HİLBERT UZAYLARINDA DOLAYLI ÖLÇÜLER EN KÜÇÜK KARELER DENGELEMESİ VE EN KÜÇÜK KARELERLE KOLOKASYON (TAM) ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Emin AYHAN

ÖZET

Jeodezinin klasik yöntemlerinden olan dolaylı ölçüler en küçük kareler dengelemesi ile son yirmi yıldır jeodezide uygulanan en küçük karelerle kolokasyon (tam) arasındaki ilişkiler Hilbert uzaylarında ele alınmakta, en iyi yaklaşımın Hilbert uzaylarındaki tanımı olan izdüşüm teoremiyle dengeleme ve kolokasyonun minimum norm koşulunu sağlayan çözümleri gösterilmektedir. Dengeleme ve kolokasyon arasındaki temel farkın, çözümün yapıldığı Hilbert uzaylarının farklı özellikte olmalarından kaynaklandığı sergilenmektedir.

SUMMARY

Theoretical relationships between parametric least squares adjustment which is one of the classical methods of Geodesy and least squares collocation that is used in Geodesy during last two decades are investigated in Hilbert Spaces. The solutions, satisfy minimum norm condition, for adjustment and collocation are derived by using the projection theorem that is the definition of the best approximation in Hilbert Spaces. It is also shown that the main difference between adjustment and collocation is caused by the definition of Hilbert Spaces which used in derivations.

1. GİRİŞ

En küçük karelerle dengeleme 19 ncu yüzyıl başlarında jeodezide ve diğer disiplinlerde kullanılmasına karşılık, en küçük karelerle kolokasyonun jeodezik uygulamaları çok yeni olup ilk kez Krarup (1969)'da fonksiyonel analiz kavram ve yöntemleri ile bir açıklaması verilmiştir. Daha sonra birçok araştırmacının çabası sonucu jeodezideki hemen her problemin çözümünde en küçük karelerle kolokasyon uygulanır duruma gelmiştir.

Bu çalışmada dengeleme ve kolokasyon arasında bilinen ilişkilerin belirgin hale getirilmesi amaçlanmakta, gerek dengelemenin gerekse kolokasyonun, farklı özellikteki Hilbert uzaylarında izdüşüm teoreminin birer uygulaması olduğu gösterilmektedir.

İşlemler Hilbert uzaylarında yürütüldüğünden, ikinci bölümde Hilbert uzaylarının temel özellikleri verilmekte ve bundan yararlanarak izdüşüm teoremi açıklanmaktadır. Üçüncü bölümde dolaylı ölçüler en küçük kareler dengelemesinin Hilbert uzaylarında çözümü yapılmakta ve dördüncü bölümde en küçük karelerle kolokasyon (TAM) Hilbert uzaylarında çözülmektedir. Çalışma içinde tam kolokasyondan, kolokasyon diye söz edilecektir.

2. HİLBERT UZAYLARI VE İZDÜŞÜM TEOREMİ

Ek özelliklerin tanımlandığı doğrusal uzayların özel bir alt bölümü olan Hilbert uzayları tam iç çarpım uzaylarına karşılık gelir. Bu nedenle öncelikle doğrusal uzaylar tanımlanacak ve daha sonra Hilbert uzayları temel özellikleri ile ele alınacaktır.

Bir X kümesinin x,y,z,... elemanları (nokta, vektör, fonksiyon) arasında toplama ve bir skaler ile çarpım işlemleri tanımlı ise X kümesine doğrusal uzay (vektör uzay) adı verilir.

X doğrusal uzayında tanımlı toplama ve skaler ile çarpım işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlar (Davis, 1975) ;

$x + y = y + x$	Değişim
$x + (y+z) = (x+y) + z$	Birleşim
$x' + 0 = x \quad 0 \in X, \quad x \in X$	Toplamada Etkisiz Eleman
$x + (-x) = 0$	Toplamada Ters Eleman
$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \alpha,\beta \in R$	
$\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$	Dağılım
$(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$	
$1(x) = x$	Çarpmada Etkisiz Eleman
$x.x^{-1} = 1$	Çarpmada Ters Eleman

R gerçek sayılar kümesi olmak üzere $\alpha_i \in R$ ve $0,x_i \in X$, $i=1,2,...,n$ için x_i lerin doğrusal kombinasyonu ile oluşturulan

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

eşitliği $\alpha_i = 0$ koşulu için sağlanıyorsa x_i elemanları doğrusal bağımsızdır ve X uzayı n-boyutludur denir.

Bu durumda $\{ x_i \in X, i=1,2,...,n \}$ kümesi X doğrusal uzayının bir tabanıdır ve taban cinsinden X uzayı,

$$X = \text{span} (x_1, x_2, ..., x_n) \quad (2.1)$$

ile gösterilir.

X gerçek doğrusal uzayında $x,y \in X$ eleman çiftine

$$(x,y) \in R$$

ile gösterilen skaler bir sayı karşılık getiren fonksiyona İç Çarpım ve X uzayına da İç Çarpım Uzayı denir.

İç çarpım uzayında

$$\| x \| = \sqrt{(x,x)}$$

ile tanımlanan fonksiyon ise norm olarak bilinir.

X iç çarpım uzayında Cauchy anlamında yakınsaklık varsa X uzayı Tam İç Çarpım Uzayı veya Hilbert Uzayı olarak isimlendirilir.

Hilbert uzaylarında iç çarpım ;

$$(x,y) = x^T Gy \quad (2.2)$$

eşitliğinde olduğu gibi bir kare, simetrik, pozitif definit G matrisi ile tanımlanır. Bu özellik Hilbert uzaylarındaki işlemlerin matrislerle gösterilme olanağını sağlar.

X'in bir Ω altuzayı üzerinde tanımlı ve $x \in \Omega$ elemanına $Ax=t$ işlemiyle Y Hilbert uzayının t elemanını karşılık getiren A, operatör olarak bilinir. Eğer Y Hilbert uzayı R gerçek sayılar uzayı ise bu durumda tanımlanan f operatörüne fonksiyonel ismi verilir. X Hilbert uzayı ile R arasında tanımlı her f fonksiyoneline karşılık X Hilbert uzayında tek bir $x \in X$ elemanı bulunabilir. f fonksiyoneline karşılık getirilen x elemanı f fonksiyonelinin temsilcisi olarak anılır.

Bir $x \in X$ elemanı, X'in altuzayları olan M ve $M^\perp$'in

$$(x_1,x_2) = 0$$

koşulunu sağlayan $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$ elemanları cinsinden

$$x = x_1 + x_2 \quad (2.3)$$

ile tek anlamlı olarak temsil edilebilir. M ve $M^{\perp}$ birbirlerinin dik bütünleyeni olarak bilinir. Ayrıca X uzayı

$$X = M \oplus M^{\perp} \tag{2.4}$$

ile M ve $M^{\perp}$'nin direkt toplamı ile temsil edilebilir (Luenberger, 1969).

Hilbert uzaylarıyla ilgili yukarıda verilen bilgilerle yetinilerek, en küçük karelerle dengeleme ile en küçük karelerle kolokasyonun çözümünde kullanılan ve en iyi yaklaşım probleminin Hilbert uzaylarındaki tanımı olan izdüşüm teoremi aşağıda kanıtsız olarak verilecektir.

İzdüşüm Teoremi : X Hilbert uzayı, elemanları doğrusal bağımsız $\{ x_i \in X,\ i=1,\dots,n \}$ kümesiyle $M = \text{span}\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$ altuzayı, $x \in X$ elemanı ve

$$c_i \in R \qquad i=1,2,\dots,n$$

sayıları verildiğinde ;

$$(x , x_i) = c_i \tag{2.5}$$

koşullarını sağlayan $x \in X$ elemanları

$$V = x + M^{\perp} \tag{2.6}$$

ile tanımlanan V doğrusal çeşitlemeyi oluştururlar. V doğrusal çeşitlemenin

$$\| \hat{x} \| \leq \| x \|$$

$$x \in V$$

koşulunu sağlayan tek ve minimum normlu $\hat{x} \in V$ ($\hat{x} \in M$, $(\hat{x},x^{\perp})$, $x^{\perp} \in M^{\perp}$) elemanı

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i\ x_i = X^T a \quad , \ a_i \in R \tag{2.7}$$

ve

$$a = (X^T X)^{-1} c \tag{2.8}$$

olmak üzere

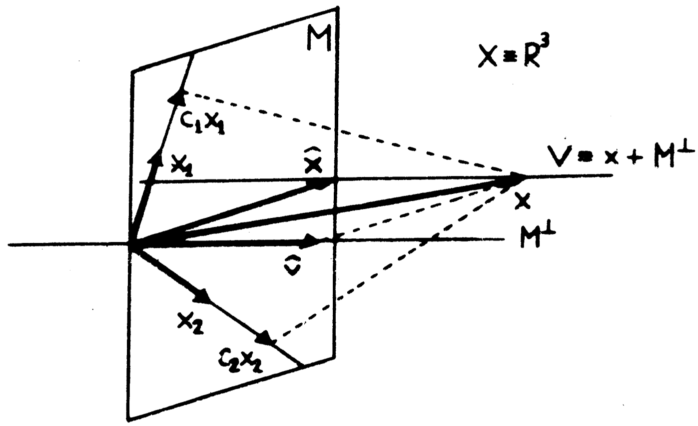
$$\hat{x} = X\ (X^T X)^{-1} c \tag{2.7a}$$

ile bulunur. x ile $\hat{x}$ arasındaki $\hat{v}$ farkı ise

$$\hat{v} = x - \hat{x} = x - X^T (X^T X)^{-1} c \tag{2.9}$$

eşitliği ile elde edilir (Luenberger, 1969).

İzdüşüm teoreminin R^3 uzayındaki geometrik anlamı Şekil-1'de gösterilmektedir.



Şekil-1

3. EN KÜÇÜK KARELERLE DENGELEME

Güncel uygulamalarda dolaylı ölçüler en küçük kareler dengelemesinin daha yaygın kullanılması nedeniyle bu bölümde dolaylı ölçüler en küçük kareler dengelemesinin Hilbert uzaylarında çözümü ele alınmaktadır.

L bir Hilbert uzayı olmak üzere $\ell \in L$ bilinen ölçüler $\tilde{\ell} \in M$, $v \in M^{\perp}$ ($L = M + M^{\perp}$) elemanları cinsinden,

$$\ell = \tilde{\ell} + v \qquad (3.1)$$

ile tek anlamlı olarak temsil edilir. $\tilde{\ell}$ elemanı, bilinmeyen x parametreleri ve bilinen A operatörü ($A = X \rightarrow L$) ile

$$\tilde{\ell} = A\,x \qquad (3.2)$$

olarak tanımlanır ve bu tanım (3.1)'de konulursa ;

$$\ell = A\,x + v \qquad (3.3)$$

bulunur. Problem ; (3.3) eşitliğinden yararla $\tilde{\ell}$ bilinmeyen ölçülerin gerçek değerinin en iyi yaklaşımını belirlemek olup bölüm 2'de verilen izdüşüm teoremi ile çözülecektir.

İzdüşüm teoremindeki M altuzayı, A'nın a_i sütun vektörleri ile

$$M = \mathrm{span}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

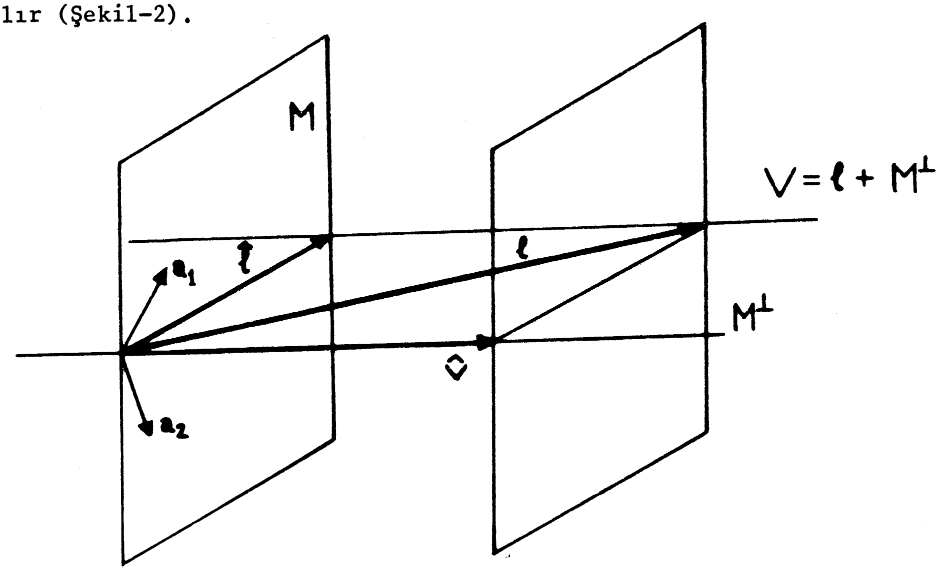
olur. (3.3) eşitliği soldan A^T ile çarpılır ve düzenlenirse

$$A^T \ell = A^T A \; x \tag{3.4}$$

yazılır. (3.4)'ün sol tarafında yer alan A^T ve ℓ bilindiğinden bilinen c vektörü oluşur ve iç çarpım gösterimiyle

$$(a_i \, , \, \ell) = c_i \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{3.5}$$

yazılır (Şekil-2).



Şekil-2

L Hilbert uzayında iç çarpımı tanımlayan G matrisi I birim matris alınır ve bilinmeyen x parametrelerinin seçimine bağlı oluşturulan

$$\bar{\ell} = A \; x \tag{3.6}$$

sonsuz sayıda eleman tanımlayan (3.6) ile (3.5) eşitlikleri (3.4)'de yerine konulursa ;

$$c_i = (a_i \, , \, \bar{\ell}) \tag{3.7}$$

ile izdüşüm teoremindeki (2.5) koşullarının karşılığı tanımlanır. Bu koşulları sağlayan $\bar{\ell}$ elemanları $V = \ell + M^{\perp}$ doğrusal çeşitlemeyi oluşturur. İzdüşüm teoremine göre V doğrusal çeşitlemenin

$$\| \hat{\ell} \| < \| \bar{\ell} \|$$
$$\bar{\ell} \in V$$

minimum norm koşulunu sağlayan ve M altuzayının bir elemanı olan $\hat{\ell}$ elemanı ;

$$\hat{\ell} = A(A^TA)^{-1}\ c \tag{3.8}$$

veya (3.5)'den

$$\hat{\ell} = A(A^TA)^{-1}A^T\ell \tag{3.9}$$

ile bulunur. Bilinmeyen x parametresi (2.7a) eşitliğinden

$$\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^T\ell$$

ve (3.3) eşitliğinden

$$\hat{v} = (I-A(A^TA)^{-1}A^T)\ \ell \tag{3.10}$$

olarak elde edilir.

4. EN KÜÇÜK KARELERLE KOLOKASYON (TAM)

U kümesi üzerinde tanımlı g: U→R fonksiyonlarını eleman kabul eden bir Hilbert uzayı X olsun. Bu uzayda g fonksiyonuna ek olarak K(P,Q) gibi U'nun P,Q noktalarında tanımlı bir fonksiyon daha verilsin. K(P,Q) fonksiyonu aşağıda verilen iki özelliği sağlamalıdır ;

a. Sabit P ve her değişen Q noktası için K(P,Q) fonksiyonu X Hilbert uzayının bir elemanıdır ve K(. , Q) ile gösterilir.

b. Her g ∈ X fonksiyonu için

$$g(Q) = (g(P)\ ,\ K(P,Q)\ )_P \tag{4.1}$$

eşitliği ile g ve K(P,Q), P'nin fonksiyonu olduğu düşünülerek g fonksiyonu üretilir.
Bu iki özelliğe sahip K(P,Q) fonksiyonu tektir ve Üretici Çekirdek Fonksiyonu (ÜÇF) olarak anılır. ÜÇF tanımlı Hilbert uzaylarına da Üretici Çekirdek Hilbert Uzayı (ÜÇHU) ismi verilir. Gerek ÜÇF ve gerekse ÜÇHU ile ilgili ayrıntılı bilgiler Shapiro (1971), Moritz (1980) ve Tscherning (1984,1986)'de bulunabilir.

L, X ÜÇHU üzerinde tanımlı bir doğrusal fonksiyonel ve h ∈ X, L'nin temsilcisi olmak üzere (4.1) eşitliğinden

$$L(g) = L(\ g(P),\ K(P,Q)\ )_P$$

$$L(g) = (\ g(P),\ LK(P,\ .)\ )_P$$

ve $\quad h(P) = LK(P,\ .) \qquad (4.2)$

tanımıyla

$$L(g) = (\ g(P),\ h(P)\ )_P \tag{4.3}$$

bulunur. (4.2) eşitliğinde ÜÇHU'nun önemli bir özelliği ortaya çıkmakta ve herhangi bir L doğrusal fonksiyonelinin h temsilcisi ÜÇF cinsinden kolaylıkla bulunabilmektedir.

En küçük karelerle kolokasyonda ; $t \in X$ bilinmeyen fonksiyonunun en iyi yaklaşımı, t üzerine uygulanan L'lerin bilinen değerlerinden yararlanarak bulunur. Çözüm bölüm 2'de verilen izdüşüm teoreminin bir uygulaması olduğundan öncelikle bu teoremdeki koşul, altuzay ve elemanların buradaki karşılıkları tanımlanacaktır.

$t \in X$ fonksiyonuna uygulanan L doğrusal fonksiyonelleri (4.3) eşitliği ile

$$L_i\ (t) = (\ t(P),\ h_i\ (P)\ )_P = c_i \quad i=1,2,\dots,n \tag{4.4}$$

olarak yazılır. Burada $c_i \in R$ sayıları bilinmekte olup P değişken noktalardır. Böylece (2.5) koşullarına karşılık (4.4) koşulları tanımlanmaktadır. İzdüşüm teoremindeki M altuzayı;

$$M = \mathrm{span}\ (\ h_1\ ,\ h_2\ ,\ \dots,\ h_n\ )$$

ile tanımlanırsa (4.4) koşullarını sağlayan t fonksiyonları

$$V = t + M^{\perp}$$

doğrusal çeşitlemeyi oluşturur. İzdüşüm teoremine göre V'nin

$$\|\ \hat{T}\ \| \leqslant \|\ T\ \| \qquad T \in V$$

minimum norm koşulunu sağlayan ve tek olan $\hat{t}$ elemanı ;

$$\hat{t}(P) = \sum_{i=1}^{n} a_i\ h_i\ (P) \tag{4.5}$$

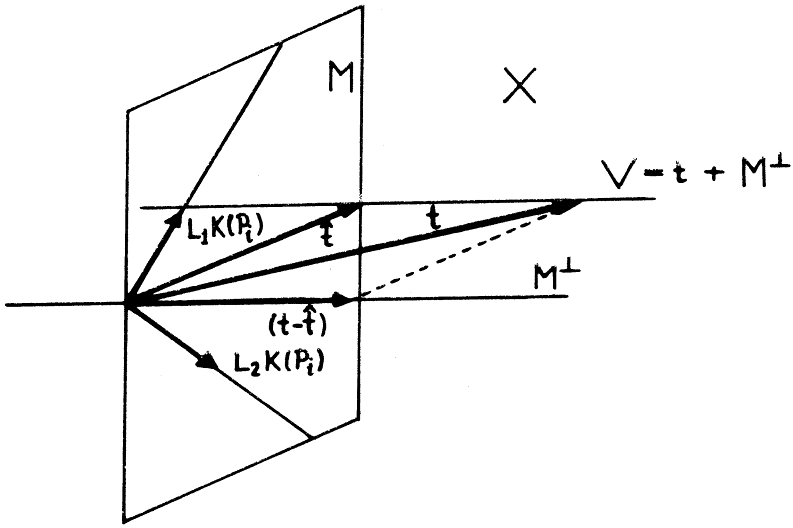
veya (4.2) eşitliği ile

$$\hat{t}(P) = \sum_{i=1}^{n} a_i\ L_i\ K(P,\ .) \tag{4.5a}$$

bulunur. $\hat{t}(P)$ fonksiyonu aynı zamanda M altuzayının bir elemanı ve $M^{\perp}$ dik bütünleyen altuzayının tüm elemanlarına da diktir (Şekil-3). (4.5) eşitliğindeki a_i bilinmeyen parametreleri izdüşüm teoreminden

$$a = [\ L_i\ L_j\ K(.\ ,\ .)\ ]^{-1} c \tag{4.6}$$

ile yazılır. a için (4.6) eşitliğinde verilen bu tanım aşağıda çıkarılmaktadır.



Şekil-3

$\hat{t} \in M$ için (4.5a)'da verilen tanımın (4.4)'deki koşulları da sağlaması gerektiğinden,

$$(h_j(P), \sum_{i=1}^{n} a_i L_i K(P, .)) = c_j, \; j = 1,2,...,n$$

ve h_j (P)'nin (4.2)'deki tanımı burada yerine konulur ve eşitlik düzenlenirse ;

$$\sum_{i=1}^{n} a_i L_j L_i K(. , .) = c_j$$

veya matris gösterimiyle

$$L_j L_i K(. , .) a = c$$

olur. Buradan a'nın bir çözümü

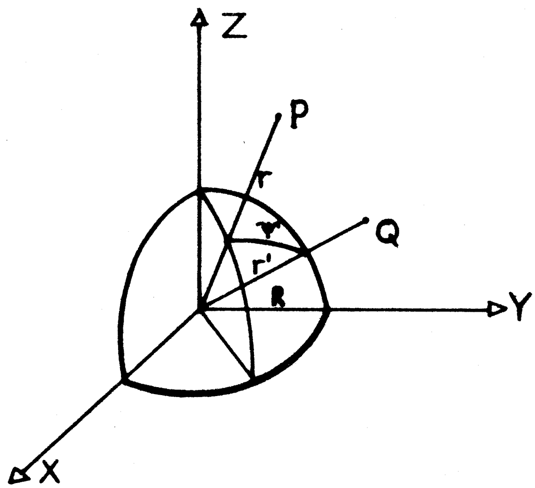
$$a = [L_j L_i K(. , .)]^{-1} c$$

ile elde edilir ki bu (4.6) eşitliğini verir. a'nın bu tanımı (4.5a)'da yerine konulursa, t bilinmeyen fonksiyonun M altuzayı üzerine dik izdüşümü olan minimum normlu en iyi yaklaşımı t (indisler gözönünde bulundurulmaz ise);

$$\hat{t}(P) = LK(P, .) [LLK(. , .)]^{-1} c \qquad (4.7)$$

bulunur (Krarup, 1969; Moritz 1980; Tscherning 1986).

Yukarıda fonksiyonel analiz kavramlarıyla açıklanan en küçük karelerle kolokasyonun geodezideki bir uygulaması aşağıda örnek olarak verilmektedir.



Şekil 4

R_B Bjerhammar yarıçaplı kürenin dışındaki uzay parçası olan $U \equiv R^3$'da tanımlı $T : R^3 \rightarrow R$ harmonik fonksiyonlarının oluşturduğu ÜÇHU'na ait ÜÇF ;

$$K(P,Q) = \sum_{n=o}^{\infty} k_n \left(\frac{R_B^2}{rr'}\right)^{n+1} P_n \,(\text{Cos}\psi) \qquad (4.8)$$

ile verilsin. Burada k_n derece varyansını, P_n Legendre polinomlarını ifade etmekte ve (4.8)'deki diğer terimlerin anlamları Şekil-4'de gösterilmektedir.

M altuzayı ; T bozucu potansiyel üzerinde tanımlı doğrusal fonksiyoneller ($L^{\Delta g}$, L^N, L^{ξ}, ..) ile oluşturulursa, (4.7) ile belirlenen $\hat{T}$ fonksiyonu bozucu potansiyelin en iyi yaklaşımı olur.
$\hat{T}$ fonksiyonuna herhangi bir noktada doğrusal fonksiyonel uygulanarak o noktada fonksiyonelin değeri hesaplanır ki bu işlem prediksiyon olarak bilinir (Moritz, 1980).

5. SONUÇLAR

Bölüm 3 ve 4'de verilen en küçük karelerle dengeleme ve kolokasyon çözümleri incelendiğinde, aralarında aşağıda sıralanan benzerlik ve farklılıklaı olduğu görülmektedir.

* Gerek dengeleme ve gerekse kolokasyon ; en iyi yaklaşım probleminin Hilbert uzaylarındaki tanımı olan izdüşüm teoremi ile çözülmektedir.

* Dengelemede elemanları vektör olan bir Hilbert uzayında, kolokasyonda ise fonksiyonları eleman kabul eden bir Hilbert uzayında çözüm yapılır.

* Kolokasyon çözümünün yapıldığı ÜÇHU'da özel olarak tanımlanan K(P,Q) fonksiyonu çözümde anahtar rolü oynar. Bu nedenle uygun K(P,Q)'nun seçimi önem kazanır.

* M altuzayı ; dengelemede A matrisinin a_i sütun vektörleriyle kolokasyonda ise L_i K(P, .) fonksiyonları ile oluşturulur.

Dengelemede bilinmeyen vektörün (ölçülerin gerçek değeri) minimum normlu en iyi yaklaşımı olan bir vektör, kolokasyonda ise bilinmeyen fonksiyonun minimum normlu en iyi yaklaşımı olan bir fonksiyon aranır.

KAYNAKLAR

/1/ Davis, P.J. (1975) : Interpolation and Approximation - Dover Pub., New York

/2/ Dermanis, A. (1977) : Geodetic Linear Estimation Techniques and The Norm Choise Problem. Manuscripta Geodaetica, Vol.2, ss.15-97

/3/ Egg, J. (1982) : Continuous Methods in Least Squares Theory. Boll.di, Geo.E.Sc.Aff., No. 4, ss. 393-408

/4/ Krarup, T. (1969) : A Contribution to The Mathematical Foundation of Physical Geodesy. Danish Geo.Ins., Kopenhag, No. 44

/5/ Lauritzen, S.L. (1973) : The Probabilistic Background of Some Statistical Methods in Physical Geodesy. Danish Geo. Ins., Kopenhag, No. 48

/6/ Luenberger, D.G. (1969) : Optimization by Vector Spaces Methods. John Wiley, New York

/7/ Meissl, P. (1976) : Hilbert Spaces and Their Application to Geodetic Least Squares Methods. Boll.di. Geod. e Sci.Aff.No.1, ss. 181-201

/8/ Meissl, P. (1982) : Least Squares Adjustment-A Modern Approach. Mitteilungen der geodatischen. Ins.der Tech. Uni.Graz. Folge 43.

/9/ Moritz, H. (1980) : Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichman Verlag.Karlsruhe

/10/ Shapiro, H.S. (1971) : Topics in Approximation Theory. Springer Verlag. Berlin

/11/ Tscherning, C.C. (1984) : Local Approximation of The Gravity Potential by Least-Squares Collocation (In: Procc.Local Gravity Field Approximation. Ed.:K.P.Schwarz, University of Calgary, Calgary).

/12/ Tscherning, C.C. (1986) : Functional Methods For Gravity Field Approximation. Lecture Notes. Forth Int. Sum. Sch. in the Mountains, Admont.