2$$

....

$$v_n = a'_n x + b'_n - l'_n$$ İndirgenmiş hata denklemleri elde edilmiş olur.

Schreiber Denklemi yardımı ile indirgeme:

Hata Denklemleri:

$$v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z \quad - l_1 \quad p_1$$

$$v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z \quad - l_2 \quad p_2$$

....

$$v_n = a_n x + b_n y + c_n z \quad - l_n \quad p_n$$

olduğuna göre görülüyorki üçüncü z bilinmiyenin katsayıları artık birbirine eşit değil ve her bir hata denkleminin vezni de farklıdır. Bu durumda her bir denklem kendi c ve p değerleri ile çarpılıp taraf tarafa toplandığında eşitliğin ikinci tarafı gene normal denklemlerden üçüncüsünün aynı olduğu için sıfıra eşittir.

$$[cvp]=[acp]x+[bcp]y+[ccp]z-[clp]=0$$

Diğer taraftan, hata denklemlerinde indirgemek istediğimiz bilinmiyenleri katsayıları ile birlikte eşitliğin diğer tarafına geçirerek V ile ifade edebileceğimiz yeni hata denklemleri kurabiliriz.

$$v_1 - c_1 z = V_1 = a_1 x + b_1 y - l_1 \quad p_1$$

$$v_2 - c_2 z = V_2 = a_2 x + b_2 y - l_2 \quad p_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n - c_n z = V_n = a_n x + b_n y - l_n \quad p_n$$

Burada V ile ifade edilen yeni hata denklemlerinde z bilinmiyenleri bulunmamasına rağmen bu denklemleri v denklemleri yerine kullanamayız. Zira v denklemlerinde $[pvv]=$ min. şartı vardır. Halbuki $[pVV]$ de henüz bu şart yoktur. Şu halde $[pVV]=$ min. şartını sağlayabilirsek ancak o zaman v denklemleri yerine V denklemlerini kullanabiliriz. Bunun için de v hata denklemlerinin taraf tarafa karelerini alıp p ile çarptıktan sonra toplarsak,

$$(v_1 - c_1 z)^2 \; p_1 = p_1 V_1 V_1$$

$$(v_2 - c_2 z)^2 \; p_2 = p_2 V_2 V_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(v_n - c_n z)^2 \; p_n = p_n V_n V_n$$

$$[pVV]=[pvv]-2[pcv]z+[pcc]z^2$$

elde etmiş oluruz. Bundan evvel $[pcv]=0$ olduğunu gösterdiğimiz için $[pVV]=[pvv]+[pcc]z^2$ dir. Bu durumda hemen görülmektedir ki V hata denklemlerini v hata denklemleri yerine kullanabilmek için bu son eşitlikteki $[pcc]z^2$ terimini yok etmek lâzımdır. Bu da V hata denklemleri içine bir hata denklemi daha ilâvesi ile çözümlenir. Bu hata denklemi vezni,

$$-\frac{1}{[ccp]} \text{ olan } V_{n+1}=[acp]x+[bcp]y-[clp]=-[ccp]z \text{ denklemdir.}$$

özetlemek gerekirse:

Eğer hata denklemleri farklı vezinli ve indirgenmesi istenilen bilinmiyenin katsayıları her bir denklemde farklı ise o zaman bu hata denklemlerinden „p bilinmiyen„ katsayıları ile birlikte çıkarılır ve elde edilen yeni hata denklemlerinde $V_{n+1}=[acp]x+[bcp]y-[clp]$ şeklinde gösterilebileceğimiz "Schreiber denklemi olarak isimlendirilen yeni bir denklem $p_{n+1}=\frac{-1}{[ccp]}$ şartı ile, ilâve edilerek normal denklemlerin kurulmasına geçilir. Yani;

$$v_1 = a_1x + b_1y + c_1z - l_1 \quad p_1$$

$$v_2 = a_2x + b_2y + c_2z - l_2 \quad p_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n = a_nx + b_ny + c_nz - l_n \quad p_n$$ *hata denklemleri yerine*

$$V_1 = a_1x + b_1y \quad -l_1 \quad p_1$$

$$V_2 = a_2x + b_2y \quad -l_2 \quad p_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_n = a_nx + b_ny \quad -l_n \quad p_n$$

$$V_{n+1} = [acp]\,x + [bcp]\,y - [clp] \qquad p_{n+1} = -\frac{1}{[ccp]}$$

Hata denklemlerini kullanmakla aynı sonuca varılır ve dolayısiyle de z bilinmiyeni indirgenmiş olur. Bu konu ile ilgili uygulamalar geodezide bilhassa kestirme problemlerinde ortaya çıkar. Burada sırası ile:

1. Silsile metodu ile açı ölçümü,

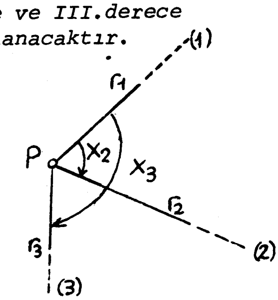
2. Geriden kestirme ile nokta tayini,

3. İlerden kestirme ile nokta tayini,

4. Karışık kestirme ile nokta tayini problemleri üzerinde durulacak ve Harita Genel Müdürlüğü'nce kullanılan II. derece ve III.derece NOKTA DENGELEMESİ FORMLARI üzerindeki uygulamalar açıklanacaktır.

Silsile metodu ile açı ölçümü:

Açıklama:



P noktasından (1) (2) (3) numaralı noktalara bakılarak r_1' r_2' r_3' istikametleri 2 silsile olarak okunmuş olsun.

s= İstikamet adedi = 3

n= Silsile adedi = 2

İstenenler: r_1 r_2 r_3 dengelenmiş istikametler bu istikametlerin ortalama hataları.

Problemin kolaylığı yönünden her silsilenin ilk istikameti "sıfır" olarak kabul edilip 3 istikametin dengelenmesi yerine 2 istikametin dengelenmesi ile hal yoluna gitmek alışılagelmiş bir usuldür. Bu şekilde bilinmiyenler şekilde görüldüğü gibi x_2 ve x_3 olurlar. Bunun dışında her silsilenin bir bütün olarak bir miktar döndürülmesi ve dolayısıyle her silsile için z' ve z" dediğimiz oryantasyon bilinmiyenlerinin de hesap edilmesi gerekir. Başkabir ifade tarzı ile oryantasyon bilinmiyenleri sıfırlanan ilk istikâmetlerin v hata miktarları olarak da ifade edilebilirler. Zira bu ilk istikametlerdeki hata denklemlerinin sabit sayıları (l_1' l_1'') sıfır kâbul edilmiştir.

Bu durumda bilinmiyenlerin adedi her silsile için, biri oryantasyon bilinmiyeni olarak, 3 tane olmuş olur.

Buna göre hata denklemleri:

$$v_1' = \quad -z' - l_1'$$
$$v_2' = x_2 - z' - l'_2$$
$$v_3' = x_3 - z' - l_3'$$

$$v_1'' = - z'' \quad - l_1''$$
$$v_2'' = x_2 - z'' \quad - l_2''$$
$$v_3'' = x_3 - z'' \quad - l_3''$$ ve bu hata denklemlerine Schreiber kaidesini uyguladığımızda:

$$V_1' = \quad - l_1' \qquad p_1' = 1$$
$$V_2' = x_2 - l_2 \qquad p_2' = 1$$
$$V_3' = x_3 - l_3' \qquad p_3' = 1$$
$$V_4' = x_2 + x_3 - l' \qquad p_4' = -1/3$$

I. Silsile

$$V_1'' = \quad -l_1'' \qquad p_1'' = 1$$
$$V_2'' = x_2 \quad -l_2'' \qquad p_2'' = 1$$
$$V_3'' = x_3 \quad -l_3'' \qquad p_3'' = 1$$
$$V_4'' = x_2 + x_3 - [l''] \; p_4'' = -1/3$$

2. Silsile

hata denklemleri elde edilmiş olur. Bu hata denklemlerinde z bilinmiyeni indirgenmiş olduğundan artık normal denklemlerin hesabına geçilebilir ve bu hesap sonunda elde edilen normal denklemler:

$$4/3 \quad x_2 \; -2/3 \quad x_3 - ([l_2] - [l]/3) = 0$$
$$-3/2 \quad x_2 \; +4/3 \quad x_3 - ([l_3] - [l]/3) = 0$$ denklemleridir.

Bu normal denklemleri taraf tarafa topladığımızda l_1' ve l_1'' sıfır oldukları için $[l_2] + [l_3] = [l]$ yazılabileceğinden:

$$2/3 \; x_2 + 2/3 \; x_3 - [l]/3 = 0$$ bulunur ve bu toplam denklemin her bir denkleme ilâvesi ile de,

---

$$x_2 = [l]/2 = [l] / n$$
$$x_3 = [l]/2 = [l] / n$$ hesaplanır. Oryantasyon bilinmiyenleri ise bulunan bu x_2 ve x_3 değerlerinin:

$$[v] = x_2 + x_3 - 3z' - [l] = 0$$
$$[v] = x_2 + x_3 - 3z'' - [l''] = 0$$ Denklemlerinde yerine konması ile hesaplanır.

x_2 ; x_3 ; z'; z'' değerleri hesaplandıktan sonra her bir hata denklemine bu değerler konularak v düzeltme miktarı hesaplanabilmesine rağmen pratikte,

$$v' = (0-l_1') - z' = 0-z'$$
$$v_2' = (x_2-l_2')-z' = d_2'-z'$$
$$v_3' = (x_3-l_3')-z' = d_3'-z'$$
$$v_1'' = (0-l_1'') -z'' = 0 -z''$$
$$v_2'' = (x_2-l_2'')-z'' = d_2''-z''$$
$$v_3'' = (x_3-l_3'')-z'' = d_3-z''$$

(l_1' ve l_1'' sıfır olduklarından d_1' ve d_1'' de sıfır olurlar)

$[v] = 0$ olduğundan

$$[d'] - 3z' = 0 \qquad z' = \frac{[d']}{3} \qquad v_i' = d_i' - \frac{[d']}{3}$$
$$[d''] - 3z'' = 0 \qquad z'' = \frac{[d'']}{3} \qquad v_i'' = d_i'' - \frac{[d'']}{3}$$

formülleri yolu ile hesaplamaya gidilir. Yukarıdaki izah tarzından da anlaşılacağı gibi pratikte işlem sırası şöyledir;

a. Ölçülerin ortalaması alınarak x değerleri hesaplanır. $x = \frac{[l]}{n}$

b. d değerleri hesaplanarak s değerlerine bölünmesi ile z değerleri bulunur.

c. Her d değerinden z değerleri çıkarılarak v ler hesaplanır.

d. Ortalama hatahesabı yapılır.

Ortalama hata hesabında, $m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}}$ formülü, n=ölçü adedi=istikamet sayısı ile silsile adedinin çarpımı ve u=bilinmiyen adedi=istikamet sayısının bir eksiğine silsile sayısı kadar oryantasyon bilinmiyenin ilâvesi olduğundan, $n-u = s.n-((s-1)+n)$ yazılabilir. Buda $(n-1).(s-1)$ şeklinde yazılabileceğinden ortalama hata formülü:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)(s-1)}}$$ ölçülen bir istikametin ortalama hatası

$$m_r = \pm\frac{m}{\sqrt{n}}$$ dengelenmiş bir istikametin ortalama hatası olmuş olur.

Vezin dağılımı tetkik edilmek istendiğinde:

$$[aa]Q_{22} + [ab]Q_{23} = 1$$
$$[ab]Q_{22} + [bb]Q_{23} = 0$$ Q-Faktörleri denklemlerinden

$$\frac{4}{3} Q_{22} - \frac{2}{3} Q_{23} = 1$$

$$- \frac{2}{3} Q_{22} + \frac{4}{3} Q_{23} = 0$$

$$\frac{2}{3} Q_{22} + \frac{2}{3} Q_{23} = 1$$

ve bu son üç denklemden de

$$Q_{22} = 2/2 = 2/n$$

$$Q_{23} = 1/2 = 1/n$$

bulunmuş olur. $p = 1/Q$ olduğuna göre, her bir açının vezni $n/2$ dir. n sayısı da silsile sayısı olduğuna göre görülmektedir ki silsile sayısı arttıkça açıların vezni dolayısıyle hassasiyetleri, doğru orantılı olarak artmaktadır. Aynı zamanda bir istikametin vezni, bağlı olduğu açının vezninin iki katı olduğundan, n olmuş olur. Yani bir istikametin vezni silsile sayısına eşittir ve tabii olarak silsile sayısı arttıkça o istikametin hassasiyeti de doğrusal olarak artar.

SAYISAL ÖRNEK : n=3 : s=3

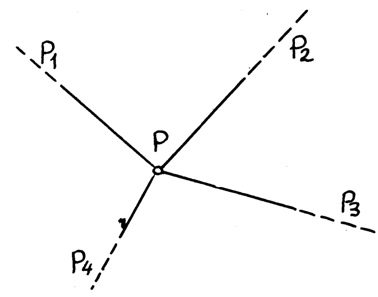
Silsileler (n)	Bak. Nok, (s)	Sıfırlanmış Ortalamalar (l)	Silsileler Ortalaması (x)	d	v	vv	Dengelenmiş Değerler (Kontrol)	
	1	0.0000	0.0000	0	-1	1	399.9999	0.0000
1	2	95.2713	95.2713	0	-1	1	95.2712	95.2713
	3	174.1762	174.1766	+4	+3	9	174.1765	174.1766
				+4	+1			
	1	0.0000		0	+6	36	0.0006	0.0000
11	2	95.2721		-8	-2	4	95.2719	95.2713
	3	174.1776		-10	-4	16	174.1772	174.1766
				-18	0			
	1	0.0000		0	-4	16	399.9996	0.0000
111	2	95.2705		+8	+4	16	95.2709	95.2713
	3	174.1760		+6	+2	4	174.1762	174.1766
				+14	+2	103		

$$m = \pm \sqrt{\frac{103}{4}} = \pm 5,1^{cc}$$

$$m_r = \pm \frac{5,1}{\sqrt{3}} = \pm 3^{cc}$$

Geriden Kestirme ile Nokta Tayini:

Açıklama:



P noktasından p_1 p_2 p_3 p_4 noktalarına r_1 r_2 r_3 r_4 istikametleri ölçülmüş olsun ve p noktasının koordine değerleri istensin. Her ne kadar burada bilinmiyenler x ve y koordine değerleri olarak gözükmekte ise de bundan önceki problemde olduğu gibi burada da bir oryantasyon bilinmiyeni z bulunmaktadır.

Ayrıyeten problemin bir diğer yönü de ölçü değerlerinin açı olmasına rağmen istenenlerin koordine değerleri olmasıdır. Şu halde yapılacak ilk işlem açılardan koordine hesabına geçebilmek için dönüşüm formülleri̇ni ortaya koymaktır.

$$tgt = \frac{y_i - y}{x_i - x} \qquad t = arc.tg \frac{y_i - y}{x_i - x} = f\ (x:y)$$

olduğuna göre ve x y değerleri dx,dy kadar değiştirildiğinde,

$$dt = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$ *yazılabilir, kısmi türevler alınıp yerine konduğunda,*

$$dt = \frac{sint}{s}\rho\ dx - \frac{cost}{s}\rho\ dy$$ *veya* $\underline{dt = a\ dx + b\ dy}$ *elde edilir.*

Burada istikamet katsayıları dediğimiz a ve b yi hesaplayabilmek için formülden de görüldüğü gibi t istikamet açısı ile s mesafelerinin önceden bilinmesi zarureti vardır. Bu da ancak p noktasının koordine değerlerinin bilinmesi ile mümkün olur.

Şu halde başlangıçta yapılacak iş p noktası için geçici koordine değeri hesabı yapmak ve bulunan x_o y_o değerlerinden faydalanarak istikamet katsayılarını hesaplamaktır.

Böylelikle:

$$x = x_0 + dx \qquad y = y_0 + dy \qquad z = z_0 + dz \text{ olacaktir.}$$

Diğer taraftan:

$$r_i + v_i + z = t_i \quad ve \quad t_i = t_0 + dt_i \quad \text{olduguna göre}$$

$$v_i = dt_i - r_i - dz_i - z_0 + t_0 \quad \text{veyahutta}$$

$$v_i = a\ dx + b\ dy - dz_i + t_0 - r_i - z_0 \quad \text{yazılabilir.}$$

$tg\ t_0 = \dfrac{y_i - y_0}{x_i - x_0}$ *ve* $z_0 = \dfrac{[t_0 - r_i]}{n}$ *eşitliklerden t_0 ve z_0 değerleri hesaplanabileceğinden, $-l_i = t_0 - r_i - z_0$ değeri sabit bir sayı olur. Dolayısiyle:*

$$
\begin{array}{l|l}
v_1 = a_1\,dx + b_1\,dy - dz - l_1 & p_1 = 1 \\
v_2 = a_2\,dx + b_2\,dy - dz - l_2 & p_2 = 1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
v_n = a_n\,dx + b_n\,dy - dz - l_n & p_n = 1
\end{array}
$$

Hata denklemleri olmuş olur

Bu hata denklemlerinde dz bilinmiyenin her bir denklemde katsayısı -l ve bütün denklemlerin vezinleri aynı olduğu için artık burada dz bilinmiyenini ortadan kaldırmak için "Toplam denklemini" kullanmak mümkündür. Şu halde indirgenmiş hata denklemleri:

$$v_1 = \left(a_1 - \frac{[a]}{n}\right) dx + \left(b_1 - \frac{[b]}{n}\right) dy - \left(l_1 - \frac{[l]}{n}\right)$$

$$v_2 = \left(a_2 - \frac{[a]}{n}\right) dx + \left(b_2 - \frac{[b]}{n}\right) dy - \left(l_2 - \frac{[l]}{n}\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_n = \left(a_n - \frac{[a]}{n}\right) dx + \left(b_n - \frac{[b]}{n}\right) dy - \left(l_n - \frac{[l]}{n}\right)$$ olmuş olur.

Yalnız burada bir özellik olarak $z_0 = \frac{[t_0 - r_i]}{n}$ *formülünden hesaplandığı ve*

$$- l_i = t_0 - r_i - z_0 \quad \text{olduğu için,}$$

$$nz_0 - [z_0 - l_i] = nz_0 - [l] \text{ ve dolayısıyle } [l] = 0 \text{ olur.}$$

$$l_i = \left(l_i - \frac{[l]}{n}\right)$$ *olduğuna göre, buradan da* $l'_i = l_i$ *bulunmuş olur. Buna göre indirgenmiş hata denklemlerinin son şekli:*

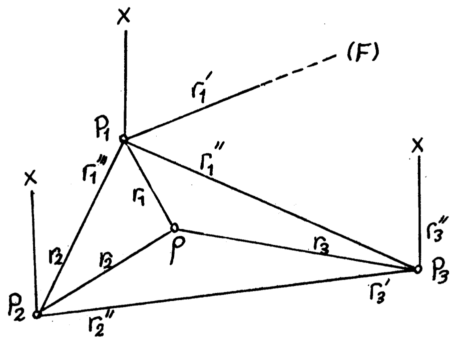
$$
\begin{array}{l|l}
v_1 = a'_1\,dx + b'_1\,dy - l_1 & p_1 = 1 \\
v_2 = a'_2\,dx + b'_2\,dy - l_2 & p_2 = 1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
v_n = a'_n\,dx + b'_n\,dy - l_n & p_n = 1
\end{array}
$$

olarak ifade edilebilır.

__İlerde Kestirme ile nokta tayini :__

Açıklama :

P noktasının koordine değerleri p_1 p_2 p_3 noktalarından yapılan ölçüler vasıtasiyle hesaplanmak istenmektedir. Her bir noktadan yapılan ölçülerden yalnız bir tanesi koordine değerleri hesaplamak istenen noktaya, diğerleri ise koordine değerleri belli noktalara yapılan ölçülerdir. Buna göre p_1 noktasından 3 belli noktaya p_2 noktasından ve p_3 noktasından da 2 belli noktaya ölçü yapılmış olup bunlar r'_i r''_i olarak gösterilmişlerdir.



Koordinesi hesaplanmak istenen noktaya yapılan ölçüler ise r_i lerdir. Bundan önceki geriden kestirme probleminde de görüldüğü gibi, burada da her istasyon kurulan noktada bir oryantasyon bilinmiyeni vardır. Şu halde bu problemi çözmek için yapılacak ilk işlem z^o_1 z^o_2 z^o_3 olarak gösterilen bu oryantasyon bilinmiyenlerinin hesaplanmasıdır.

Geriden kestirme probleminde oryantasyon bilinmiyeni, istasyon kurulan ve koordine değerleri belli olmayan p noktasında olmasına rağmen ilerden kestirme probleminde bu bilinmiyenler koordine değerleri belli noktalarda olduğu için z_o oryantasyon bilinmiyeni yerine z^o_1 kati oryantasyon bilinmiyenin hesaplanması mümkündür.

Zira burada istikamet açıları t_i ler koordine değerlerinden hesaplanabilirler.

Buna göre $z^o_i = \frac{[t_i - r_i]}{k_i}$ *olmuş olur. (K_i belli bir noktadan bakılan diğer belli noktaların sayısı)*

Buna göre hata denklemleri, örneğin p_1 noktası için;

$r'_1+v'_1+z_1 = t'_1$ veya $v'_1 = t'_1 - r'_1 - z^o_1 - dz_1$

$r''_1+v''_1+z_1 = t''_1$ veya $v''_1 = t''_1 - r''_1 - z^0_1 - dz_1$

$r'''_1+v'''_1+z_1=t'''_1$ veya $v'''_1= t'''_1- r'''_1- z^0_1- dz_1$

$r_1+v_1+z_1 = t_1$ veya $v_1 = t_1 - r_1 - z^0_1- dz_1$ olur.

Bu hata denklemlerinden de hemen görüldüğü gibi p_1 noktasından diğer koordine değerleri belli olan noktalara olan istikamet açıları t'_1 t''_1 ve t'''_1 nün hesaplanabilmesine rağmen t_1 koordine değerleri hesaplanmak istenen p noktasına olan istikamet açısı kat'i olarak hesaplanamaz. Şu halde bu değer yerine yaklaşık değerinin kullanılması gerekir. İşte ilerden kestirme probleminde, yalnız dönüşüm formüllerini kurabilmek için, gene de p noktasının yaklaşık koordine değerlerinin hesaplanması gereklidir. Buna göre;

$t_1 = t^0_1+dt_1 = t^0_1 + a_1\, dx+b_1\, dy$ | $(tg\, t^0_1 = \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1})$ ve

$$- l'_1 = t'_1 - r'_1 - z^0_1$$
$$- l''_1 = t''_1 - r''_1 - z^0$$
$$- l'''_1 = t'''_1 - r'''_1 - z^0_1$$
$$- l_1 = t^0_1 - r_1 - z^0_1$$

Denklemleri yukarıdaki hata denklemlerinde yerine konduğunda,

$$v'_1 = -dz_1 - l'_1$$
$$v''_1 = -dz_1 - l''_1$$
$$v'''_1 = -dz_1 - l'''_1$$
$$v_1 = a_1\, dx + b_1\, dy - dz_1 - l_1$$

değiştirilmiş hata denklemleri elde edilmiş olur.

Bu denklemlere Schreiber kaidesini uygularsak;

$$\begin{array}{l|l} v'_1 + dz_1 = V'_1 = -l'_1 & p_1 = 1 \\ v''_1 + dz_1 = V''_1 = -l''_1 & p_1 = 1 \\ v'''_1 + dz_1 = V'''_1 = -l'''_1 & p_1 = 1 \\ v_1 + dz_1 = V_1 = a_1\, dx\ b_1\, dy - l_1 & p_1 = 1 \\ \hline [v_1] + 4dz_1 = V_1 = a_1 dx + b_1 dy - [l_1] & p = -\tfrac{1}{4}\ (p\ 1/k_1 + 1) \end{array}$$

Burada, Schreiber denklemine de V_1 denilmesinin sebebini açıklamak gerekirse görülüyorki:

$$z^0_1 = \frac{[t_1 - r_1]}{k_1}\ t'_1 - r'_1 + t''_1 - r''_1 + t'''_1 - r'''_1 = k_1\, z^0_1 \text{ ve}$$

$$- l'_1 = t'_1 - r'_1 - z^0_1$$
$$- l''_1 = t''_1 - r''_1 - z^0_1$$
$$- l'''_1 = t'''_1 - r'''_1 - z^0_1$$

Denklemlerinden faydalanılarak

$$-l'_1 - l''_1 - l'''_1 = t'_1 + t''_1 + t'''_1 - (r'_1 + r''_1 + r'''_1) - k_1\, z^0_1 \text{ ve buradanda}$$

$$-l'_1 - l''_1 - l'''_1 = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda $[l_1] = l_1$ dir ve Schreiber denklemi son dördüncü hata denklemi ile tamamen aynıdır. Diğer taraftan $-l'_1 - l''_1 - l'''_1 = 0$ olduğundan da ilk üç hata denkleminin dengeleme hesabında hiçbir fonksiyonu kalmamış olur.

Geriye kalan:

$$\begin{array}{l|l} V_1 = a_1\, dx + b_1\, dy - l_1 & p_1 = 1 \\ V_1 = a_1\, dx + b_1\, dy - l_1 & p = \tfrac{1}{4} \end{array}$$

denklemlerinin ise vezinleri hariç hiçbir farkları yoktur. Bu durumda bu iki denklem yerine;

$V_1 = a_1\, dx + b_1\, dy - l_1 \,|\, p_1 = k_1/k_1+1 = 3/4$ denklemini kullanabiliriz. ($p_1 = 1 - 1/4 = 3/4$). Buna göre normal denklemlerin kurulmasında kullanılacak Schreiber kaidesine göre indirgenmiş hata denklemlerinin tümü;

$$\begin{array}{l|ll}
V_1 = a_1\, dx + b_1\, dy - l_1 & p_1 = 3/4 & (k_1=3) \\
V_2 = a_2\, dx + b_2\, dy - l_2 & p_2 = 2/3 & (k_2=2) \\
V_3 = a_3\, dx + b_3\, dy - l_3 & p_3 = 2/3 & (k_3=2)
\end{array}$$

olmuş olur.

Normal denklemler kurulup çözüldükten sonra V_i ler hesaplanınca,

$\dfrac{V_1}{-k_1+1} = dz_1$, $\dfrac{V_2}{k_2+1} = dz_2$ $\dfrac{V_3}{k_3+1} = dz_3$ formüllerinden üçüncü bilinmiyenler hesaplanır. ($[v_i] = 0$ ve $[v_i] + (k_i + 1)\, dz_i = V_i$ den)

$V_i = v_i + dz_1$ eşitliğinden v_i lerin hesaplanmasından sonra hata hesabına geçilir. Ölçü sayısı, her alet kurulan noktada bakılan sabit nokta sayıları ile koordinesi belli olmayan noktaya yapılan ölçülerin toplamıdır.

$(k_1+k_2+k_3+n)$ Bilinmiyen adedi ise her alet kurulan noktadaki oryantasyon bilinmiyenleri ile koordine değerleri aranan noktanın x ve y değerleri olmak üzere (n+2) dir. Buna göre fazla ölçü adedi ise: $k_1+k_2+k_3 - 2 = k_i - 2$ olmuş olur. Veya bir istikâmetin ortalama hatası:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{[k_i] - 2}}$$

olarak ifade edilebilir.

Pratikte ilerden kestirme ile nokta tayini probleminde iş sırasını tekrarlamak gerekirse:

a. $z_i^0 = \dfrac{[t_i - r_i]}{k_i}$ formülünden oryantasyon bilinmiyenlerinin hesaplanması,

b. $\alpha = r_i + z_i$ formülünden geçici istikamet açılarının hesaplanması,

c. x_0 ve y_0 in hesabı ile $tg\, t_{ip}^0 = \dfrac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$ eşitliğinden

t_{ip}^0 ve dolayısıyle t_{pi}^0 ların hesabı,

d. $a_i = \dfrac{\sin t^0_{pi}}{s_i}\rho$ $b_i = \dfrac{\sin t^0_{pi}}{s_i}\rho$ eşitliklerinden hata denklemleri katsayılarının hesabı,

e. $-l_i = t_{pl}^0 - (\alpha \pm 200^g)$ sabit degerlerinin hesabı,

f. $\dfrac{k_i}{k_i + 1}$ vezinlerini kullanarak hata denklemlerinden normal denklemlerin kurulması ve çözümü,

g. Hata hesabı, olarak sıralanabilir.

Karışık Nokta Tayini :

Karışık kestirme, birtek problemin içinde aynı zamanda ilerden ve geriden kestirme problemlerinin çözümlendiği bir nokta tayin metodu olduğuna ve bundan önce bu iki problem de incelendiğine göre burada yalnızca bu iki metod üzerine kurulmuş hata denklemlerinin birleştirilmesi ele alınacaktır.

İlerden kestirme hata denklemleri : (Dış istikâmetler)

$$\begin{array}{l|l}
V_1 = a_1\,dx + b_1\,dy - l_1 & p_1 = k_1 / k_1 + 1 \\
V_2 = a_2\,dx + b_2\,dy - l_2 & p_2 = k_2 / k_2 + 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
V_n = a_n\,dx + b_n\,dy - l_n & p_n = k_n / k_n + 1
\end{array}$$

Geriden kestirme hata denklemleri: (İç istikâmetler)

$$\begin{array}{ll|l}
V'_1 = a_1\,dx + b_1\,dy - dz & -l_1 & p'_1 = 1 \\
V'_2 = a_2\,dx + b_2\,dy - dz & -l'_2 & p'_2 = 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
V'_n = a_n\,dx + b_n\,dy - dz & -l'_n & p'_n = 1
\end{array}$$

olduğuna göre bu hata denklemlerinden faydalanarak normal denklemleri kurabilmek için farklı çözüm yolları vardır. Bunlardan birisi, vezinleri her iki gurup hata denklemlerinden de 1 yapıp bilahare "Toplam denklemin yardımı ile" geriden kestirme hata denklemlerinden dz bilinmiyenini elemine ederek normal denklemlere geçmek yoludur.

Bunun için ilerden kestirme hata denklemlerinin her biri kendi vezninin karekökü ile çarpılarak vezinleri bir yapılmış olur.

$v_i = x - l_i$ kabul edildiginde,

$v_i \sqrt{p_i} = x\sqrt{p_i} - l_i\sqrt{p_i}$ dir. $l_i\sqrt{p_i} = L$ denildiginde,

$$\frac{1}{p_L} = \frac{\sqrt{p_i^2}}{p_i} = 1$$ yani $p_L = 1$ olmuş olur.

Diğer bir yol ise Schreiber'in öngördüğü bir yoldur. Buna göre Schreiber dış ve iç istikametler için ayrı ayrı yazılan hata denklemlerini birleştirmiştir. Dış rasatlardan elde edilen istikamet açılarına $\pm$ 200 g ilâvesiyle içten dışa olan istikamet açılarını hesaplamış bilahare bu istikamet açıları ile içten ölçülen rasatlara elde edilen istikâmet açılarını birleştirmiştir.

Burada önemli konu, Schreiber'in iç istikametler için vezni 2/3 ve dış istikametler için de 1/3 kabul etmiş olmasıdır. Böylelikle hem iç hemde dış rasadı yapılmış istikametlerin vezni 1 olmaktadır. $(1/3+\frac{2}{3}=1)$

Harita Genel Müdürlüğündeki uygulamalar :

a. lll. derece nokta dengelemesi,

lll. derece nokta dengelemesi Harita Genel Müdürlüğünde bir form dahilinde yürütülür. Bu formda kullanılan işeretleri bundan önceki açıklamalar ile karşılaştırırsak;

Özelliği	Açıklamada	Formda
Dış istikametler	t	t_2
İç istikametler	r	t_1
Bilinmiyen noktadan bilinen noktalara yaklaşık istikametler	t_0	k
Yaklaşık oryantasyon bilinmiyeni	z_0	z_0
Yaklaşık oryantasyon yapılmış iç istikametler	$r + z_0$	$t' = t_1 + z_0$
Hata denklemleri sabit sayıları	-1	-1

olduğunu görürüz.

Bu formda kullanılan metod Schreiber'in öngördüğü metoddur ve bundan önce açıklandığı gibi Schreiber dış istikâmetler için 1/3 ve iç istikâmetler için de 2/3 veznini III.derece nokta dengelemesi için yeterli görmüştür.

dz üçüncü bilinmiyeni gene Schreiber denklemi yardımı ile indirgenmiştir. ve bu denklemin vezni ise şöyle hesaplanmıştır.

dz bilinmiyenin bulunduğu hata denklemleri vezinleri 2/3 olan iç istikamet hata denklemleri olduğuna göre,

$$-\frac{1}{[ccp]} = -\frac{1}{[p]} = -\frac{1}{pN} = -\frac{1}{2/3N} \quad (c_1 = c_2 = \dots\dots\dots c = 1)$$

N = İç istikamet sayısı olmuş olur. Bu durumda Schreiber denkleminin katsayıları ise $[acp] = 2/3\ [a]$ $[bcp] = 2/3\ [b]$ olmaktadır. Burada ortak olan 2/3 katsayısını ortadan kaldırabilmek için normal denklemlerin katsayıları alınırken bu denklemin katsayılarının da karesi alındığından bu denklemin veznini $(2/3)^2 = 4/9$ ile çarpmak gerekir. Böylelikle Schreiber denkleminin vezni $4/9\ (-1/pN) = 4/9\ (-3/2N) = -2/3N$ olmuş olur. Örneğin iç istikamet sayısı $N = 4$ olduğuna göre Schreiber denkleminin vezni $-1/6$ olmuş olur.

Schreiber denkleminin katsayıları ise artık $[a]$, $[b]$ dır.

$$\begin{array}{l|l}
V'_1 = a_1\, dx + b_1\, dy - dz - l'_1 & p'_1 = 2/3 \\
V'_2 = a_2\, dx + b_2\, dy - dz - l'_2 & p'_2 = 2/3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
V_n = a_n\, dx + b_n\, dy - dz - l'_n & p'_n = 2/3 \\
\hline
\end{array}$$

Schreiber Denklemi

$$V' = \frac{2}{3}[a]dx + \frac{2}{3}[b]dy - \frac{2}{3}[l] \qquad p = \frac{-1}{2/3N}$$

veya

$$= [a]\, dx + [b]\, dy - [l] \qquad p = -\frac{2}{3N}$$

Diğer taraftan;

$$z_0 = \frac{[t_0 - r_i]}{n} \qquad z_0 = \frac{[k_i - t_{li}]}{n}$$

$$-l_i = t^0 - r_i - z_0 \qquad -l_i = k_i - t_{li} - z_0$$

$$z_0 = \frac{[z_0 - li]}{n} \qquad z_0 = \frac{[z_0 - li]}{n}$$

$$n.z_0 = n.z_0 - [li] \qquad n.z_0 = n.z_0 - [li]$$

$$[li] = 0 \qquad [li] = 0$$

olduğundan Schreiber denkleminin sabit sayısı sıfır olmuş olur. Yani Schreiber denklemi;

$$V' = [a]\, dx + [b]\, dy \quad \Big| \quad p' = -\frac{2}{3N} \quad \text{dir.}$$

Birleştirilmiş hata denklemlerinin sabit sayıları ise,

$$\begin{array}{l|l}
V'_i = a_i\, dx + b_1\, dy - l_i & p = \frac{1}{3} \\
V'_i = a_1\, dx + b_i\, dy - l'_i & p'_i = \frac{2}{3}
\end{array}$$

$$V_i = a_i\, dx + b_i\, dy - \frac{1/3\ l_i \quad 2/3\ l'_i}{1/3 + 2/3} \quad \text{veya}$$

$$V_i = a_i\, dx + b_i\, dy - \frac{l_i + 2l_i}{3} \quad \text{olarak gösterilebileceğinden}$$

$$t = \frac{t_2 + 2t'}{3}$$ formülden başlangıçta t istikametleri hesaplanarak,

$$-l_i = k_i - t_{li} - z_0 = k_i - t' \quad \text{yerine}$$

$$-l_i = k_i - t_i \quad \text{olmaktadır.}$$

SAYISAL ÖRNEK :

Hesaplanan k değerleri :

264168,65
1531125,55
2264868,15
2766400,69

Düz semtler		İrca edilmiş	Ortalama
Dış t_2	İç t_1	$t_1 + z_0 = t'$	t $(t_2 + 2t')/3$
169,82	180,82	178,51	175,61
131,29	132,18	129,17	130,34
868,72	874,61	872,30	871,11
402,42	384,66	382,35	389,04

$[t_1] = 1572{,}27$

$[k] = 1563{,}04$

$[k] - [t_1] = -9{,}23$

$$z_0 = \frac{[k] - [t_1]}{n} = -2{,}31$$

Hata Denklemleri

a	b	-l=k-t	
+ 29,79	- 67,62	-6,69	
+ 54,24	+ 69,82	-4,79	
- 19,14	+ 43,32	-2,96	
- 38,11	+ 14,65	+11,65	
+ 26,78	+ 50,17		(Toplam 1)

Normal Denklemlerin Hesabi

Paa	pab	-pal	pbb	-pbl	
887,44	- 2014,40	- 207,34	4572,46	+ 470,64	
2941,98	+ 3244,64	- 259,81	3578,43	- 286,54	
366,34	- 829,14	+ 56,65	1876,62	- 128,33	
1452,37	- 558,31	- 443,98	214,62	+ 170,67	
717,17	1343,55	0	2517,03	0	$(\text{Toplam } 1)^2$
5648,13	- 157,21	- 854,48	10242,13	+ 226,54	(Toplam 2)
- 119,53	- 223,92	0	- 419,51	0	$(\text{Top.}1)^2 \; (-\frac{2}{3N})$
5528,60	- 381,13	- 854,48	+9822,62	+ 226,54	

Normal denklemlerin katsayıları olmuş olur.

(Toplam 1) $= [a]$; $[b]$

$(\text{Toplam } 1)^2 = [a]^2$; $[a][b]$; $[b]^2$

$$(\text{Toplam } 2) = [paa] \; ; \; [pab] ; \; [-pal] \; ; \; [pbb] \quad [-pbl]$$

$$(\text{Top } 1)^2 \; \left(-\frac{2}{3N}\right) = -\frac{[a]^2}{6} \; ; \; -\frac{[a][b]}{6} \; ; \; -\frac{[b]^2}{6}$$

$$\text{Nor.Denk.} \; \left([paa] - \frac{[a]^2}{6}\right) \; ; \; \left([pab] - \frac{[a][b]}{6}\right); \; ([-pal]);$$

$$\left([pbb] - \frac{[b]^2}{6}\right);([-pbl])$$

<u>*b.11.Derece Nokta Dengelemesi :*</u>

II.Derece nokta dengelemesi vezinler $p = \frac{k}{k+1}$ *esasına göre formlaştırılmıştır. Yalnız burada bakılan koordine değerleri belli nokta sayısı olan k sayısı 1 olarak sınırlandırıldığından dış istikametlerin vezni 1/2 ve iç istikametlerin vezni de 1 olmaktadır.*

dz bilinmiyenin indirgenmesi toplam kaidesine göre yapıldığından toplam denklemi:

$$V = [a] \; dx + [b] \; dy - [l] \; \text{olur.}$$

Normal olarak dz bilinmiyenin indirgenmesi yapıldıktan sonra toplam denklemi hariç iç ve dış istikametler hata denklemlerine bakılacak olursa, bunların vezinleri 1/2 ve 1 olan sabit sayıları farklı fakat katsayıları aynı denklemler olduğu görülür.II.derece nokta dengelemesi formunda iç istikâmetler dış istikâmetlere oranla 2 misli hassas kabul edildiğine göre ilk önce dış istikametlerin hata denklemleri ise 2 ile çarpılır ve sonra toplanır.

Böylelikle vezinler:

/1, iç istikametlerin hata denklemleri

$$V_i = a_i \; dx + b_i \; dy - l_i \qquad p_i = 1/2$$

$$V'_i = a_i \; dx + b_i \; dy - l'_i \qquad p'_i = 1$$

$$V_i = a_i \; dx + b_i \; dy - l_i \qquad p_i = 1/2$$

$$V'_i = 2a_i \; dx + 2b_i \; dy - 2l'_i \qquad p'_i = 1/4$$

$$V_i = 3a_i \; dx + 3b_i \; dy - (l_i + 2l'_i) \qquad p_i = 1/6 \qquad \text{olmuş olur.}$$

$$\left(\frac{1}{p_i} = \frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/4} = 6\right) \; \left(\frac{1}{p_i} = \frac{1}{6}\right) \quad \text{eşitliğinden. Veya}$$

bu işlemin dengelemedeki matematiksel izahının yapılması gerekirse;

$$[aap] = [a'_i \; a'_i \; p_i] + [a_i \; a_i \; p'_i] = [aa] \; (p_i + p'_i) = 3/2 \; [aa]$$

olması lâzım gelirken formda öngörülen yolla yapılarak elde edilen toplam $AA : [AA] = [((1+2) \; a_i)^2] = [9 \; a_i \; a_i] = 9 \, [aa]$ *olmuş olur.*

Buradan;

$$[aa] = \frac{[AA]}{9} \quad \text{yukarıda yerine konursa}$$

$$[aap] = \frac{3}{2} \; \frac{[AA]}{9} = \frac{1}{6} [AA] \; \text{olacağı ortaya çıkar.}$$

Şu halde [AA] elde edildikten sonra bunun $\frac{1}{6}$ ile çarpılmasından sonra elde edilen değerlere, toplam denkleminde gereken işlem yapıldıktan sonra ilâvesi gerekir. Toplam denklemleri ise yukarıda belirtildiği gibi,

$$[a]\,dx + [b]\,dy - [1]\,p = \frac{1}{N}$$

olduğuna göre, bu denklemi kurmak için [a] , [b] ve [1] ler teşkil edilecek bilahare bunların kareleri alınacak ve -1/N ile çarpıldıktan sonra ilave işlemi yapılacaktır.

Böylelikle esas normal denklemlerin katsayıları bulunmuş olacaktır.

<u>SAYISAL ÖRNEK :</u>

a	b	-1		
+ 28,134	+ 9,592	+ 0,831	p = 1	
+ 41,309	- 38,774	+ 2,271	p = 1	
- 27,608	+ 21,028	+ 1,948	p = 1	
- 41,589	- 7,584	- 9,739	p = 1	iç istikametler
+ 28,134	+ 9,592	- 0,077	p = 1/2	
+ 41,309	+ 38,774	- 3,947	p = 1/2	
- 27,608	+ 21,028	+ 3,342	p = 1/2	Dış istikametler
- 41,598	- 7,584	- 4,005	p = 1/2	
+ 84,402	+ 28,776	+ 1,585	p = 1/6	
+123,927	-116,322	+ 0,595	p = 1/6	
- 82,824	+ 63,084	+ 7,238	p = 1/6	(2 iç+1 Dış)
+124,794	- 22,752	- 23,483	p = 1/6	
[a]	[b]	[-1]		
+ 0,237	- 15,738	- 4,687	Toplam denklemi	

AA	AB	-AL	BB	BL	
+ 7123,70	+ 2428,75	+ 133,78	+ 828,06	+ 45,61	
+ 15357,90	- 14415,44	+ 73,74	+13530,81	- 69,21	
+ 6859,81	- 5224,87	- 599,48	+ 3979,59	+456,60	
+ 15573,54	+ 2839,31	+ 2930,54	+ 517,65	+534,28	
+ 44914,95	- 14372,25	+ 2538,58	+18856,11	+947,28	(Toplam 1
+ 0,06	- 3,73	- 1,11	+ 247,68	+ 73,76	(Toplam 2
+ 7485,83	- 2359,38	+ 423,09	+ 3142,69	+161,21	1/6(Top.1
- 0,02	+ 0,93	+ 0,29	- 61,92	- 18,44-	1/4(Top.2
+ 7485,81	- 2394,45	+ 423,38	+ 3080,77	+142,77	Normal

denklemlerin katsayıları olmuş olur.

(Toplam 1) [AA] ; [AB] ; [-AL] ; [BB] ; [-BL]

(Toplam 2) $[a]^2$; [a] ; [b] ; [a] [-1];

$[b]^2$; [b] [-1]

Nor.Denk. Katsayıları $\left(\frac{[AA]}{6} - \frac{[a]^2}{4}\right); \left(\frac{[AB]}{6} - \frac{[a][b]}{4}\right)$

$$\left(\frac{[-AL]}{6} - \frac{[a][-1]}{4}\right);\left(\frac{[BB]}{6} - \frac{[b]^2}{4}\right)$$

$$\left(\frac{[-BL]}{6} - \frac{[b][-1]}{4}\right)$$

<u>*Diğer Tipler :*</u>

II. Derece nokta dengelemesi;

a. İç ve dış istikâmetlerin sayısı aynı ise:

Birleştirilmiş hata denklemlerinin vezni	*1/6*
Toplam denkleminin vezni	*- 1/N*

b. İç istikâmet sayısı dış istikâmet sayısından noksan ise:

Birleştirilmiş hata denklemlerinden müşterek olan her bir hata denkleminin vezni	*1/6*
Fazla olan dış istikâmetlere ait hata denklemlerinin vezni	*-1/2*
Toplam denklemlerinin vezni	*- 1/N*

c. Dış istikâmet sayısı iç istikâmet sayısından noksan ise:

Birleştirilmiş hata denklemlerinden müşterek olan her bir hata denkleminin vezni	*1/6*
Fazla olan iç istikâmetlere ait hata denklemlerinin vezni	*1/4*
Toplam denkleminin vezni	*1/N*

Kaba örnekler :

a.

a	b	p	
4	3	1/2	
2	1	1/2	DIŞ
3	3	1/2	
2	2	1/2	
4	3	1	
2	1	1	
3	3	1	İÇ
2	2	1	

Hata denklemleri :

12	9	1/6
6	3	1/6
9	9	1/6
6	6	1/6
11	9	-1/4

b.

a	b	p	
4	3	1/2	
2	1	1/2	
3	3	1/2	DIŞ
2	2	1/2	

4	3	1	
2	1	1	İÇ
3	3	1	
-	-	-	

Hata denklemleri :

12	9	1/6
6	3	1/6
9	9	1/6
2	2	1/2
9	7	- 1/3

c.

a	b	p	
4	3	1/2	
2	1	1/2	DIŞ
3	3	1/2	
-	-	-	
4	3	1	
2	1	1	
3	3	1	İÇ
2	2	1	

Hata deklemleri :

12	9	1/6	12	9	1/6
6	3	1/6	6	3	1/6
9	9	1/6	9	9	1/6
4	4	1/4	(veya)2	2	1/1
11	9	-1/4	11	9	-1/4

III. Derece nokta dengelemesi;

a. İç ve dış istikametlerin sayısı aynı ise:
Birleştirilmiş hata denklemlerinin vezni 1
Schreiber denkleminin vezni -2/3N

b. İç istikâmet sayısı dış istikamet sayısından noksan ise:
Birleştirilmiş hata denklemlerinden müşterek olan her bir hata denkleminin vezni 1
Fazla olan dış istikametlere ait hata denklemlerinin vezni 1/3
Schreiber denkleminin vezni - 2/3N

c. Dış istikâmet sayısı iç istikamet sayısından noksan ise:
Birleştirilmiş hata denklemlerinden müşterek olan her bir hata denkleminin vezni 1
Fazla olan iç istikametlere ait hata denklemlerinin vezni 2/3
Schreiber denkleminin vezni -2/3N

Kaba örnekler :

a	b	p	
4	3	1/3	
2	1	1/3	DIŞ
3	3	1/3	
2	2	1/3	
4	3	2/3	
2	1	2/3	İÇ
3	3	2/3	
2	2	2/3	

Hata denklemleri :

4	3	1
2	1	1
3	3	1
2	2	1
11	9	- 1/6

b.

a	b	p	
4	3	1/3	
2	1	1/3	DIŞ
3	3	1/3	
2	2	1/3	
4	3	2/3	
2	1	2/3	İÇ
3	3	2/3	
-	-	-	

Hata denklemleri :

4	3	1
2	1	1
3	3	1
2	2	1/3
9	7	- 2/9

c .

a	b	p	
4	3	1/3	
2	1	1/3	DIŞ
3	3	1/3	
-	-	-	
4	3	2/3	
2	1	2/3	
3	3	2/3	İÇ
2	2	2/3	

Hata denklemleri :

4	3	1
2	1	1
3	3	1
2	2	2/3
11	9	- 1/6