

HARITA VE PLAN KAĞIDINDAKİ DEFORMASYONLARIN SAPTANMASI İÇİN BİR YÖNTEM

Doç.Dr. Olcay ÜZTAN

ZUSAMMENFASSUNG

Eine Methode zur Bestimmung von der Kartenunterlagendeformationen

In dieser Arbeit wurde eine Methode entwickelt, um die Deformationen von der Kartenunterlage zu bestimmen. Der Mohr-Kreis, der in dieser Methode angewendet wurde, kann die Ausführungsmöglichkeit in der Geodäsie und in der mathematischen Kartographie finden.

1. GİRİŞ

Plan ve haritaların çizildiği kağıdın, havadaki nem ve sıcaklık'ün değişmesi karşısında, boyutlarını koruması istenir. Özellikle harita veya planlardan grafik veya yarı grafik yöntem ile alanların hesaplanmasında bu husus çok önemlidir. Son yıllarda presizyonlu kadaastro haritaları, boyutları ihmal edilecek kadar az değişen aliminyumlu folyolar veya suni malzeme (astrolan, ultrafon, arcasol v.b.) üzerine çizilmektedir. Fakat eskiden çizilmiş olan haritaların daima kullanılmaları, alan hesaplarında boyut değişikliklerinin hesaplanmasını gerektirmektedir (3).

2. BOYUNA GENLEŞME VE DOĞRULTU DEĞİŞİMİNİN ANALİTİK YOL İLE SAPTANMASI

Bir plan veya harita üzerinde birbirine dik Ox ve Oy doğrultularında (u_x ; doğrultusu üzerindeki noktaların Oy doğrultusundaki, v_x ; Oy doğrultusu üzerindeki noktaların Ox doğrultusundaki yer değiştirmeleri olmak üzere),

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

ise Ox ve Oy doğrultusundaki üniform uzama veya kısalmaların başlangıçtaki boya oranlarına ϵ_x , ϵ_y asal genleşmeleri denir. (Şekil 1) (4,5)

Ox doğrultusu üzerindeki noktaların Ox doğrultusunda, Oy doğrultusu üzerindeki noktaların Oy doğrultusundaki yer değiştirmeleri v_x ve u_y ile gösterilirse,

$$v_x = \epsilon_x \cdot x \quad ; \quad u_y = \epsilon_y \cdot y \quad (2.2)$$

olur. Plan veya harita kâğıdı üzerinde O'x doğrultusu ile ϕ açısı oluşturan O'ξ doğrultusundaki kısalma veya uzama,

$$S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (2.3)$$

ifadesinden,

$$dS = \frac{\Delta x}{S} \cdot d(\Delta x) + \frac{\Delta y}{S} \cdot d(\Delta y) \quad (2.4)$$

olarak bulunur. (2.2) den,

$$\begin{aligned} d(\Delta x) &= \epsilon_x \cdot \Delta x \\ d(\Delta y) &= \epsilon_y \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (2.5)$$

dir. (2.4) ifadesinde eşitliğin her iki yanını S ile bölünür, (2.5) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\epsilon_\phi = \epsilon_\xi = \epsilon_x \cdot \cos^2 \phi + \epsilon_y \cdot \sin^2 \phi \quad (2.6)$$

elde edilir (1,2,3). $\epsilon_\phi = dS/S$, ϕ doğrultusundaki uzama veya kısalma oranıdır. ϕ ye dik doğrultudaki uzama veya kısalma oranı (2.6) dan

$$\epsilon_{(\phi + \frac{\pi}{2})} = \epsilon_\eta = \epsilon_x \sin^2 \phi + \epsilon_y \cos^2 \phi \quad (2.7)$$

olur. ϕ doğrultusundaki doğrultu değişimi,

$$\tan \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2.8)$$

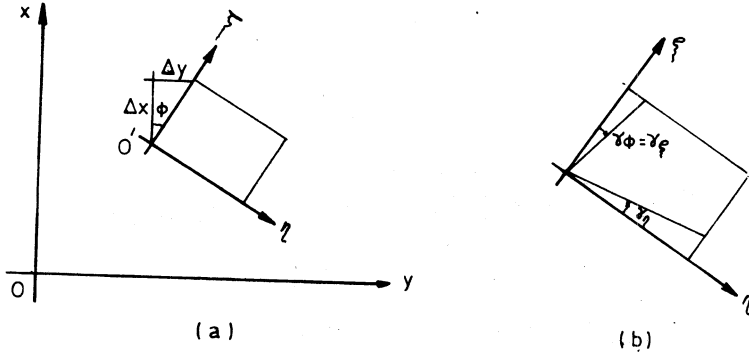
den,

$$\frac{1}{\cos^2 \phi} \cdot d\phi = \frac{1}{\Delta x} \cdot d(\Delta y) - \frac{\Delta y}{(\Delta x)^2} \cdot d(\Delta x) \quad (2.9)$$

olarak bulunur. Açılı değişimi γ_ϕ ile gösterilirse (2.5) ve (2.9) dan

$$\gamma_\phi = \gamma_\xi = \frac{1}{2} (\epsilon_y - \epsilon_x) \sin 2\phi \quad (2.10)$$

elde edilir. $(\phi + \frac{\pi}{2})$ doğrultusundaki doğrultu değişimi (2.10) dan,



şekil : 1

$$\gamma_{(\phi + \frac{\pi}{2})} = \gamma_\eta = -\frac{1}{2} (\epsilon_y - \epsilon_x) \cdot \sin 2\phi = -\gamma_\phi \quad (2.11)$$

dır. Birbirine dik iki ξ, η doğrultuları arasındaki ağı değişimi şekil 1b den,

$$\gamma_{\xi\eta} = \gamma_\xi + |\gamma_\eta| = (\epsilon_y - \epsilon_x) \cdot \sin 2\phi \quad (2.12)$$

olur. Maksimum ağı değişimi $\partial \gamma_{\xi\eta} / \partial \phi = 0$ dan,

$$\phi = \frac{\pi}{4} \quad (2.13)$$

olarak bulunur. Bu doğrultu iđin,

$$\max \gamma_{\xi\eta} = \epsilon_y - \epsilon_x \quad (2.14)$$

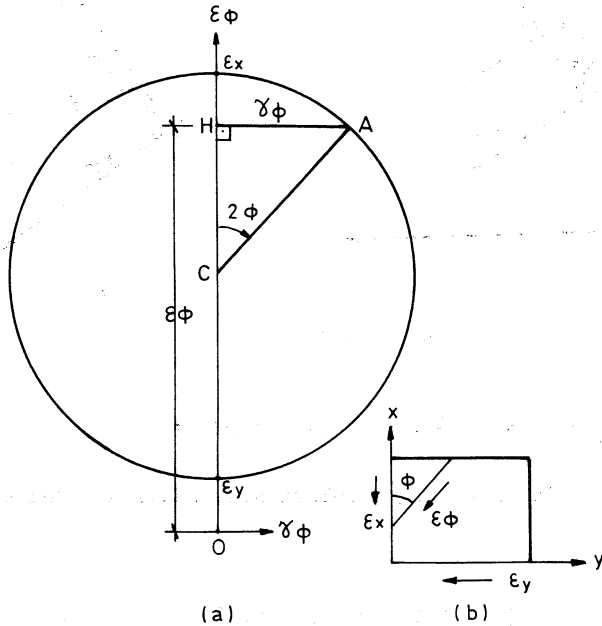
dir. (2.6) ve (2.7) den,

$$\epsilon_{\phi} + \epsilon_{\eta} = \epsilon_x + \epsilon_y = \text{sabit} \quad (2.15)$$

bulunur.

3. BOYUNA GENLEŞME VE DOĞRULTU DEĞİŞİMİNİN GRAFİK YOL İLE (MOHR DAİRESİ) SAPTANMASI (4,5)

ϵ_{ϕ} ve γ_{ϕ} Şekil 2 deki gibi bir Mohr dairesi ile gösterilebilir. $\epsilon_x > 0, \epsilon_y > 0$ ise $\epsilon_{\phi} > 0$ uzama, $\epsilon_x < 0, \epsilon_y < 0$ ise $\epsilon_{\phi} < 0$ büzülmedir.



Şekil : 2

Şekil 2'den

$$\epsilon_{\phi} = OC + CH \quad (3.1)$$

$$OC = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad (3.2)$$

$$CH = AC \cdot \cos 2\phi = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cdot \cos 2\phi \quad (3.3)$$

dir. (3.2) ve (3.3) ifadeleri (3.1) de yerine konursa

$$\epsilon_{\phi} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\phi \quad (3.4)$$

ve

$$\epsilon_{\phi} = \epsilon_x \cdot \cos^2 \phi + \epsilon_y \cdot \sin^2 \phi \quad (3.5)$$

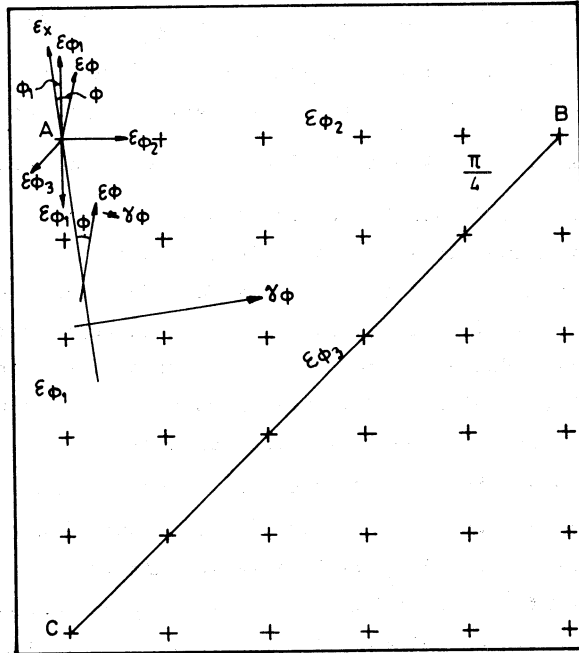
elde edilir. (3.5) ifadesi (2.6) ile karşılaştırılırsa aynı olduğu görülür. Şekil 2a dan,

$$\gamma_{\phi} = AC \cdot \sin 2\phi = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cdot \sin 2\phi \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) ve (2.10) ifadeleri karşılaştırılırsa işaret farkı ile eşit oldukları görülür. Bu bakımdan (3.6) ifadesinde işaret düşünülmez, mutlak değer alınır. Şekil 2a da görüldüğü gibi γ_{ϕ} nin eksen yönünde olması, işaretinin pozitif, aksi ise negatif olduğunu gösterir.

4. ASAL GENLEŞME DOĞRULTULARININ SAPTANMASI

Plân, lif doğrultuları saptanamayan bir kağıt üzerine çizilmiş ise, öncelikle asal genleşme doğrultularının belirlenmesi gerekir. Asal genleşme doğrultuları, kareler ağında yapılan ölçmelerden yararlanılarak, Mohr dairesi yardımı ile bulunur. Şekil 3 deki AB, AC ve BC boyları ölçülür. Şekil 3 deki kareler ağı 10 cm lik ise, uzama veya kısalmadan evvelki boy- lar,



Şekil : 3

$$AB = AC = 50 \text{ cm.}, \quad BC = 70.70 \text{ cm.}$$

olarak bellidir. Daha sonra plân kâğıdındaki uzama ve kısalmaları belirtmek için AB, AC ve BC boyları n er defa ölçülür. Ortalama almak suretiyle AB, AC ve BC boyları m_{AB} , m_{AC} ve m_{BC} karesel ortalama hataları ile bulunabilir. Ortalama almak suretiyle bulunan boylar AB, AC ve BC ile gösterilirse,

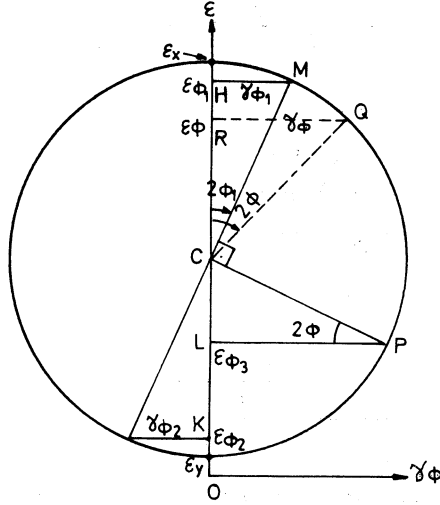
$$\epsilon_{\phi_1} = \frac{AB - 50}{50}, \quad \epsilon_{\phi_2} = \frac{AC - 50}{50}, \quad \epsilon_{\phi_3} = \frac{BC - 70.70}{70.70} \quad (4.1)$$

ifadeleri ile ϵ_{ϕ_1} , ϵ_{ϕ_2} ve ϵ_{ϕ_3} bulunur. ϵ_{ϕ_1} , ϵ_{ϕ_2} ve ϵ_{ϕ_3} pozitif ise kâğıt boyutlarında uzama, negatif ise kısalma vardır. ϵ_{ϕ_1} , ϵ_{ϕ_2} ve ϵ_{ϕ_3} den yararlanılarak Mohr dairesi belirlenirse, ϵ_x , ϵ_y ile herhangi bir doğrultudaki uzama veya kısalma (ϵ_ϕ) ve doğrultu değişimi (γ_ϕ) bulunabilir.

Mohr dairesi grafik ve analitik yolla olmak üzere iki biçimde belirlenebilir.

1. Grafik Yol ile Mohr Dairesinin Saptanması

O_c doğrusu üzerinde ölçekli olarak ϵ_{ϕ_1} , ϵ_{ϕ_2} ve ϵ_{ϕ_3} alınarak H, K ve L noktaları bulunur. H ve K noktalarının ortası C Mohr dairesinin merkezini verir. Şekil 4 de görüldüğü gibi ϵ_{ϕ_1} uzama veya kısalma doğrultusu ile ϵ_{ϕ_3} uzama veya kısalma doğrultusu arasında 50° lık açı vardır. Bu nedenle MCP açısı 2×50 grad olur. Bu ise PC nin CM ye dik olduğunu gösterir. PL doğru parçası da CH doğru parçasına diktir. Bu nedenle CPL açısı $2\phi_1$ dir. CPL dik üçgeni CMH dik üçgenine eşit olur (PC = CM = Mohr dairesinin yarıçapı). CLP ve CMH üçgenlerinin eşitliğinden CL Doğru parçası MH doğru parçasına eşittir. Böylece H noktasından HC doğru parçasına çıkılan dik üzerinde CL uzunluğu alınarak M noktası bulunur. C merkez CM yarıçapı ile Mohr dairesi belirlenir. Mohr dairesinin O_c eksenini kestiği noktalarla ϵ_x ve ϵ_y asal genleşmeleri ve doğrultuları bulunur. Mohr dairesi üzerinden $2\phi_1$ açısı ölçülür. Şekil 3 de A noktasından AC doğrultusu ile saat akrebi hareketinin ters yönünde ϕ_1 açısı çizilirse, A ϵ_x asal genleşme doğrultusu plân üzerine çizilmiş olur. A ϵ_x doğrultusu ile herhangi bir ϕ açısı yapan doğrultudaki genleşme oranı Mohr dairesinden bulunur. C noktasından Ce doğrultusu ile



Şekil : 4

saat akrebi hareketi yönünde 2ϕ açısı alınır. Bu doğrultunun Mohr dairesini kestiği noktadan O e doğrultusuna QR dikey inilirse OR , ϵ_ϕ genişmesini verir. QR (γ_ϕ), ϵ_ϕ doğrultusunun, doğrultu değişimi olup radyan cinsindedir, işareti ise Şekil 4 deki Mohr dairesinden pozitif olarak bulunur. Şekil 3 deki plân üzerinde, ϵ_ϕ doğrultusunun, doğrultu değişim yönü gösterilmiştir.

2. Analitik Yol ile Mohr Dairesinin Saptanması

Şekil 4 den,

$$OC = \frac{\epsilon_{\phi 1} + \epsilon_{\phi 2}}{2} \quad (4.2)$$

$$CH + HO - OC = \epsilon_{\phi_1} - \frac{\epsilon_{\phi_1} - \epsilon_{\phi_2}}{2} = \frac{1}{2} (\epsilon_{\phi_1} + \epsilon_{\phi_2}) \quad (4.3)$$

CLP dik üçgeninden

$$\sin 2\phi_1 = \frac{CL}{PC} = \frac{\epsilon_{\phi_3} - \frac{\epsilon_{\phi_1} + \epsilon_{\phi_2}}{2}}{PC} \quad (4.4)$$

CHM dik üçgeninden,

$$\cos 2\phi_1 = \frac{CH}{CM} = \frac{CH}{PC} = \frac{\epsilon_{\phi_1} - \frac{\epsilon_{\phi_1} + \epsilon_{\phi_2}}{2}}{PC} \quad (4.5)$$

dir. (4.4) ve (4.5) ifadeleri oranlanırsa

$$\tan 2\phi_1 = \frac{\epsilon_{\phi_1} + \epsilon_{\phi_2} - 2\epsilon_{\phi_3}}{\epsilon_{\phi_1} - \epsilon_{\phi_2}} \quad (4.6)$$

olur, CHM üçgeninden,

$$HM = \gamma_{\phi_1} = CH \cdot \tan 2\phi_1 = \frac{1}{2} (\epsilon_{\phi_1} + \epsilon_{\phi_2}) - \epsilon_{\phi_3} \quad (4.7)$$

bulunur. Bulunan OC, CH ve HM değerleri ile Mohr dairesi belirlenebilir.

ϵ_x ve ϵ_y hesap yoluyla bilinenler cinsinden bulunabilir. Şekil 4 den,

$$\epsilon_x = OC + CM$$

$$\epsilon_y = OC - CM$$

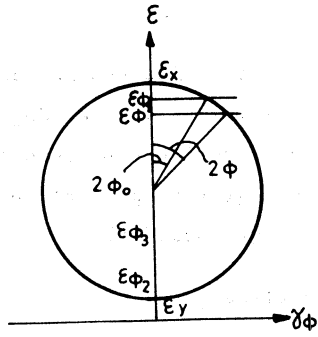
dir.

$$CM = \sqrt{CH^2 + HM^2} = \sqrt{\left[\frac{1}{2} (\epsilon_{\phi_1} - \epsilon_{\phi_2})\right]^2 + \left[\frac{1}{2} (\epsilon_{\phi_1} + \epsilon_{\phi_2}) - \epsilon_{\phi_3}\right]^2} \quad (4.8)$$

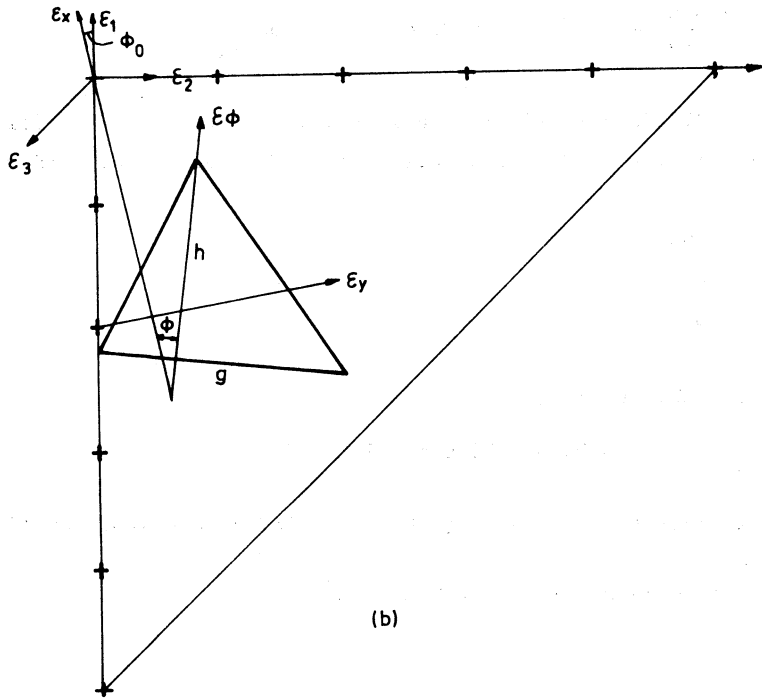
ile

$$\epsilon_x, \epsilon_y = \frac{1}{2} (\epsilon_{\phi_1} + \epsilon_{\phi_2}) \mp \sqrt{\left[\frac{1}{2} (\epsilon_{\phi_1} - \epsilon_{\phi_2})\right]^2 + \left[\frac{1}{2} (\epsilon_{\phi_1} + \epsilon_{\phi_2}) - \epsilon_{\phi_3}\right]^2}$$

bulunur.



(a)



(b)

Şekil : 5

5. ÖRNEK

Bir kadastro plânında, 5 kare, Kuzey-Güney doğrultusunda 498.2 mm., Doğu-Batı doğrultusunda 499.7 mm. ve köşegen doğrultusunda 706.0 mm. olarak ölçülmüştür. Bu plân üzerindeki bir üçgenin alanı (f) yarı grafik yöntem ile 3540 m^2 olarak bulunmuştur (Şekil 5b). h yüksekliği plândan alındığına göre düzeltilmiş alan ne kadardır?

Şekil 5b ve (4.1) ifadesinden,

$$\epsilon_{\phi_1} = \frac{498.2 - 500.0}{500} = - 0.0036 \quad 1000\epsilon_{\phi_1} = - 3.6$$

$$\epsilon_{\phi_2} = \frac{499.7 - 500.0}{500} = - 0.0006 \quad 1000\epsilon_{\phi_2} = - 0.6$$

$$\epsilon_{\phi_3} = \frac{706.0 - 707.0}{707} = - 0.0014 \quad 1000\epsilon_{\phi_3} = - 1.4$$

bulunur. 4. bölümde belirtilmiş grafik yol ile Mohr dairesi çizilir. Bunun için ölçek ; 1 cm = 0.001 olarak alınmıştır. Mohr dairesinden (Şekil 5a),

$$\begin{aligned} \epsilon_{\phi} &= - 0.0033 \\ \epsilon_x &= - 0.00375 \\ \epsilon_y &= - 0.00045 \end{aligned}$$

bulunur. Alandaki büzülme,

$$\Delta f = \epsilon_{\phi} \cdot f = - 0.0033 \times 3540 = - 11.7 \text{ m}^2$$

olarak hesaplanır (3). ϵ_x ve ϵ_y (4.8) ifadesinden de hesaplanabilir. Düzeltilmiş alan

$$F = f + \Delta f = 3540.0 + 11.7 = 3551.7 \text{ m}^2$$

dir.

6. SONUÇ

Plân ve harita kâğıdındaki deformasyonların saptanması için bölüm (3.2) de bir yöntem verilmiştir. Bu çalışmada kullanılan "Mohr dairesi" jeodezide ve matematiksel kartografyada da kullanım alanı bulabilir.

K A Y N A K L A R

- (1) Jordan/Eggert/Kneissl : Handbuch der Vermessungskunde. Band II. Feld-und Landmessung Absteckungsarbeiten. 1963, Seite 667-669.
- (2) Nabaur, M. : Handbibliothek für Bauingenieure. Vermessungskunde. Dritte Auflage 1949, Seite 352-353.
- (3) Özgen, M.G. : Plân kâğıdının uzayıp kısılmasının alan hesaplarına tesiri, İ.T.Ü. Dergisi, 1961, Cilt 19, sayı 3, sayfa 125.
- (4) Pöschl, T. : Elemanter Mukavemet Teknik Mekanik Dersleri. Çeviri : M.İnan. İ.T.Ü. Kütüphanesi, Sayı 578, 1964 sayfa 13-23
- (5) Timoshenko, S. : Elastisite Teorisi
Goodier, J.N. Çevirenler : İ.Kayhan-E.Şuhubi İ.T.Ü. Kütüphanesi, sayı 757, 1969, sayfa 12-22