GÜNÜMÜZ JEODEZİK ÖLÇÜ SİSTEMLERİNDE VERİ İNDİRGEMESİ VE KISITLARIN ELE ALINMASI

(DATA REDUCTION AND CONSTRAINTS HANDLING IN CURRENT GEODETIC MEASUREMENT SYSTEMS)

Bahadır AKTUĞ

ÖZET

Uzay Tekniklerinin gelişmesi ile birlikte artan veri yoğunluk ve çeşitliliği, veri indirgemesini zorunlu hale getirmiştir. İndirgenmiş veriler ile parametre tahmini ise veri indirgeme aşaması ile doğrudan ilişkili olup, kullanılan yazılım ve yönteme göre değişen veri indirgemesinin homojen olmasını gerektirmektedir.

Uydu teknikleri (GPS, SLR vb.) analiz merkezleri arasında indirgenmiş verilerin değişimi çoğunlukla SINEX (Software Independent Exchange Format) olarak gerçekleşmekte, indirgeme sırasında konulmuş kısıtların yeni parametre tahminini etkilememesi gerekmektedir. Bununla beraber bazı kısıtların uygulanması matematiksel olarak zorunludur.

Bu çalışmada; jeodezik ölçülerin indirgemesinde kullanılan minimal (en az) kısıtlar, iç kısıtlar (inner constraints), gevşek (loose), sıkı (tight) ve kaldırılabilir (removable) kısıt türleri gözden geçirilmiş, SINEX formattaki verilerden tekrar normal denklemler sisteminin oluşturulması, indirgenmiş verileri ifade eden indirgenmiş ölçüler (quasi-observations) ve bunlar arasındaki korelasyonların parametre tahmini üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

ABSTRACT

Data reduction became a necessity in the face of variety and intensity of data with the advances in space-based techniques. Parameter estimation with reduced data is closely related to the data reduction and requires homogenity of data reduction methods which vary depending on software and methods employed.

Reduced data are mostly exchanged through SINEX (Software Independent Exchange Format) among analysis centers and it is required that previous constraints on reduced data should not affect the new parameter estimation. However, constraints are mathematically necessary to some extent.

In this study, minimal, inner, loose, tight and removable constraints are reviewed, reconstruction of observation equations from reduced data set in SINEX format and quasi-observations which represent reduced data and how their correlations affect parameter estimations are investigated.

1. GİRİŞ:

Uzay tabanlı (uydu sistemleri ve VLBI (Very Long Baseline Interferometry)) jeodezik ölçü sistemlerindeki gelişmeler ile artan veri yoğunluğu, tüm ölçülerin tek aşamada değerlendirilmesini olanaksız hale getirmiştir. Bu yoğun veri kümesiyle, önceleri bilgisayar donanımlarının yetersiz olması nedeniyle zorunlu olarak gerçekleştirilen veri indirgemesinin kullanılması kaçınılmaz olmuştur. Veri indirgemesinin gerekliliği aşağıdaki gerekçeler ile açıklanabilir:

- Homojen olmayan yoğun veri kümesinin, ön analizlerin bağımsız ve uzmanlaşmış veri analiz merkezleri tarafından yapılmasını zorunlu kılması (VLBI, GPS, DORIS, SLR, Yersel Ölçüler vb.).
- Ön analiz merkezlerince farklı ölçü tekniğine özgü parametrelerin hesaplanarak tüm ölçü tekniklerinde ortak olan parametrelerin üretilmesi zorunluluğu.
- Aynı ölçü yöntemi kullanılsa bile, farklı yazılım ve değerlendirme yöntemleriyle elde edilmiş çözümlerin birleştirilerek tekrar parametre tahmini yapılabilme ihtiyacı.
- Günümüzün gelişmiş bilgisayar sistemlerine rağmen uzay tabanlı verilerin tek aşamada topluca değerlendirilemeyecek kadar yoğun olması.
- Ölçü tekniğinin gerektirdiği parametrelerin indirgenerek sadece koordinat, hız gibi ana parametrelere odaklanabilme ihtiyacı.
- Zaman ve bilgisayar disk alanı kazanımı.

Uzay tabanlı ölçülerin yukarıdaki nedenlerden ötürü zorunluluk haline gelen veri indirgemesi ve indirgenmiş verilerin değişimi ile ilgili ilk öneri “Yazılımdan Bağımsız Veri Değişim Formatı (Software Independent Exchange Format, SINEX)” adıyla Blewitt tarafından ortaya atılmıştır /4,5/. GPS (Global Konumlama Sistemi)‘te farklı alıcı ve yazılım formatların değişimi için öngörülen RINEX (Receiver Independent Exchange Format)’e paralel olarak düşünülen SINEX, kısa zamanda sadece GPS ölçüleri için değil, diğer uzay tabanlı sistemler hatta yersel ölçülerin için de temel değişim formatı haline gelmiştir /5,11/. Bu anlamda, SINEX’i “yazılımdan bağımsız” yerine “kullanılan teknikten bağımsız” olarak algılamak daha yerinde olacaktır. SINEX formata indirgenmiş heterojen veri gruplarının sağlıklı bir şekilde birleştirilerek değerlendirilmesi; sistematik hata içermeyen veri indirgemesi ile uygun ağırlıklandırma ve kısıtların (constraint) uygulanmış olmasına bağlıdır.

Veri indirgemesi temel olarak ana parametreler (koordinat, hız vb.) dışında kalan ancak ana parametrelerin elde edilebilmesi için hesaplanmaları zorunlu olan, ölçü teknik ve yöntemine bağlı parametrelerin hesaplanarak çözümden çıkarılmasıdır. Yardımcı parametrelere örnek olarak GPS ölçülerinin değerlendirilmesinde hesaplanan troposfer parametreleri, VLBI ölçülerinin değerlendirilmesinde hesaplanan saat parametreleri yada ve SLR, VLBI ve GPS istasyonları arasındaki yersel bağlantı ölçüleri verilebilir.

Uygun ağırlıklandırma, kullanılan veri kümesinin homojenliği ile doğrudan ilgilidir. Aynı ölçü tekniği ve veri indirgeme yöntemi ile elde edilmiş veri kümeleri arasında nispeten kolay ağırlıklandırma yapılabilirken, farklı veri kümeleri için karmaşık yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır /4,5,10,11,21/. Kısıtların uygulanması ise sadece parametreler hakkında önceden sahip olunan bilgiye bağlı olmayıp, indirgenmiş verilerin tekrar değerlendirilme yöntemini dikkate almayı da içermektedir. Bu çalışmada veri indirgemesi ve indirgenmiş verilerin sağlıklı şekilde tekrar birlikte değerlendirilebilmesi için zorunlu olan kısıt (constraint) ve korelasyon kavramları incelenecektir.

2. GAUSS-MARKOV MODELİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERS:

Parametre tahmininde “en uygunluk (optimalite)” kavramı birçok kaynakta ele alınmıştır /8,13,14,17/. En yaygın açıklama ise yanlılık ve minimum varyans ile ilgili olanıdır /8,13,17/. Buna göre bir parametre tahminin optimal olması, sırasıyla yanlı olmama (unbiasedness) ve en küçük varyansa sahip olmayı ifade eden (1) ve (2) eşitliklerinin sağlanmasına bağlıdır.

$$E(\hat{x}_i) = x_i \quad (1)$$

$$\sigma^2_{\hat{x}_i} \Rightarrow \min \quad (2)$$

(1) eşitliği parametre tahmini ile elde edilen değerlerin, parametrelerin beklenen değerlerine eşit olmasını ifade ederken, (2) eşitliği ise parametre tahmininde kullanılan ölçüler ve bunların parametre tahmini sonrası değerleri ile elde edilen varyansların minimize edilmesini ifade etmektedir (burada ölçülerin doğrudan parametreleri temsil ettiği düşünülmüştür). Karesel (quadratic) formun Lagrange çarpanları yardımıyla minimize edilmesiyle elde edilen EKK (En Küçük Kareler Yöntemi) optimal bir tahmin yöntemidir. Karesel formun minimize edilmesi ve bu yöntemle (1) ve (2) eşitliklerinin matematiksel olarak sağlanması çeşitli kaynaklarda bulunabilir /12,16,19,20,24/. EKK'nın optimal olması kuşkusuz minimize edilen artık (residual) değerlerin kaba ve sistematik hata içermemesine bağlıdır. Bu amaçla, artık değerlerin nihai parametre tahmininden önce datumdan bağımsız olarak test edilebilmesi gereklidir. Diğer yandan uzay tabanlı ölçü sistemlerinin değerlendirilmesi çoğu zaman birden fazla veri indirgemesini içerdiğinden, referans sistemi tanımlamasının ancak en son aşamada yapılması arzu edilmekte /1,11/, indirgenmiş veriler datumdan bağımsız olarak değişime tabi tutulmaktadır /1,3,4,5,11/. Deterministik ve stokastik bileşenleriyle parametrik form için Gauss-Markov modeli, ε düzeltme vektörü olmak üzere;

$$l = A\,x + \varepsilon \quad (3)$$

şeklindedir /8,12,16,18,20,21,24/. (3) eşitliğinin EKK ile çözümü,

$$\min(\|Ax - l\|^2) \quad (4)$$

biçiminde ifade edilebilir. (4) eşitliğinde minimize edilen fonksiyon L_2 normudur /21/. Cebirsel olarak (3) eşitliğinin eşit ağırlıklı EKK ile çözümü,

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T l \quad (5)$$

eşitliği ile elde edilir. Çoğu durumda referans sisteminin tanımlanmadığı ya da eksik tanımlandığı bu tür normal denklemler sisteminde, parametre sayısı (u) dizayn matrisi (A) olmak üzere *u-rank*$\left(A^T A\right)$ kadar datum defekti söz konusudur /6,8,19,24/. Diğer bir ifade ile normal denklemler matrisinin$\left(A^T A\right)$, *d=u-rank*$\left(A^T A\right)$ kadar sıfır özdeğeri mevcuttur. Bu haliyle regüler (Cayley) tersi mevcut olmayan $\left(A^T A\right)$ matrisi tekildir (singular). Burada "tekillik" deyimi çözümsüzlük yerine sonsuz sayıda çözüme sahip olma ya da tek anlamlı çözüme sahip olmama şeklinde algılanmalıdır. Bu duruma /24/'de eksik-tanımlı sistem (under-determined system), /21/'de regüler olmayan sistem adı verilmektedir. Normal denklemler matrisi gibi dizayn matrisi A da d kadar sıfır özdeğere sahiptir /6,13,14,17/. Bu sistemin çözümü normal denklemler matrisinin genelleştirilmiş tersinin (generalized inverse) alınmasıyla olanaklıdır. Genelleştirilmiş matris inversi,

$$AA^{-1}A = A \quad (6)$$

$$(AA^{-})^{T} = AA^{-} \tag{7}$$

şeklindedir /6,8,21/. Ancak, genelleştirilmiş matris inversi tek anlamlı değildir. Bu nedenle bu denklem sisteminin çözümü için uygun kısıtlar (constraints) kullanılarak geometrik ve fiziksel anlamı olan bir genelleştirilmiş invers bulunması zorunludur. Buna göre parametreler üzerindeki kısıtlar (3)'de verilen Gauss-Markov modeline göre,

$$= Hx + \varepsilon \tag{8}$$

şeklinde eklenirse, (4) ve (5) eşitlikleri sırasıyla,

$$\min \left(\|Ax - l\|^{2} + \|Hx - c\|^{2} \right) \tag{9}$$

$$\hat{x} = (A^{T} A + H^{T} H)^{-1} (A^{T} l + H^{T} c) \tag{10}$$

haline dönüşür. Kısıtların kullanılması ile rankı artırılan normal denklemler matrisinin $(A^{T} A + H^{T} H)$, regüler (Cayley) inversinin alınması mümkün olur. Elde edilen matris inversi ise yalın haldeki normal denklemler matrisinin $(A^{T} A)$ genelleştirilmiş inversi'dir. Kısıtların kullanılmasının başka işlevleri de mevcut olup, /11/'da şöyle özetlenmektedir:

- Datum defekti nedeniyle doğrudan çözülemeyen Gauss-Markov modelinin matematiksel olarak çözülebilir bir denklem sistemi haline getirilebilmesi,
- Parametreler hakkında önceden sahip olunan bilginin (önsel (a priori) varyans-kovaryansları) kullanılarak çözümün iyileştirilmesi,
- Referans sisteminin uygun şekilde tanımlanabilmesi.

Yukarıdaki işlevleri sağlayacak kısıtlar /5/'de şu şekilde sınıflandırılmıştır :

- Sıkı kısıtlar (tight constraints),
- Kaldırılabilir kısıtlar (removable constraints),
- Gevşek kısıtlar (loose constraints),
- Minimal kısıtlar (minimum constraints).

Farklı kaynaklarda farklı farklı şekillerde ifade edilen minimum kısıt /4,5,7,18,22,23/, serbest ağ dengelemesi /9,23/, minimal yaklaşım /5,6,7,8/, Bayesian çözüm /20,24/, iç koordinat çözümü /5,18,21,23/, özel istasyon çözümü /21/, dış koordinat çözümü /21/, model koordinat çözümü /21/, minimum iz-minimum norm /8/, kısmi iz/norm minimum /8/, sıfır-varyans-hesap tabanı (zero-variance computational base) /8/, dizayn matrisinden sütunların silinmesi /1/, ilave koşullu EKK /16,20,24/, parametreler hakkında önceden bilgi bulunan EKK /16,20,24/, ağın ağırlık merkezine kaydırılması /3,8/ kavramları gerçekte (10) eşitliğinin özel hallerinden başka bir şey değildir. Buna göre (10) eşitliği ağırlıklı EKK şeklinde tekrar ifade edilirse,

$$\hat{x} = (A^{T} P_{l} A + H^{T} P_{x} H)^{-1} (A^{T} P_{l} l + H^{T} P_{x} c) \tag{11}$$

elde edilir. (11) eşitliğindeki H ve P_x matrisleri ile c vektörünün seçimi kullanılan yöntemin (genelleştirilmiş invers için) türünü belirleyecektir. Bu göre iki temel yaklaşım söz konusudur:

- $u\text{-}rank\left(A^T PA\right) = 0$ oluncaya kadar parametre sayısını (u) azaltmak (sabit parametreli çözümler).
- $\left(A^T PA\right)$ denklem sistemine, regüler (Cayley) tersinin alınabileceği kadar doğrusal olarak bağımsız minimum sayıda denklem ilave etmek (koşullu/kısıtlı çözümler).

Minimal kısıtlar normal denklemler sisteminin çözümünü sağlayacak yada diğer bir ifade ile datum defektini giderecek minimum sayıda kısıtın uygulanmasını ifade etmektedir. Ancak minimalite kavramı parametreler hakkında stokastik öngörülerin bulunduğu (Bayesian Çözüm, P_x matrisi) durumlarda her zaman için açık değildir. Nitekim farklı uzay tekniklerine ait ölçülerin birleştirilmesinde /4/ ve /5/ koordinatlar için 1 m^2, hızlar için 0.01 m^2'den büyük önsel varyanslar gevşek çözüm (minimal kısıt) olarak öngörülürken, GPS ölçü değerlendirmelerinde /1/ ve /11/, koordinatlar için 100 m^2, hızlar için 1 m^2/yıl önsel varyanslar minimum kısıt olarak verilmektedir. Kuşkusuz bunun sebebi parametreler arasında kullanılan ölçü modeline bağlı olarak değişen korelasyonlardır.

Minimal kısıtların kullanılması çoğu zaman (1) ve (2) eşitliklerini sağlamayan (optimal olmayan) tahmin değerleri elde edilmesine sebep olur. Bunun sebebi yukarıda da ifade edildiği üzere genelleştirilmiş matris inversinin tek anlamlı olmaması ve kullanılan kısıtlara bağlı olarak değişmesidir. Ancak artık değerler (residual) hangi tür minimal kısıt kullanılırsa kullanılsın değişmeyecektir. Bu nedenle serbest ağ dengelemesi olarak da bilinen bu tür çözümler parametre tahmini yerine değil parametre tahmini öncesi ölçülerin testinde kullanılmaktadır. Bu çalışmada ise, kısıtların datumdan bağımsız olarak veri indirgemesinde kullanılabilmeleri ele alınmaktadır.

3. KISITLAR (CONSTRAINTS) VE UYGULAMA:

Kısıtların en genel halini ifade eden (11) eşitliğinde parametreler üzerindeki stokastik öngörü (P_x) kaldırılır ve kapanma vektörünü ifade eden c vektörü sıfır vektör olarak alınırsa (11) eşitliği,

$$\hat{x} = (A^T P_l A + H^T H)^{-1} A^T P_l l \qquad (12)$$

şekline dönüşür. Genelleştirilmiş inversi aranan ($A^T P_l A$) matrisine N denirse, (6) eşitliğiyle N'nin tersi ,

$$C_{\hat{x}} = \left(N + H^T H\right)^{-1} N \left(N + H^T H\right)^{-1} \qquad (13)$$

şeklinde yazılabilir /8/. Buna göre parametre tahmin değerleri,

$$\hat{x} = C_{\hat{x}} A^T P_l l \qquad (14)$$

ile bulunur. Datum defekti olan bir normal denklemler sisteminde, dizayn matrisinde datum defekti (d) kadar doğrusal bağımlı denklem olduğu düşünüldüğünde /21,23,24/,

$$H\,x=0 \tag{15}$$

eşitliğini sağlayan bir H matrisi bulunabilir. Bu şekilde normal denklemler matrisinin genelleştirilmiş inversi, H matrisi ve uygun ilave koşullar ile elde edilebilir. H matrisinin ağın geometrisi ve çözümde kullanılacak parametrelere bağlı;

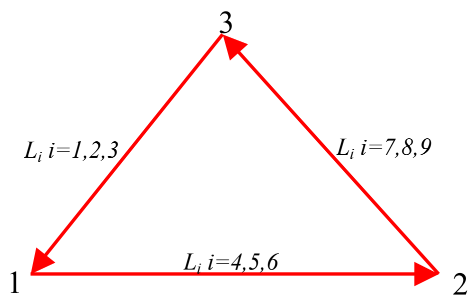
$$H^T=T\,G \tag{16}$$

şeklinde iki bileşenden oluştuğu kabul edilebilir /8/. Burada T ilave koşulların çözüme nasıl katılacağını belirlerken, G matrisi datum defektine (ağın geometrisine) bağlı olarak değişmektedir. G matrisinin seçimi ile ilgili koşul $Hx = 0$ ve $AG = 0$ olmasıdır /8/. G matrisi genel olarak ölçü yöntemine (açıklık açısı, azimut, mesafe vb.) göre oluşacak datum defekti düşünülerek birçok jeodezik model için bilinmektedir /6,8,18/. Temel olarak öteleme, dönüklük ve ölçek parametrelerini içeren G matrisi için 4 boyutlu jeodezik ağlarda bu parametrelerin zamana göre değişimlerini de katmak zorunludur /3,4,5,7,23/. (16)'da verilen bileşenler (T,G) yardımıyla farklı H matrisleri ve farklı minimal kısıtlı çözümler elde edilebilir. G matrisi bilindiğine göre H matrisinin sadece T'ye göre tasarlanabileceği açıktır. Tüm kısıt türlerinin (11), (15) ve (16) eşitlikleri yardımıyla nasıl elde edilebileceğini örnekle açıklayalım :

Koordinatlarını kesin olarak bildiğimiz üç nokta arasında bazvektörü ölçüleri bulunduğunu varsayalım. Birbirlerine yaklaşık eşit mesafede olan üç noktanın geometrik konumları Şekil-1'de koordinat değerleri ise Tablo-1'de verilmektedir. Buna göre üç noktaya ait bazvektörü ölçüleri ve matematik model;

$$\begin{aligned} l_i &= x_1^i - x_3^i \quad (i=1,2,3) \\ l_i &= x_3^i - x_2^i \quad (i=4,5,6) \\ l_i &= x_1^i - x_3^i \quad (i=7,8,9) \end{aligned} \tag{17}$$

şeklinde olsun.



Şekil-1. Üç nokta için bazvektörü gözlemleri

Tablo-1. Nokta Koordinat Değerleri

No	X_1 (m.)	X_2 (m.)	X_3 (m.)	Enlem	Boylam	Yükseklik
1	4237209.0750	2446353.8000	4077985.5722	40 00 00	30 00 00	0.0000
2	4193868.9667	2519930.7034	4077985.5722	40 00 00	31 00 00	0.0000
3	4153561.7896	2446634.8726	4162423.2007	41 00 00	30 30 00	0.0000

Bazvektörü bileşenleri gerçek değerlerine ortalaması sıfır olan ve değerleri 5-10 cm. arasında değişen rasgele hatalar verilerek ölçüler oluşturulmuş ve Tablo-2'de verilmiştir.

Tablo-2. Bazvektörleri Ölçü Değerleri

No	dX (m.)	dY (m.)	Z (m.)
3-1	83647.3654	-281.1626	-84437.5385
1-2	-43340.1683	73576.9934	-0.0500
2-3	-40307.0871	-73295.9108	84437.5585

Yukarıdaki örnekte bazvektörlerinden oluşan denklem sisteminde datum defekti sadece üç öteleme parametresinden oluşmakta olup, buna göre geometri (G) ve dizayn matrisi (A),

$$G^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

şeklinde olacaktır.

a. Minimum Sayıda Sabit Parametre ile Çözüm:

Çözüm temel olarak normal denklemler matrisinin rank defektini giderecek minimum sayıda parametrenin çözümden çıkarılmasına yada önsel değerlerinin ilave koşullarla sabit alınmasına dayanmaktadır. Her iki durumda da sabit alınan yada çözümden çıkarılan parametrelerin varyansları sıfır kabul edilmektedir. Bu yöntemin veri indirgemesinde kullanılması uygun değildir. Çünkü parametrelerin çıkarılması bir sonraki aşamada parametre sayısının azalmasına ve yanlılığa sebep olurken, yöntemin ilave koşul ile uygulanması durumunda ise varyansı sıfır alınan parametre anlamsız şekilde ağırlık kazanmaktadır /1/. Parametrelerin sabit alınması için T matrisi;

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & . \\ . & . & I_d \end{pmatrix} \tag{20}$$

şeklinde düzenlenerek, (16) eşitliğiyle *H* matrisi, (13) ve (14) eşitlikleriyle de çözüm elde edilebilir. Parametrelerin çözümden çıkarıldığı yöntem için ise, çözümden çıkarılacak parametrelere göre dizayn matrisi yeniden bölümlendirilir /6,8/:

$$l + v = (A_1 : A_2)\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

datum defekti (d) kadar denklem içerecek A_2 matrisi, A_1 matrisine, doğrusal olarak bağımlı olduğundan;

$$G = \begin{pmatrix} L \\ -I_d \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$L = \left(A_1^T A_1\right)^{-1} A_1^T A_2 \tag{23}$$

şeklinde çözüm elde edilebilir. Bazvektörleri verilen 3 boyutlu ağlarda, datum defektini gidermek için bir noktanın sabit alınması yeterli olup, örnek problemin çözümü için 3 nolu nokta koordinatlarına koşul uygulandığında, (20) eşitliği,

$$T = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

şeklinde olur. (13),(14) ve (16) eşitlikleriyle,

$$C_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 4237209.1183 \\ 2446353.7367 \\ 4077985.6722 \\ 4193868.9134 \\ 2519930.7567 \\ 4077985.6322 \\ 4153561.7896 \\ 2446634.8726 \\ 4162423.2007 \end{bmatrix} \qquad \hat{r} = \begin{bmatrix} -0.0367 \\ 0.0267 \\ 0.0100 \\ -0.0367 \\ 0.0267 \\ 0.0100 \\ -0.0367 \\ 0.0267 \\ 0.0100 \end{bmatrix} \tag{26}$$

değerleri elde edilir. Burada $C_{\hat{x}}$, $\hat{x}$ ve $\hat{r}$ sırasıyla, parametre varyans-kovaryans matrisi, parametre tahmin değerleri ve ölçü düzeltme değerleridir.

b. İç Kısıtlar (Inner Constraints, Inner Coordinate Solution):

H matrisini tamamen ağın geometrisine bağlı olarak elde ederek çözüm yapılmak istendiğinde (16) eşitliğindeki *T* matrisi birim matris alınır ve (16) eşitliği,

$$H^T = G \tag{27}$$

şekline gelir. İç koordinat çözümü /18,21/ olarak da bilinen bu çözüm ağın geometrisine bağlı olup, parametrelerin önsel değerlerine gelen düzeltmelerin karelerinin toplamını ve aynı zamanda parametrelerin sonsal (a posteriori) varyanslarının toplamını minimize eden çözümdür. Bu çözüm özelikle eksik tanımlı sistemlerin çözümlerinde çok sıkça kullanılmaktadır /18,21,23,24/. Jeodezik olmayan eksik tanımlı birçok sistemde koşul denklemlerini oluşturmak için gerekli olan ağ geometrisi matrisi *G* açık değildir. Özellikle jeodezik veriler ile fay model ve kayma parametrelerinin hesaplandığı çalışmalarda parametre sayısı bilinmeyenlere göre oldukça fazladır /2/. Bu nedenle minimum norm-minimum iz çözümü, rank defekti olan normal denklemler matrisinin inversi koşula gerek olmadan “pseudo-inverse” (Moore-Penrose) ile doğrudan elde edilerek, EKK çözümü yapılabilir /6,8,9,17,21/. Pseudo-invers kavramı da aslında (4) eşitliğinin rank-defektine sahip sistemde çözülmesi anlamına gelmektedir /6,21/. Yukarıdaki örnek için (13),(14) ve (16) eşitlikleri yada pseudo-invers kullanılarak yapılan minimum norm-minimum iz çözümü,

$$C_{\hat{x}} = \begin{bmatrix}
0.2222 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1111 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.2222 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1111 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.2222 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1111 & 0.0000 & 0.000 & 0.0000 \\
-0.1111 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2222 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1111 & 0.000 & 0.0000 \\
0.0000 & -0.1111 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2222 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1111 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & -0.1111 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2222 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1111 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1111 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2222 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1111 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2222 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1111 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2222
\end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\hat{x}=\begin{bmatrix}4237209.1217\\2446353.7400\\4077985.6189\\4193868.9167\\2519930.7601\\4077985.5789\\4153561.7929\\2446634.8759\\4162423.1474\end{bmatrix} \qquad \hat{r}=\begin{bmatrix}-0.0367\\0.0267\\0.0100\\-0.0367\\0.0267\\0.0100\\-0.0367\\0.0267\\0.0100\end{bmatrix} \tag{29}$$

şeklindedir. Minimum iz - Minimum norm çözümü için bir başka yöntemde $\|Ax-l\|$'yi minimize eden çözüm, kare matris olmayan (büyük çoğunlukla) dizayn matrisinin inversini elde etmektir /6/. Minimum iz-minimum norm çözümü dizayn matrisinin SVD (Tekil Değer Ayrıştırması, Singular Value Decomposition) ile $A=U\Sigma V^T$ şeklinde faktörizasyonu yapılarak $A^+=V\Sigma^+U^T$ şeklinde tersi elde edilir /21/. Buna göre $\hat{x}=A^+l$ şeklinde bulunan çözüm, yukarıda normal denklemler matrisinin pseudo-inversi ile bulunan minimum norm-minimum iz çözümü ile eşdeğer olmakla birlikte ölçü ağırlıklarını dikkate almamaktadır.

Tamamen ağın geometrisine dayanan minimum iz-minimum norm çözümünde nümerik stabilite için geometri matrisi (G) normlandırılır (satırlarını oluşturan vektörlerin herbirinin normu 1 yapılır). Bu şekilde satırları ortonormal vektörler haline gelen G matrisi ile çözüm, (13), (14) ve (16) eşitlikleri yerine doğrudan geometri matrisi kullanılarak

$$C_{\hat{x}}=\left(N+G_n\,G_n^T\right)^{-1}-G_n\,G_n^T \tag{30}$$

$$\hat{x}=C_{\hat{x}}\,A^T P l \tag{31}$$

şeklinde bulunabilir. Normlandırma işlemi pozitif tanımlı bir GG^T için Cholesky faktörizasyonu ile elde edilebilir (Cholesky faktörizasyonu sadece pozitif tanımlı matrislere uygulanabilir olduğundan, nivelman ağı için ayrıca bulunmalıdır) /8/. Normlandırma işlemi için önsel değerleri ile koordinat sistemini ağın ağırlık merkezine kaydıran yöntemler çeşitli kaynaklarda verilmektedir /8,9,18/.

İç kısıtların özel bir hali de, parametrelerin tamamının değil de sadece bir bölümünün önsel değerlerine gelen düzeltmeleri ve parametrelerin sonsal varyansları toplamının minimize edildiği çözümdür. Kısmi iz ve kısmi norm minimum çözümü /8,9/ yada özel istasyon çözümü /11,21/ olarak da bilinen bu çözümde T matrisi,

$$T=\begin{pmatrix}0 & 0 & .\\0 & 0 & .\\. & . & I_k\end{pmatrix} \tag{32}$$

şeklindedir. Burada k parametre düzeltmeleri ve varyansları minimize edilecek parametre sayısını ifade etmektedir /8/. Örnekte, 2 ve 3 nolu noktalar için parametre düzeltme vektörünün normu ve sonsal varyansları toplamını (kısmi iz) minimize edecek çözümde, *T* matrisi (32) eşitliğiyle,

$$T=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

şeklinde bulunabilir. Kısmi iz ve norm minimum çözümünde elde edilen sonuçlar,

$$C_{\hat{x}}=\begin{bmatrix} 0.5000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000\\ 0.0000&0.5000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000\\ 0.0000&0.0000&0.5000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000\\ 0.0000&0.0000&0.0000&0.1667&0.0000&0.0000&-0.1667&0.0000&0.0000\\ 0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.1667&0.0000&0.0000&-0.1667&0.0000\\ 0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.1667&0.0000&0.0000&-0.1667\\ 0.0000&0.0000&0.0000&-0.1667&0.0000&0.0000&0.1667&0.0000&0.0000\\ 0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&-0.1667&0.0000&0.0000&0.1667&0.0000\\ 0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&0.0000&-0.1667&0.0000&0.0000&0.1667 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\hat{x}=\begin{bmatrix} 4237209.1450\\ 2446353.7100\\ 4077985.6422\\ 4193868.9400\\ 2519930.7301\\ 4077985.6022\\ 4153561.8163\\ 2446634.8459\\ 4162423.1707 \end{bmatrix} \qquad \hat{r}=\begin{bmatrix} -0.0367\\ 0.0267\\ 0.0100\\ -0.0367\\ 0.0267\\ 0.0100\\ -0.0367\\ 0.0267\\ 0.0100 \end{bmatrix} \tag{35}$$

şeklindedir. Görüleceği üzere, bu çözümde 2 ve 3 nolu noktaların varyansları diğer çözümlerden, hatta tüm iz minimum çözümde bulunan varyanslarından da küçüktür. Minimum iz – minimum norm çözümlerinde ağın ağırlık merkezinin noktaların tümüne yada bir bölümüne göre parametrelerin sonsal ve önsel değerleri farkını minimize edecek şekilde kaydırılması sonucunda yanlılık (bias) oluşup oluşmaması diğer bir ifade ile optimal çözüm elde edilip edilememesi parametrelerin önsel değerlerinin gerçek değerlere yakınlığı ile ilgilidir. Bu örnekte minimum iz-minimum norm çözümü iç kısıtlar ve SVD ile verilmiştir. Ancak uygulamada birkaç farklı yöntemle daha bu çözüm gerçekleştirilebilir. Bunlar öteleme ve dönüklük değerlerini sıfır yapacak şekilde kısıt denklemi oluşturmaktır. Bu amaçla (11) veya (12) eşitlikleri ile *G* matrisinden ağın defektine göre öteleme ve dönüklükle ilgili satırlar ve *H* matrisi kullanılarak çözüm yapılır (sıfır-net-dönüklük, sıfır net öteleme) /21/ yada bu geometride bir çözüme S-transformasyonu ile dönüştürülür /8/. S-transformasyonunun minimal yada eksik tanımlı sistemlerde iç koordinat çözümü yapmayı sağlayan minimal bir dönüşüm olduğunu ve fazla tanımlı (overdetermined) sistemlerde özdeş parametreler arasında optimal bir parametre tahmin yöntemi olan Helmert dönüşümünden farklı olduğunu vurgulamak faydalı olacaktır.

c. Gevşek, Sıkı ve Kaldırılabilir Kısıtlar:

Minimize edilen karesel forma, ölçüler dışında parametreler de önsel varyanslarıyla ilave edilirse, sadece ölçülere gelen düzeltmeler değil, parametrelere gelen düzeltmeler de minimize edilmiş olur. Kısıtlar minimize edilen parametre düzeltmelerinin önsel varyansları kullanılarak ağırlıklandırılmasıyla oluşur /19,21/. Ağırlıklandırma işlemi parametrelerin önsel varyansları ile birlikte ölçü şeklinde normal denklemler sistemine eklenmesiyle elde edilir. (11) eşitliğindeki $H = I$ (tüm parametrelere kısıt uygulanması) ve $c = 0$ alınırsa *(20)*'de *"Parametreler Hakkında Önceden Bilgi Bulunan EKK",* (24)'te "*Bayesian Approach*" adıyla da verilen çözüm elde edilir. Buna göre (11) eşitliği,

$$\hat{x} = (A^T P_l A + P_x)^{-1} A^T P_l l \tag{36}$$

şekline gelir. Uzay tabanlı ölçüler için koordinat parametrelerinin önsel değerlerine uygulanan kısıtlarla ilgili olarak /5/'de şu şekilde bir sınıflandırma yapılmaktadır:

Sıkı Kısıtlar	:	$\sigma_x < 10^{-10}$ m.
Kaldırılabilir Kısıtlar	:	$\sigma_x \approx 10^{-5}$ m.
Gevşek Kısıtlar	:	$\sigma_x \geq 10^{-5}$ m.

Sıkı ve gevşek kısıtların anlamı açıktır. Kaldırılabilir kısıtlar ise (36) eşitliğiyle kısıt konulmadan önceki normal denklemler matrisine ulaşılabilmeyi amaçlamaktadır. Bu şekilde veri indirgeme sırasında uygulanan kısıtlar kaldırılabilir. Bu işleme özellikle farklı strateji uygulanarak veri indirgemesi yapılmış ölçülerin tekrar birleştirilmesinde ihtiyaç duyulmaktadır. Tekrar birleştirme işlemi sırasında tüm indirgenmiş veri kümelerine aynı tür ve miktarda kısıt uygulayabilmek için öncelikle, mevcut kısıtların kaldırılması gerekir /4,5,7,22/. Mevcut kısıtların kaldırılması (11) ve (36) eşitliklerinden hareketle,

$$A^T P_l A = C_{\hat{x}}^{-1} - (H^T P_x H)^{-1} \tag{37}$$

şeklinde elde edilebilir. /5/'de sınıflandırılan sıkı kısıtların parametrelere önsel varyanslar olarak uygulanması (10^{-20} m^2 ve daha küçük), matris invers işlemleri, bilgisayarların çalışma prezisyonu, yuvarlama (rounding) ve kesme (truncation) hataları ile birlikte değerlendirildiğinde, ancak makul ölçülerdeki kısıtların kaldırılmasının olanaklı olabileceği görülmektedir. (37) eşitliğiyle kısıtların kaldırılması sonucunda elde edilen normal denklemler matrisi datum defektine sahip olacaktır /4/. Bu şekilde tüm indirgenmiş veri kümelerine aynı minimal kısıtlar uygulanabilecektir. Kısıtların kaldırılması işlemi çok sık olarak SINEX formattaki veriler üzerinde yapılmaktadır. Buna göre SINEX formatta (37) eşitliğinin birinci elemanı "SOLUTION/MATRIX_ESTIMATE" bloğunda, ikinci elemanı ise "SOLUTION/MATRIX_APRIORI" bloğunda verilmektedir. Görüleceği üzere kısıtların kaldırılması için doğrudan H matrisinin bilinmesine gerek yoktur. Kısıtların kaldırılması işleminin başarısı kaldırılacak kısıtların makul mertebede olmalarına bağlıdır. Aksi takdirde, kısıtların kaldırılması mümkün olmayacağı gibi, mümkün olsa dahi, yeni elde edilen normal denklemler matrisi pozitif tanımlı olmayabilir. Bu konuda bir diğer uygulama ise kovaryans matrisinin tümünün veya diyagonal elemanlarının ölçeklendirilmesine dayanan kısıtların azaltılması işlemidir /1/. Bu yöntem özelikle gevşek kısıtlı çözümler arasında uygun ağırlıklandırma yapılabilmesinde etkili iken, nispeten sıkı kısıtlı indirgenmiş veri kümeleri için başarısı ise deneyseldir.

Verilen örnek için (36) eşitliği kullanılarak tüm parametreler için 10 m kısıt (100 m^2 varyans) tanımlandığında (P_x)

$$C_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 33.5548 & 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 33.5548 & 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 33.5548 & 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 \\ 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 & 33.5548 & 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 & 33.5548 & 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 & 33.5548 & 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 \\ 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 & 33.5548 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 & 33.5548 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 & 33.2226 & 0.0000 & 0.0000 & 33.5548 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 4237209.1215 \\ 2446353.7402 \\ 4077985.6187 \\ 4193868.9167 \\ 2519930.7599 \\ 4077985.5788 \\ 4153561.7929 \\ 2446634.8759 \\ 4162423.1475 \end{bmatrix} \qquad \hat{r} = \begin{bmatrix} -0.0368 \\ 0.0269 \\ 0.0097 \\ -0.0363 \\ 0.0263 \\ 0.0101 \\ -0.0368 \\ 0.0268 \\ 0.0102 \end{bmatrix} \tag{39}$$

şeklinde çözüm elde edilir.

4. İNDİRGENMİŞ VERİLER (QUASI-OBSERVATIONS) VE KORELASYON

İndirgenmiş veri (quasi-observation) kavramı, indirgeme işlemi sonucunda elde edilen kovaryans ilişkileri sayesinde tekrar kayıpsız olarak parametre tahmininde kullanılabilir. Buna göre (28) ve (29) eşitlikleriyle elde edilen parametre tahmin değerleri ($\hat{x}$) ve bunların kovaryansları en basit şekilde yeniden parametrize (y) edilirse;

$$\hat{x} = B\,y + v \tag{40}$$

elde edilir. Burada x önceki çözümde bulunan parametre tahmin değerleri, y bunların yeniden parametrizasyonu, v de ölçü hata vrktörüdür. Bu eşitlikle, bir önceki çözümde elde edilen parametre tahminleri ve sonsal kovaryans matrisi, (40) eşitliğinde ölçüler ve ölçülerin diagonal olmayan önsel kovaryans matrisi haline gelmiştir. Bu ölçülere "gözlemsi" (quasi-observation) adı verilmektedir /11/. Gözlemsiler temel olarak indirgenmiş verileri ifade etmekte, parametreler arasındaki ilişkiler ise varyans-kovaryans matrisi ile sağlanmaktadır. Korelasyonlu gözlemler olan gözlemsiler, bu anlamda sahte-gözlemler (pseudo-observations)'den farklıdır. Veri indirgemesinde çoğunlukla gevşek kısıtlı yöntem tercih edildiği düşünüldüğünde, gözlemsilerin önsel varyans-kovaryans ilişkileri doğrudan uygulanan kısıtlara bağlı olacağından bir sonraki parametre tahmin aşamasında önceden kullanılan kısıt oranları parametre tahminlerini de etkileyecektir /1,11,15/. Yukarıdaki örnekte gevşek kısıtlı çözümle (100 m^2 önsel varyans) elde edilen parametreler, (40)'a göre gözlemsi olarak yeniden parametrize edilirse, dizayn matrisi B birim matris olacaktır. Gözlemsilerin önsel kovaryans matrisi yine gevşek çözümden elde edilen $C_{\hat{x}}$ olarak alındığında çözüm standart EKK ile,

$$C_{\hat{y}} = \left(B^T C_{\hat{x}}^{-1} B\right)^{-1} \tag{41}$$

$$\hat{y} = C_{\hat{y}} B^T C_{\hat{x}}^{-1} (\hat{x} - By) \tag{42}$$

şeklinde elde edilebilir /10/. Yukarıda elde edilen gevşek kısıtlı çözüm sonuçlarından (41) ve (42) ile yeniden parametre oluşturularak, (36) eşitliği yardımıyla 2 ve 3 nolu nokta koordinatlarına 1 cm. (1 cm^2 önsel varyans), diğer parametrelere 10 m. (100 m^2 önsel varyans) kısıt verilerek tekrar çözüm yapıldığında 1 nolu noktaya ait parametre değerleri sadece kovaryans ilişkileri sayesinde belirlenebilmektedir. Elde edilen sonuçlar;

$$C_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.0300 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0300 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0300 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 \\ -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 4237209.0792 \\ 2446353.7946 \\ 4077985.5764 \\ 4193868.9667 \\ 2519930.7034 \\ 4077985.5722 \\ 4153561.7896 \\ 2446634.8726 \\ 4162423.2007 \end{bmatrix} \qquad \hat{r} = \begin{bmatrix} -0.0423 \\ 0.0544 \\ -0.0423 \\ 0.0498 \\ -0.0564 \\ -0.0067 \\ -0.0033 \\ -0.0033 \\ 0.0531 \end{bmatrix} \tag{44}$$

şeklindedir. Görüleceği üzere indirgenmiş veriler arasındaki kovaryans ilişkisi, indirgenmiş veriler ile parametre tahmini yapılmasını sağlamaktadır. Burada dikkat edilmesi gereken konu, gevşek kısıtlı çözümde gözlemsilere gelen düzeltmelerin uygulanan kısıtla birebir ilişkisidir. Kısıt ile parametrelere gelen düzeltmenin ilişkisi,

$$\hat{\delta}_x = \left(A^T C_x^{-1} A + C_{x0}^{-1}\right)^{-1} A^T C_x^{-1} (x - A x^0) \tag{45}$$

şeklindedir. En basit varsayımla, gözlemsiler için dizayn matrisinin birim matris olduğu düşünülürse (45) eşitliği

$$\hat{\delta}_x = \left(C_x^{-1} + C_{x0}^{-1}\right)^{-1} C_x^{-1} (x - x^0) \tag{46}$$

haline gelir. Korelasyonlu önsel kovaryans matrisinin korelasyonları ihmal edilerek diyagonal bir matris olarak ele alındığında,

$$\hat{\delta}_x = \left(\frac{1}{\sigma_0^2} I + \frac{1}{\sigma_c^2} I\right)^{-1} \frac{1}{\sigma_0^2} I \, (x - x^0) \tag{47}$$

$$\hat{\delta}_x = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} (x - x^0) \tag{48}$$

elde edilir. (47) ve (48) eşitliklerinden parametrelerin yaklaşık değerlerine gelen düzeltmenin, sonsal varyanslarının önsel varyanslarına oranı ve kapanma vektörü (misclosure) ile orantılı olduğu gözükmektedir /14/. Korelasyonlu parametrelerin ilişkisi ise Şekil-2'de verilmektedir. Görüleceği üzere kısıtlarda uygulanan önsel varyanslar ile gözlemsilere gelecek düzeltmeler arasındaki ilişki doğrusal değildir. Ancak önsel varyanslar yeterince gevşek olduğunda önsel değerler hatalı bile olsa, parametrelere gelen düzeltmeler ihmal edilebilir düzeyde kalmaktadır.

Gözlemsiler yeniden parametrizasyon anlamına geldiğinden, indirgenmiş veri kümesi olarak sadece parametre tahmin değerleri ve kovaryans matrisi yeterli olmaktadır. Normal denklemlerin SINEX formatta tekrar oluşturulması için izlenebilecek bir yöntem de, parametrelerin tahmin değerleri ve kovaryans matrisi ile birlikte önsel parametre değerleri ve önsel kovaryans matrislerinin kullanılmasıdır. Buna göre,

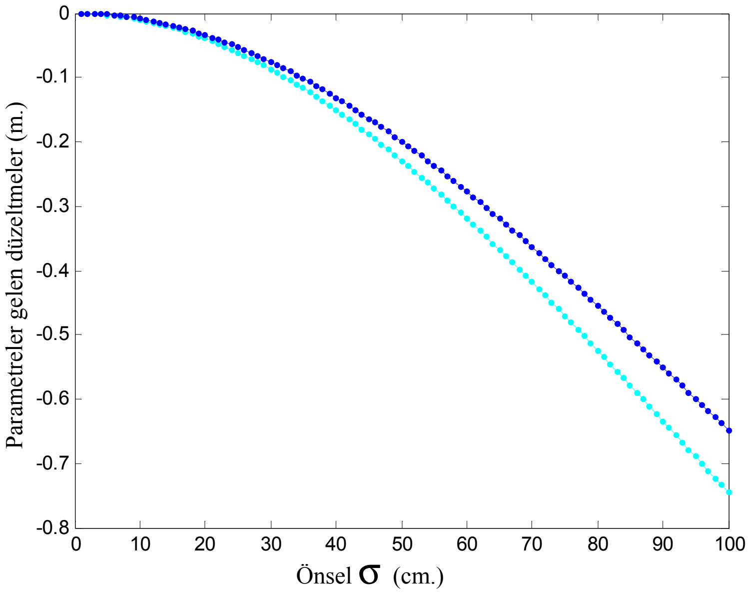
$$(A^T C_r^{-1} A + H^T C_{x0}^{-1} H) x = A^T C_r^{-1} l + H^T C_{x0}^{-1} c \tag{49}$$

şeklindeki normal denklemler sistemi,

$$A^T C_r^{-1} l + H^T C_{x0}^{-1} c = C_{\hat{x}}^{-1} \hat{x} \tag{50}$$

şeklinde yazılabilir. Önceki çözümde uygulanan kısıtları ifade eden normal denklemler sisteminin,

$$(H^T C_{x0}^{-1} H) x = H^T C_{x0}^{-1} c \tag{51}$$



Şekil-2: Kısıtın parametre düzeltmeleri üzerindeki etkisi

(Şekilde;Önsel değerleri 0.5 m artırılan (bozulan) parametrelere (1-100 cm)^2 arasında önsel varyans verilmiştir. Mavi 1 nolu noktanın, yeşil 3 nolu noktanın X koordinatlarına gelen düzeltmeyi göstermektedir. Yukarı eksen değiştirilen önsel değerlerden ilk değerlere geçişi göstermektedir).

olduğu hatırlanır ve daha önce (37) eşitliğiyle verilen ve kısıtların kaldırılması işlemiyle elde edilen,

$(A^T C_r^{-1} A)^{-1} = C_{\hat{x}}^{-1} - (H^T P_x H)^{-1}$ matrisine,

$$d = B \quad + \varepsilon \tag{52}$$

şeklinde yeni minimal kısıtlar uygulanırsa, minimum kısıtlı kovaryans matrisi ve parametre tahmin değerleri,

$$C_{\min}^{-1} = C_{\hat{x}}^{-1} - (H^T P_x H)^{-1} + (B^T P_b B) \tag{53}$$

$$\hat{x} = C_{\min} \, (C_{\hat{x}}^{-1} \hat{x} - C_{x0}^{-1} x^0 + B^T P_b d) \tag{54}$$

şeklinde elde edilir /4,5/. Burada kullanılan matris ve vektörler SINEX formatta,

$C_{\hat{x}}$: MATRIX_ESTIMATE
$\hat{x}$: SOLUTION_ESTIMATE
x^0 : SOLUTION_APRIORI
C_{x0} : MATRIX_APRIORI

bloklarında bulunmaktadır. Görüleceği üzere normal denklemler sistemi önsel ve sonsal parametre vektörleri ve kovaryans matrislerine indirgenmiş veri kümesinden tekrar oluşturulabilmektedir.

4. SONUÇ

Parametre tahminindeki iki temel yaklaşım (koşullu sistem ve Bayesian yaklaşım), Vanicek /24/ tarafından sert (hard) ve yumuşak (soft) olarak ayrılmıştır. Sağladığı esneklik nedeniyle çoğu zaman tercih edilen Bayesian yaklaşım, parametreler hakkında daha gerçekçi önsel bilgi sağlamaktadır. Bunun yanında serbest ağ dengelemesi teknikleri gibi normal denklemler matrisinin rankını ancak datum defektini giderecek kadar artırabilen Bayesian yaklaşım, serbest ağ tekniklerinin aksine, tek başına değişikliğe gerek duymadan parametre tahmininde de kullanılabilir.

İndirgenmiş veriler, ek (nuisance) parametrelerden arındırılmış yeni ölçüleri ifade etmektedir. Dolayısıyla bu ölçüler, indirgeme aşamasında herhangi bir şekilde bozulmadan (datuma bağlı düzeltmeler almadan) bir sonraki aşamaya aktarılabilmektedir. Bu nedenle, serbest ağ dengelemesi teknikleri, yapılan parametre tahminleri çoğu zaman, yanlı ve dolayısıyla optimal olmasa bile, ölçülere gelen düzeltmelerin datumdan bağımsız (değişmez, invariant) olması nedeniyle yoğun olarak kullanılmaktadır.

Gözlemsiler, kovaryans ilişkileri sayesinde, indirgeme aşamasında sahip olunan bilginin büyük bölümünü sonraki aşamaya taşıyabilmektedir. Ancak; farklı yöntem ve yazılımlarla elde edilen kovaryans matrislerin homojen yapıda olmadıkları bilinmektedir. Ayrıca kaldırılabilir kısıtların her durumda uygulama olanağı bulunmamaktadır. Bu durumun, indirgenmiş verilerin birleştirilmesinde bazı dengesiz ölçü ağırlıklandırmalarına yol açması olasıdır. Özelikle gözlemsiler arasındaki korelasyonun parametre uyuşumsuzluklarının tespitini güçleştirdiği bilinmektedir. Kısıtlı çözümlerde parametrelerin birer gözlem, uygulanan kısıtların da ağırlıktan başka bir şey olmadığı, ne kadar sıkı kısıt uygulanırsa uygulansın uyuşumsuz bir ölçü kümesi ile parametrelere büyük düzeltme değerleri gelebileceği unutulmamalı ve sıkı kısıtlı çözümlerde kısıt uygulanan parametrelere gelen düzeltmeler kontrol edilmelidir.

K A Y N A K L A R

/1/ Aktuğ, B. : GAMIT/GLOBK Kullanım Kılavuzu, Jeodezi Daire Başkanlığı, İç Yayın, 1999, Ankara.

/2/ Aktuğ, B. : Elastik Yarı-Uzay Modelleri ve Depremsel Koordinat Değişimlerine Dinamik Bir Yaklaşım, Harita Dergisi, Ocak, 2003, Ankara.

/3/ Aktuğ, B. : ITRF Hız Alanı ve Göreli Hız Referans Sistemlerine Bakış, Harita Dergisi, Temmuz, 2003, Ankara.

/4/ Altamimi, Z., Sillard, P., Boucher, C. : ITRF2000: A New Release of the International Terrestrial Reference Frame for Earth Science Applications, Geophysical Research Letters, Vol.107, No.B10, pp.2214, 2002.

/5/ Altamimi, Z., Sillard, P., Boucher, C. : New Trends for the Realization of the International Terrestrial Reference System, Adv. Space Res., Vol.30, No.2, pp.175-184, 2002.

/6/ Borre K., Strang, G. : Linear Algebra, Geodesy and GPS, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1997.

/7/ Boucher, C, Altamimi, Z. : ITRF and its relationship to GPS, GPS World, Volume 7, Number 9, September 1996.

/8/ Caspary, W.F. : Concepts of Network and Deformation Analysis, Monograph No.11, University of New South Wales, Australia, 1987.

/9/ Demir, C. : Serbest Ağ Dengelemesi Ders Notları, Harita Yüksek Teknik Okulu, 1999.

/10/ Davies, P., Blewitt, G. : Methodology for Global Geodetic Time Series Estimation: A new tool for geodynamics, J.Geophys. Res., 105, 11,083-11,100, 2000.

/11/ Dong, D., Herring, T.A., King, R.W. : Estimating Regional Deformation from a combination of space and terrestrial geodetic data, Journal of Geodesy, 72, 200-214, 1998.

/12/ El-Sheimy, N. : Adjustment of Observations, Lecture Notes, University of Calgary, Canada, 2001.

/13/ Gelb, A. : Applied Optimal Estimation, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1974.

/14/ Gill, P.E., Murray, W., Wright, M.H. : Practical Optimization, Academic Press, 1981.

/15/ Herring, T.A. : Geodesy by Radio Interferometry: The Application of Kalman Filtering to Very Long Baseline Interferometry, J.Geophys. Res., 95, 12561-12581, 1990.

/16/ Krakiwsky, E.J. : Adjustment, Elementary Level, Lecture Notes, University of Calgary, Canada, 1995.

/17/ Liebelt, : An Introduction to Optimal Estimation,Addison-Wesley, Massachusetts, 1967

/18/ Leick, A. : GPS Satellite Surveying, Wiley & Sons Publication, New York, 1990.

/19/ Mikhail, E.M., Ackermann, F. : Observations and Least Squares, IEP Series in Civil Engineering, Harper & Row Publishers, New York, 1976.

/20/ Nakiboğlu, M., Demir, C. : Dengeleme Hesabı, Cilt.I-II, Harita Yüksek Teknik Okulu Ders Notları, Ankara, 2003.

/21/ Segall, P., Matthews, M.V. : Displacement Calculations from Geodetic Data and the Testing of Geopyhsical Deformation Models, J.Geophys. Res., 93, 14,954-14,966, 1988.

/22/ Sillard, P., Altamimi, Z., Boucher, C. : The ITRF Realization and its associated Velocity Field, Geophysical Research Letters, Vol.25, No.17, pp.3323-3226, Sep.,1998.

/23/ Sillard, P., Boucher, C. : Review of Algebraic Constraints in Terrestrial Reference Frame Datum Definition, Journal of Geodesy, 75, 63-73, 2001.

/24/ Vanicek, P., Krakiwsky, E.J. : Geodesy: The Concepts, North Holland Publishing Company, 1982.