# GÖZLEM DEĞERLERİNE EN İYİ UYAN AMPİRİK DENKLEMLERİN DETERMİNANTLA TAYİNİ

Yazan : Yük. Müh. E. Gnl.
Kerim EVİNAY ve
Ali EVİNAY, Fizikçi

AMPİRİK, gözlem ve deneye dayanan anlamına gelir.

Araştırmalaı da, bağımsız değişkenlerin (x) deney ve gözlemle elde edilen değerlerine karşılık fonksiyon değerleride (y) ölçülür. Bir koordinat sisteminde, bu karşılıklı (x) ve (y) değerleri taşınır. Düzensiz bir doğru veya eğri elde edilir.

Bundan sonra ana problem :

Gauss'un "En Küçük Kareler Metodu" ile Dengeleme Teorisinde gözlem sayısının bilinmeyenler sayısından çok olması şartı altında, bu düzensiz doğru veya eğri için gözlem değerlerine en iyi uyan, en çok yaklaşan doğru veya eğrinin denklemini bulmaktır. Bu denkleme Ampirik Denklem adı verilr.

İlk iş olarak, düzensiz doğru veya eğrinin aşağıdaki denklemlerden hangisine en yakın düştüğü kestirilir :

1. Doğru

   $Y = ax + b$

2. Parabol

   $Y = ax^2 + bx + c$

3. Yüksek dereceden ve çok terimli

   $Y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \dots$

4. Sinus, Cos, tg... gibi Periyodik

   $y = a + b \sin \frac{360^\circ}{m} x + c \cos \frac{360^\circ}{m} x +$

   $d \sin \frac{360^\circ}{m} 2x + e \cos \frac{360^\circ}{m} 2x + \dots$

5. Üslü fonksiyon

   $y = a\, x^b$

   $\log y = \log a + b \log x$

   $\ln y = \ln a + b \ln x$

   $\underline{y} = A + b\, \underline{x}$

1. Maddedeki şekle bir Doğru şekline çevrilmiş olur. indirgenmiş denklem

Burada :

Üslü fonksiyonlarda, önemli olan nokta, ağırlıklar eşit olsada, birinci derece denkleme indirgenmiş denklemlerin ağırlıkları, indirgemeden evvelki ağırlıkların ayni olmayışıdır :

| Gözlemlerde | Ağırlık | İndirgenmiş denklemde | Ağırlık | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $w_1$ | $\log y_1$ | $y_1^2$ | $w_1$ | |
| $y_2$ | $w_2$ | $\log y_2$ | $y_2^2$ | $w_2$ | |
| $y_n$ | $w_n$ | $\log y_n$ | $y_n^2$ | $w_n$ | olur. |

Bundan başka diğer iki önemli dengeleme kuralı göz önünde tutulmalıdır :

1. Ağırlıklar ortalama hataların kareleri ile ters orantılıdır :

$$w_1 M_1^2 = w_2 M_2^2$$

$$\frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{w^2}{w_1}$$

Ağırlıklar nispî sayılardır. Bu nedenle tam sayılara indirgenir. Ortalama gözlen değerine karşılık alınan ağırlık birimine oranla, gözlem sayısı o gözlemlerin ağırlığı olarak alınabilir.

2. Bir y - fonksiyonunun ortalama hatası, y nin ortalama hatası ile fonksiyonunu y'e göre türevi çarpımına eşittir :

$$m_{\log y} = m_y \frac{d(\log y)}{dy} = m_y \cdot \frac{1}{y}$$

$$W_{\log y} = w_y \cdot y^2$$

Kısaca :

Ampirik denklem gözlem ve deney sonunda elde edilen ölçülere en iyi uyan denklemdir.

Deney ve gözlemlerde, hem bağımsız değişken (x) ve hemde fonksiyon (y) ölçülür.

Şu halde, Ampirik denklemin tayininde, hem (x) ve hemde (y) bilinen değerlerdir. Ancak çok sayıda (x) ve (y) noktalarının çizimi bir koordinat sitemine göre yapılırsa bunun bir doğru veya bir eğri olduğu, fakat düzgün olamdığı görüüür. Bu noktalara yakın, en yakın geçecek olan eğrinin denkleminde katsayıları tayin edilmesi gerekir. Böylece :

En küçük kareler metodu uygulanarak düzgün bir eğri veya doğru denklemi, ampirik denklem elde edilir.

Önemli nokta, (x) ile (y) arasında fiziksel veya matematik bir bağıntı bilinmeyişidir. Bu nedenle denklemin seçimi en büyük önemi taşır. Bu ise hesapçının, matematik bilgisine bağlıdır.

Örnekler ve yazının sonunda verilen eğri ve doğru örnekleri bir fikir ve ilk adımı atabilmek için verilmiştir. Araştırmalarda bunlardan biri veya birkaçının birleşimi olabilir.

## AMPİRİK DENKLEMLERİN TANIMI

AMPİRİK : Gözlem ve deneye dayanan demektir.

AMPİRİK DENKLEM : Gözlem ve deneye dayanan, bağımsız (x) değişkeni ile bunun (y) fonksiyonu arasında teorik ve matematik bir bağıntı bulunmayan hallerde, bu gözlem değerlerine en iyi uyan ve istenen bağıntıyı veren denklemdir.

Araştırmalarda, ampirik denklem, bir çok kanunların bulunmasında yararlı olmuştur.

AMPİRİK DENKLEMİN TAYİNİ, GENEL YOL : Geodezi, fotogrametri, fizik, geofizik, astronomi ve benzeri bilim dallarında, bağımsız değişkenler ve fonksiyonları arasında teorik bir bağıntı kurmak imkânsız olduğu buna karşıt böyle bir bağıntının sezildiği, gerektiği veya arandığı hallerde Ampirik Denklem ve Çözüm elde kalan tek çözüm yoludur.

Ampirik denklemin tayini için :

1. Gözlem, deney veya ölçü değerleri (x, y gibi) bir koordinat sistemine göre taşınır.

2. Elde edilen doğru veya eğrinin, denklemi ile bilinen hangi eğriye en yakın düştüğü kestirilir. Bu kestirme ne kadar isabetli olursa, hatalar o kadar küçük olur. Örneklere bakınız.

3. Seçilen denklem en küçük kareler metodu şartlarını gerçekleştirecek şekle sokulur. Determinantla çözüm sağlayacak hal yolu uygulanır.

4. Ölçülen (x, y) değerleri yerlerine konur. Çözüm yapılarak denklemin katsayıları hesap edilir. Ampirik denklem elde edilmiş olur. Ampirik denklemin eğrisi ölçü ile bulunan noktalara en yakın geçen eğridir. Diğer deyimle farkların, hataların kareleri toplamı minimum olur.

5. Hatalar büyük çıkarsa, daha uygun bir eğri ve denklemi seçilir. 1-4 tekrar edilir.

Ampirik denklem, değişken ve fonksiyon değerlerinden, birinden diğerine geçiş, enterpolasyon ekstrapolasyon için kullanılır. Ancak ekstrapolasyonda çok dikkat edilmeli belirli sınırları aşmamalıdır.

Ampirik denklemler için, burada verilen teori ve örneklere dayanarak, Hava Nirengisinde, rakımların dengelenmesinde, bilinen rakımlara da $\pm$ 10 cm. - $\pm$ 30 cm. gibi bir hata tanımak ve ölçülen noktalara oranla daha yüksek bir ağırlık vererek rakım eğrisinde bu yüzden doğan gerilmeleri önlemek suretiyle yazarca yeni bir hava nirengisi dengeleme yolu ve örneğinin verilmesi düşünülmektedir.

## DENGELEME YOLU İLE GÖZLEM DEĞERLERİNDEN AMPİRİK DENKLEMLERİN DETERMİNATLA ÇÖZÜMÜ

Değişken ve fonksiyon değerleri gözlem yolu ile ölçülen veya türlü yollardan bilnen değerlere en iyi veya en büyük ihtimâl (belkilik) ile uyan denkleme verilen değerlerin ampirik denklemi denir.

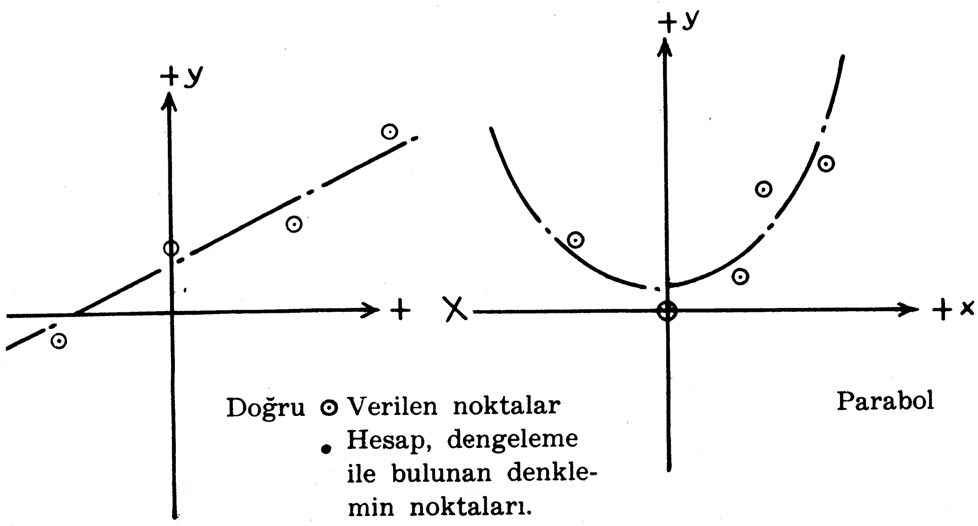
Ampirik, sadece deneye, görgüye, gözlem yolu ile ölçüye dayanan anlamına gelir.

Deney, gözlem, ölçü sonunda bilinen değişken (x) ve fonksiyon (y) değerleri arasında bir kesin matematik bağıntının bulunmadığı, bu denklemin bilinmediği kabul edilmiştir.

Bu durumda, bulunacak denklemin birinci derece (linear), ikinci derece (parabol, daire...) üslü (eksponansiyel) olup olmadığına hesaptan evvel karar vemek gerekir. Bunu onlamak için :

Deney veya gözlemle bulunan (x, y) değerleri yardımı ile çizim yolu ile doğru, eğri, parabol veya üslü, logaritmik eğrilerden hangisinin hesap ve dengelemeye dayanak, çıkış denklemi, başlangıç denklemi alınacağı yapılan çizim (çizge, grafik) incelenerek en yakın benzer şekil seçilir.

Bu şekil uygulama alanında, pratikte genel olarak ve çoğunca : doğru, parabol veya üslü bir denklem karakterini gösterir.




Ampirik denklem elde edilince x - değişkeninin türlü değerleri için y - fonksiyon değerleri denklem yardımı ile hesap edilir veya çizilen grafikten okunur.

Değişken (x) ile fonksiyon (y) arasında matematik bağıntı, denklem kurulmuş olur.

Astronomi, fizik ölçme bilgisi ve benzeri alanlarda uygulama sonunda güç prolemleri kolayca çözüme ulaştırır.

## VERİLEN ÜÇ NOKTADAN GEÇEN AMPİRİK DENKLEMİN DETERMİNANT YARDIMI İLE VE DENGELEME YOLU İLE ÇÖZÜMÜ

Gauss dengeleme yolu, en küçük kareler metodu ile dengeleme koşulları eksiksiz olarak uygulanmalıdır.

Ölçü ve gözlemle elde edilen değerler ancak gerçek değere yakın değerlerdir. Gerçek değer tam doğru olarak hiç bir zaman bilinmez, hesap edilemez.

Gauss, en iyi, en belkili değerin, gerçek değerle gözlem değerleri arasındaki farkların diğer deyişle hataların (r) kareleri toplamını minimum yapan değer olduğunu ispatlamış ve dengeleme, en küçük kareler metodu ile dengeleme hesabını kurmuştur. Buna göre :

Verilen üç noktadan geçecek doğrunun

$P_1\ (x_1\ ,\ y_1) = P_1\ (1\ ,\ 2)$

$P_2\ (x_2\ ,\ y_2) = P_2\ (o\ ,\ o)$

$P_n\ (x_n\ ,\ y_n) = P_3\ (2\ ,\ 2)$

(1) $y = a\,x + b$

denkleminde,$x_1 y_1;x_2y_2;x_3 y_3$ değerleri verildiğine veya gözlemle ölçüldüğüne göre

(2) $a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} V_i \ ; \ \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \text{Minimum}$

veya diğer deyimle verilen, bilinen$x_1\ y_1;x_2\ y_2;x_3\ y_3$ değerlere en iyi, en belkili olark uyan doğrunun a, b katsayılarını değişken olarak tayin etmek gerekir. Bu nedenle yukarıki denklem :

(3) $f\ (a\ ,\ b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = \text{Minimum}$

Bunun için, türevi alınarak sıfıra eşit kılınırsa :

(4) $f_1\ (a\ ,\ b) = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)\ x_i = 0$

(5) $f_2\ (a\ ,\ b) = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0$

$f_{11}\ (a\ ,\ b) = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$f_{12}\ (a\ ,\ b) = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i$

$f_{22}\ (a\ ,\ b) = 2 \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\,n$

1, değişken (b) nin katsayısıdır.

(4) ve (5) denklemleri a ve b ye göre çözüm yapılır ve doğru denklemine, doğrunun determinant şeklindeki denklemine konulacak olursa :

$$f_1(a\,,\,b) = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = 0 \tag{4'}$$

$$f_2(a\,,\,b) = a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \tag{5'}$$

$$f(a\,,\,b) = ax + b - y$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Örnek :

Örnek olarak verilen üç noktanın (x, y) değerleri (6) denklemine konulursa:

$$P_1\ (1\ ,\ 2)\ ;\ P_2\ (0\ ,\ 0)\ ;\ P_3\ (2\ ,\ 2)\ :$$

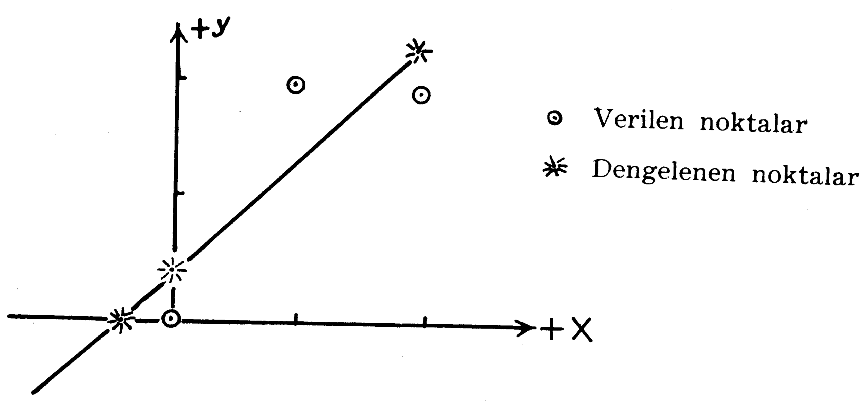
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -\,6\,x + 6y - 2 = 0$$

$$y = x + \frac{1}{3}$$

$$a = 1$$

$$b = \frac{1}{3}$$

Denklemi ve (a,. b) değerleri dengelenmiş olark elde edilir. Çizimi yapılırsa :




Verilen noktalarla, dengeleme hesabı sonunda bulunan ampirik denklem arasındaki farklar veya hatalar (v), hataların kareleri toplamı ($v^2$) hesap edilirse :

$$y = x + \frac{1}{3}$$

$$2 = 1 + \frac{1}{3} \; ; \; 1 + \frac{1}{3} - 2 = - \frac{2}{3} = v_1 \qquad v_1^2 = \frac{u}{9}$$

$$0 = 0 + \frac{1}{3} \; ; \; 0 + \frac{1}{3} - 0 = + \frac{1}{3} = v_2 \qquad v_2^2 = \frac{1}{9}$$

$$2 = 2 + \frac{1}{3} \; ; \; 2 + \frac{1}{3} - 2 = + \frac{1}{3} = v_3 \qquad v_3^2 = \frac{1}{9}$$

$$v_1 + v_2 + v = \sum_{i=1}^{n} v = 0$$

$$- \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$f(a\,,\,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = \text{Minimum.}$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ Minimum.}$$

Şu halde verilen üç noktaya en iyi en yakın geçen doğru denklemi elde edilmiş olur. Herhangi diğer bir doğru ile verilen noktalar arasındaki farklar veya hataların (v) kareleri toplamı ($\frac{2}{3}$)ten daha küçük olamaz. Bu nedenle Gauss tarafından verilen ve ayrıntıları ile geliştirilen dengeleme hesabına "En Küçük Kareler Metodu ile Dengeleme Hesabı" adı verilmiştir.

Bir tek gözlemin, burada verilen bir tek noktanın ortalama hatası :

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \; ; \; m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$$

Burada M, ortalamanın ortalama hatasıdır.

$$m = \pm \sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{3-1}} = \pm \sqrt{\frac{2}{6}} = \pm \frac{1}{1.7} = \pm\ 0.58$$

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{3}} = \pm \frac{0.58}{1.7} = \pm\ 0.34$$

Yukarıki şekilden bu sayı kabaca görülebilir.

Kontrol ve Uygulama :

Dengeleme sonunda bulunan ve verilen üç noktaya en yi uyan, en büyük ihtimalle en yakın geçen doğru denklemi ve üzerinde dört noktanın koordinatlarını yazalım :

$$f(a\,,\,b)\quad a\,x + b - y = 0$$

$$-6x + 6y - 2 = 0$$

$$y = x + \frac{1}{3}$$

| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| y | $\frac{4}{3}$ | $\frac{7}{3}$ | $\frac{10}{3}$ | $\frac{13}{3}$ |

$$a\,x + b - y = 0$$

$$1\,a + b - \frac{4}{3} = 0 \qquad v_1 = 0$$

$$2\,a + b - \frac{7}{3} = 0 \qquad v_2 = 0$$

$$3\,a + b - \frac{10}{3} = 0 \qquad v_3 = 0$$

$$4\,a + b - \frac{13}{3} = 0 \qquad v_4 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 10 \qquad \sum_{i=1}^{n} 1 = 4 \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{34}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 30$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, y_i = \frac{100}{3}$$

$$a = 1 \qquad b = \frac{1}{3}$$

$$30\,a + 10\,b - \frac{100}{3} = 0 \qquad\Big|\qquad 30 + \frac{10}{3} - \frac{100}{3} = 0$$

$$10\,a + 4\,b - \frac{34}{3} = 0 \qquad\Big|\qquad 10 + \frac{4}{3} - \frac{34}{3} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 10 & \frac{34}{3} & 4 \\ 30 & \frac{100}{3} & 10 \end{vmatrix} = -20\,x + 20\,y - \frac{20}{3} = 0$$

$$-x + y - \frac{1}{3} = 0$$

$$y = x + \frac{1}{3}$$

İlk bulunan denklem elde edilmiş olur. Verilen dört nokta da doğru üzerindedir.

Kontrol ve Uygulama :

Dengeleme sonunda bulunan ve verilen üç noktaya en iyi, en büyük ihtimalle en yakın geçen doğru denklemi ve üzerinde bir kaç noktanın koordinatlarını yazalım :

$f\ (a\ ,\ b) = ax + b - y$

$$y = x + \frac{1}{3}$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 3 | 4 | 2 | 1 |
| y | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{10}{3}$ | $\frac{13}{3}$ | $\frac{7}{3}$ | $\frac{4}{3}$ |

Doğru üzerinde alınan bu noktalardan son dört noktadan geçen doğrunun denklemi :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 10 & \frac{34}{3} & 4 \\ 30 & \frac{100}{3} & 10 \end{vmatrix} = -20x + 20y - \frac{20}{3} = 0$$

$$-x + y - \frac{1}{3} = 0$$

$$y = x + \frac{1}{3}$$

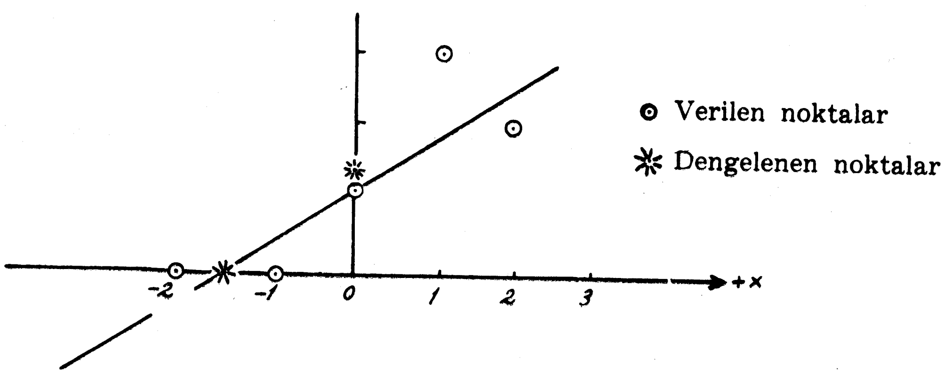
Evvelki denklem elde edilmiş olur. Verilen bütün noktalar doğru üzerindedir.

Örnek :

Aşağıda verilen beş noktadan geçen doğru denklemini en küçük kareler metoduna uygun olarak dengeleme ile bulunuz.

$x = -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

$y = 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 2$




$$\begin{aligned} a\,x_1 + b - y_1 &= v_1 \\ a\,x_2 + b - y_2 &= v_2 \\ a\,x_3 + b - y_3 &= v_3 \\ a\,x_4 + b - y_4 &= v_4 \\ a\,x_5 + b - y_5 &= v_5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -2a + b - 0 &= v_1 \\ -1a + b - 0 &= v_2 \\ 0 + b - 1 &= v_3 \\ 1a + b - 3 &= v_4 \\ 2a + b - 2 &= v_5 \end{aligned}$$

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \qquad 0\,a + 5b - 6 = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \text{Minimum} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 10 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = -7$$

Şartına göre aranılan doğrunun denklemi :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & +6 & 5 \\ 10 & +7 & 0 \end{vmatrix} = -35x + 50y - 60 = 0$$

$$y = +\frac{35}{50}x + \frac{60}{50}$$

$$x = 0 \text{ için } y = +\frac{60}{50} = +1.2$$

$$x = -\frac{60}{35} = -1.6 \text{ için } y = 0$$

| | |
|---|---|
| $v_1 = -0.2$ | $v_1^2 = +0.04$ |
| $v_2 = +0.5$ | $v_2^2 = +0.25$ |
| $v_3 = +1.2 - 1 = +0.2$ | $v_3^2 = +0.04$ |
| $v_4 = +1.9 - 3 = -1.1$ | $v_4^2 = +1.21$ |
| $v_5 = +2.6 - 2 = +0.6$ | $v_5^2 = +0.36$ |
| $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 0$ | $[v^2] = 1.90$ |

Bir tek noktanın ortalama hatası :

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{1.90}{4}} = \pm\sqrt{0.475} = \pm 0.7$$

Ortalamanın ortalama hatası :

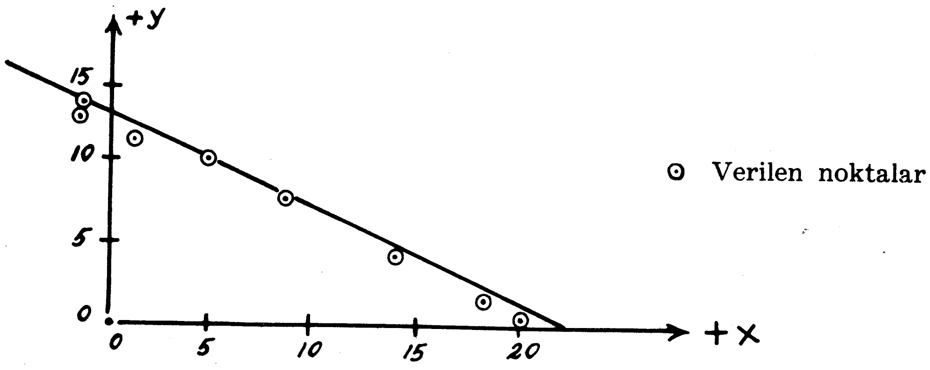
$$M = \mp\frac{m}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0.7}{\sqrt{5}} = \pm\frac{0.7}{2.2} = \pm 0.32$$

Örnek :

**Aşağıda verilen yedi noktaya göre en iyi, en büyük ihtimalle geçen doğrunun denklemini en küçük kareler metoduna göre bulunuz. (x, y değerleri pratikte, teorik ve belirli bir bağıntısı olmayan herhangi ölçüler olabilir. Bu ölçülerden gerekli ampirik denklemin hesabı istenmektedir.)**

Verilen değerlere veya ölçülen değerler :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | — 1.0 | + 1.0 | + 5.0 | + 9.0 | + 14.0 | + 17.0 | + 20.0 |
| y | + 14.0 | + 13.0 | + 10.7 | + 8.0 | + 5.0 | + 2.9 | + 1.0 |




Verilen değerler doğru denklemine konup, aşağıdaki gibi düzenlenirse:

$$y = ax + b$$

$$ax + b - y = 0$$

$$\begin{aligned}
-\ a + b - 14.0 &= 0 \\
-\ a + b - 13.0 &= 0 \\
+\ 5a + b - 10.7 &= 0 \\
+\ 9a + b - 8.0 &= 0 \\
+\ 14a + b - 5.0 &= 0 \\
+\ 17a + b - 2.9 &= 0 \\
+\ 20a + b - 1.0 &= 0
\end{aligned}$$

Bu denklemlerden (gözlem denklemleri, normal denklemler kurulursa:

$$\begin{aligned}
65\,a + 7\,b - 54.6 &= 0 \\
993\,a + 65\,b - 263.8 &= 0
\end{aligned}$$

Bu normal denklemlerin çözümü sonunda :

$a = -0.63$ $\qquad b = +13.62$

Ampirik denklem ise :

$Y = -0.63x + 13.62$ elde edilmiş olur.

Verilen değerler bu denkleme konursa her nokta için **hatalar** elde edilir :

| x | y | y' | v | $v^2$ |
|---|---|---|---|---|
| — 1.0 | 14.0 | 14.25 | + 0.25 | 0.0625 |
| — 1.0 | 13.0 | 12.98 | — 0.02 | 4 |
| 5.0 | 10.7 | 10.47 | — 0.23 | 529 |
| 9.0 | 8.0 | 7.95 | — 0.05 | 25 |
| 14.0 | .5.0 | 4.80 | — 0.20 | 400 |
| 17.0 | 2.9 | 2.91 | + 0.01 | 1 |
| 20.0 | 1.0 | 1.02 | + 0.02 | 4 |
| 0.0 | | + 13.62 | | 0.1588 = $[v^2]$ |
| 21.6 | | 0.00 | | |

$$m = \pm \sqrt{\frac{0.1588}{7-1}} = \pm 0.17 \qquad M = \pm \frac{0.17}{7} = \pm 0.024$$

## BİLİNMEYEN x, y, z... ARASINDA BİRİNCİ DERECE FONKSİYON (DOĞRUSAL = LİNEAR FONKSİYON)

a, b, c... katsayıları, k = değişmez olarak; birnci derece fonksiyonu :

a x + by + cz +... k i şeklindedir.

Gözlem Denklemleri :

Ayrı ayrı gözlem değerlerinin bağıntılarını gösteren cebirsel denklemlerdir.

Gözlemle bulunan fonksiyon değerleri, $M_1$, $M_2$, $M_3$... M ve bunlara ilişkin ağırlıklar $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots \omega_n$ ise, gözlem denklemleri :

$$a_1x + b_1y + \ldots + k_1 = M_1 \qquad W_1$$
$$a_2x + b_2y + \ldots + k_2 = M_2 \qquad W_2$$
$$a_nx + b_ny + \ldots + k_n = M_n \qquad W_n$$

Bu denklemlerin sayısı gözlem sayısı kadar olur. 1, 2.. n gözlem ve denklemini gösterir.

Bu gözlemlerden elde edilebilecek en büyük ihtimalle en iyi x, y, z... değerleri bu yukarıki denklemlere konulursa fonksiyon değerinde (M), bir fark (v) meydana gelir. Bu denklemlere gözlem denklemleri denir. En büyük ihtimalle bu gözlemlerden elde edilecek x, y, z... değerleri X, Y, Z... ile gösterilirse :

$$
\begin{array}{ll}
a_1X + b_1Y + c_1Z + \dots + k_1 = M_1 + v_1 & W_1 \\
a_2X + b_2Y + c_2Z + \dots + k_2 = M_2 + v_2 & W_2 \\
a_nX + b_nY + c_nZ + \dots + k_n = M_n + v_n & W_n \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + l_n = k_n - M_n &
\end{array}
$$

Gözlem denklemleri veya hata denklemleri elde edilir.

En büyük ihtimalle en iyi değeri (X, Y, Z...) bulabilmek için farkların veya hataların (v) ağırlıklı kareleri toplamı minimum olmalıdır. (Gauss):

$$v_1^2 W_1 + v_2^2 W_2 + \dots v_n W_n = \text{Minimum}$$

Bu şart için, X, Y, Z... bağ... değişken olduklarından yukarıki denklemlerin bu değişkenlere oranla her birinci türevlerinin sıfıra eşit olması gerekir :

$$W_1 V_1 \frac{dv_1}{dx} + W_2 V_2 \frac{dv_2}{dx} + \dots + W_n V_n \frac{dv_n}{dx} = 0$$

$$W_2 V_2 \frac{dv_1}{dy} + W_2 V_2 \frac{dv_2}{dy} + \dots + W_n V_n \frac{dv_n}{dy} = 0$$

Bilinmeyenlerin (X, Y, Z...) her biri için böyle bir denklem olacaktır.

Hataların (v) değerlerini gösteren bir evvelki denklemler yerlerine konursa :

$$W_1 a_1 (a_1X + b_1Y + \dots l_1) +$$
$$W_2 a_2 (a_2X + b_2Y + \dots l_2) + \dots + W_n a_n (a_nX + b_ny + \dots l_n)$$

$$W_1 b_1 (a_1X + b_1Y + \dots + l_1) +$$
$$W_2 b_2 (a_2X + b_2Y + \dots l_2) + \dots W_na_n (a_nX + b_ny + \dots l_n) = 0$$

Çarpmalar yapılır, benzer terimler toplanırsa, Normal Denklemler elde edilir :

$$[Waa]\ X + [Wab]\ Y + (Wac)\ Z + \dots + (Wal) = 0$$
$$[Wab]\ X + [Wbb]\ Y + (Wbc)\ Z + \dots + (Wbl) = 0$$
$$[Wca]\ X + [Wcb]\ Y + (Wcc)\ Z + \dots + (Wcl) = 0$$

Normal Denklemlerin sayısı bilinmiyenlerin sayısı kadardır. Bu nedenle birlikte çözümü yapılabilir.

Çözüm sonunda dengelenmiş olarak :

$a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ \dots\ l$

$ax + by + cz + \dots + l \qquad l = k - M$

değerleri elde edilir.

Ağırlıklar ( W ) birbirine eşit ise :

Normal Denklemler :

$$(a^2)\ X + (ab)\ Y + (ac)\ Z + \dots + (al) = 0$$
$$(ba)\ X + (b^2)\ Y + (bc)\ Z + \dots + (bl) = 0$$
$$(ca)\ X + (cb)\ Y + (c^2)\ Z + \dots + (cl) = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

şeklini alır

**Normal Denklemlerin Çözümü**

Normal denklemler genel şekli ile :

$$[aa]\,x + [ab]\,y + [al] = 0$$

$$[ab]\,x + [bb]\,y + [bl] = 0$$

Çözümü

| x | y | c | | Tanım |
|---|---|---|---|---|
| [aa] | [ab] | [al] | [as] | $[aa] + [ab] + [al] = [as]$ |
| —1.0000 | $-\frac{[ab]}{[aa]}$ | $-\frac{[al]}{[aa]}$ | $-\frac{[as]}{[aa]}$ | |
| | [bb] | [bl] | [bs] | $[ab] + [bb] + [bl] = [bs]$ |
| | $-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$ | $-\frac{[ab]}{[aa]}[al]$ | $-\frac{[ab]}{[aa]}[as]$ | |
| | [bb . 1] | [bl . 1] | [bs . 1] | $[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]$ |
| | — 1.0000 | $-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$ | $-\frac{[bs.1]}{[bb.1]}$ | $[bl.1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al]$ |
| | | | | $[bs.1] = [bs] - \frac{[ab]}{[aa]}[as]$ |

$$-y - \frac{[bl.1]}{[bb.1]} = 0 \qquad y = -\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$$

$$-X - \frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[al]}{[aa]} = 0$$

$$X = +\frac{[ab]}{[aa]}\,\frac{[bl.1]}{[bb.1]} - \frac{[al]}{[aa]}$$

Normal Denklemle Çözümü

Normal Denklemleri nÇözümü

Örnekte elde edilen normal denklemler :

$$993a + 65b - 263.8 = 0$$
$$65a + 7b - 54.6 = 0$$

| x | y | c | |
|---|---|---|---|
| + 993 | + 65 | — 263.8 | + 794.2 |
| — 1.0000 | — 0.065458 | + 265660 | —0.799799 |
| | + 7.0000 | — 54.6000 | + 17.4000 |
| | — 4.2547 | + 17.2678 | — 51.9867 |
| | + 2.7453 | — 37.3322 | — 34.5867 |
| | — 1.0000 | + 13.5986 | 12.5985 |
| | | + 13.5986 | +0.265660 |
| | | + 13.5986 | —0.890137 |
| | | | — 0.6245 |

Kontrol :

$$+ 993\ a + 65\ b - 263.8 = 0$$
$$- 620.10 + 883.90 - 263.8 = 0$$
$$65\ a + 7\ b - 54.6 = 0$$
$$- 40.59 + 95.19 - 54.6 = 0$$

## BİRİNCİ DEDECE DENKLEMLERİN DETERMİNANTLA ÇÖZÜMÜ

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t = b_3$$
$$a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t = b_4$$

$$Dx = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad Dy = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$Dz = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix} \quad Dt = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{Dx}{D} \quad y = \frac{Dy}{D} \quad z = \frac{Dz}{D} \quad t = \frac{Dt}{D}$$

iki bilinmeyen için :

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

$$Dx = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad Dy = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{Dx}{D} \quad y = \frac{Dy}{D}$$

Bu nedenle doğrunun denklemi, determinant olarak :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Örnek :

$x = 3 \qquad y = 4$ ise

$$2x + 4y = 22$$
$$5x + 3y = 27$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 22 & 4 \\ 27 & 3 \end{vmatrix} \quad Dy = \begin{vmatrix} 2 & 22 \\ 5 & 27 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-42}{-14} = 3$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-56}{-14} = 4$$

**DOĞRUNUN DENKLEMİ :**

Bir doğrunun denklemi için üzerindeki iki noktanın$P_1(x_1,y_1)$;$P_2(x_2,y_2)$ verilmiş olması analitik geometriden bilindiği gibi gerekli ve yeterlidir.

İki nokta yerine üç ve daha çok nokta verilirse, ayni zamanda bu değerler gözlemle bulunduğu için tam doğru üzerine düşmeyip, bir dağılma varsa (gözlem hataları... gibi), verilen üç nokta ile beliren üçgenin alanının sıfır olması halinde, her üç nokta bir doğru üzerinde bulunur. Bu üçgen alanının sıfır olma şartı yine analitik geometriedn yazılırsa aynı zamanda bu üç noktadan geçen doğru denklemi elde edilmiş olur.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir.

Örnek :

$P_1$ (0 , 0) ; $P_2$ (1, 0) ; $P_3$ (0 ,0) Üç noktadan geçen doğru :

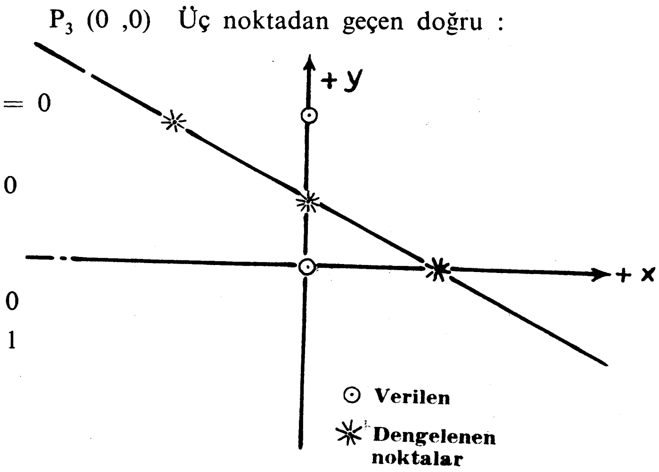
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + 2y - 1 = 0$$

$x = 0$ için $y = \frac{1}{2}$

$x = 1$ için $y = 0$

$x = -1$ için $y = 1$



## ÖZÜR

Dizgide yapılan bir hatadan dolayı 101 nci sahife dergi içinde ciltli olarak sunulamamıştır. Ayrıca 100 ncü sahifedeki şekil 7 de ters basılmıştır.

Okurlarımızdan özür dileriz.

DERGİ YÖNETİM KURULU

$D = 0$ ise :

her iki denkleme ait doğruların aynı eğimi varıdr. Bu halde :

a. Her iki doğru üst üste düşer :

$2x + 3y = 5$

$4x + 6y = 10$

$y = (5-2x)/3$ olacak şekilde x her değeri alabilir. P (x,y) noktası her iki doğru üzerinde de bulunur.

b. Her iki doğru birbirine paraleldir : Her iki doğru denklemini ayni anda gerçekliyen bir (x,y) sayı çifti yoktur.

## DOĞRUNUN DENKLEMİ DETERMİNANT OLARAK

İki belirli nokta verilmiş olsun :

$P_1 (x_1, y_1)$

$P_2 (x_2, y_2)$

Birici derence denklemde yerlerine konursa :

$Ax + By + C = 0$

$Ax_1 + By_1 + C = 0$

$Ax_2 + By_2 + C = 0$

veya determinant olarak :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Çünkü bu determinant açılacak olursa :

$$x (y_1 - y_2) - y (x_1 - x_2) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

elde edilen bu denklemin

$Ax + By + C = 0$

şeklinde birinci derece diğer deyişle doğrunun denklemi olduğu görülür.

## DOĞRUNUN DENKLEMİ, DETERMİNANT OLARAK, ANALİTİK GEOMETRİ İLE

Verilen üç noktanın

$P_0\ (x_0\ ,\ y_0)$

$P_1\ (x_1\ ,\ y_1)$

$P_2\ (x_2\ ,\ y_2)$

ayni bir doğru üzerinde bulunması için analitik geometride şart; doğrunun aşağıdaki denklem şekli seçilerek :

$$A\ x + By + C = 0$$

$$A\ x_0 + By_0 + C = 0$$

$$A\ x_1 + By_1 + C = 0$$

$$A\ x_2 + By_2 + C = 0$$

Bu denklemler homogen($y_1 = y_2 = ...yn = O$)birinci derece denklemi olarak) olduklarından aranılan şart için :

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Burada $P_0\ (x_0,\ y_0)$ noktası değişken nokta $P\ (x,\ y)$ olarak alınırsa, doğrunun determinant olarak denklemi :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

elde edilmiş olur.

Bu determinant açılacak olursa :

$$x\,(y_1 - y_2) - y\,(x_1 - x_2) + x_1\,y_2 - x_2\,y_1 = 0$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \; (= m)$$

Şu halde yukarıki determinant doğrunun denklemidir.

Geometrik anlamda :

Her P (x, y) doğru üzerindeki nokta diğer iki $P_1$ $(x_1 , y_1)$ ve $P_2$ $(x_2 , y_2)$ nokta ile birlikte alanı sıfır olan bir üçgen meydana getirir. Böylece her an üç nokta bir doğru üzerinde bulunur.

Örnek :

$P_1$ (2 , 3) ; $P_2$ (5 , — 4) noktalarından geçen doğrunun denklemi :

$$\frac{y - 3}{x - 2} = \frac{-4 - 3}{5 - 2} = -\frac{7}{3}$$

$$7x + 3y - 23 = 0$$

Örnek :

Verilen üç $P_1$ (2,1); $P_2$ (3,−2); $P_3$ (— 4,—1) noktaları ile belirli üçgen kenarlarının denklemleri :

$$x + 7y + 11 = 0$$
$$3y - x - 1 = 0$$
$$3x + y - 7 = 0$$

Örnek

Aşağıda verilen yedi noktaya en yakın geçen doğruya dengeleme yolu ile tayin ediniz.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | —1.0 | + 1.0 | + 5.0 | +9.0 | +14.0 | +17.0 | +20.0 |
| y | +14.0 | +13.0 | +10.7 | +8.0 | + 5.0 | + 2.9 | + 1.0 |

$$
\begin{aligned}
- \ a + b - 14.0 &= 0\\
+ \ a + b - 13.0 &= 0\\
+ 5a + b - 10.7 &= 0\\
+ 9a + b - 8.0 &= 0\\
+ 14a + b - 5.0 &= 0\\
+ 17a + b - 2.9 &= 0\\
+ 20a + b - 1.0 &= 0
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \sum_{i=1}^{n} 1 \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 993 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = 263.8$$

$$65 \quad 7 \quad 54.6$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 65 & 54.6 & 7 \\ 993 & 263.8 & 65 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} + 3549.0 \\ - 1846.6 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} + 4225 \\ - 6951 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} + 17147.0 \\ - 54217{,}8 \end{pmatrix} = 0$$

$$1702.4 \ x + 2726 \ y - 37070.8 = 0$$

$$\underline{\underline{y = + 13.599 - 0.625 \ x}}$$

veya :

$$65a + 76 - 54.6 = 0$$

$$993a + 65b - 263.8 = 0$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} - 54.6 & +7 \\ -263.8 & +65 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} + 7 & + 65 \\ +65 & +993 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} -3549.0 \\ +1846.6 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} +6951 \\ -4225 \end{pmatrix}} = \frac{- 1702{,}4}{+2726.0} = - 0.6245$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 65 & -54.6 \\ 993 & -263.8 \end{vmatrix}}{2726} = \frac{\begin{pmatrix} -17147.0 \\ +54217.8 \end{pmatrix}}{2726} = \frac{37070.8}{2726} = +13.5986$$

yerlerine konursa :

$$y = +13.599 - 0.625\ x$$

Örnek : Parabol

Dengeleme yolu ile aşağıda koordinat değerleri ile verilen dört noktadan bir Parabol geçirmek :

$P_1$ (—1 , 1)
$P_2$ (0 , 0)
$P_3$ (1 , 1)
$P_4$ (3 , 2)

Parabol denkleminde :

$$Y = ax^2 + bx + c$$

dört nokta için (x, y) değerleri verilmiş olduğundan a, b, c, katsayılarının değişken gibi tayini gerekir. Bu tayinde :

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

değeri Minimum olması şartı yerine gelmelidir. Gauss enküçük kareler metodu ile dengeleme şartı böylece yerine getirilmiş olacaktır. Bu nedenle (a, b, c,) fonksiyonunun değişken sayılan a, b ve c ye göre türevleri sıfır olmalıdır :

$$f_1(a, b, c) = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)\ x_i^2 = 0$$

$$f_2(a, b, c) = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)\ x_i = 0$$

$$f_3(a, b, c) = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0$$

Buradan :

$$f_1\,(a, b, c) = a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 0$$

$$f_2\,(a, b, c) = a \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$$

$$f_3\,(a, b, c) = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i + c \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

$$f\,(a, b, c) = ax^2 + bx + c - y = 0$$

Genel denklemine uygun olarak yukarıki üç denklemde verilen (x, y) koordinat değerleri dört nokta için (bilinmeyenden bir fazla) toplamları hesap edilerek determinant şeklinde yazılır ve yerlerine konursa :

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ 11 & 3 & 4 & 4 \\ 27 & 11 & 6 & 3 \\ 83 & 27 & 20 & 11 \end{vmatrix}$$

$$x^2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 11 & 6 & 3 \\ 27 & 20 & 11 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 11 & 4 & 4 \\ 27 & 6 & 3 \\ 83 & 20 & 11 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 11 & 3 & 4 \\ 27 & 11 & 3 \\ 83 & 27 & 11 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 11 & 3 & 4 \\ 27 & 11 & 6 \\ 83 & 27 & 20 \end{vmatrix} = 0$$

$$90x^2 \quad - 42x \quad - 440y \quad + 224 = 0$$

$$220y = 45x^2 - 21x + 112$$

Parabol denklemi elde edilir. Bu parabol denklemi verilen dört noktaya en iyi uyan bir parabol denklemidir. Çünkü bu denklemin hesap edilmesinden evvel, a, b, c katsayılarının parabolun denklemine konulması ile meydana gelecek [f (a, b, c) − y] farklarının veya hatalarının kareleri toplamının Minimum olması şartı konularak denklemler ve çözüm yapılmıştır.

Şimdi son bulunan parabol denklemini ve verilen dört noktayı çizim yolu ile karşılaştıralım; Bunun için kısaca :

$$220y = 45x\mathbf{r} - 21x + 112$$

| x | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | $\frac{334}{220}$ | $\frac{168}{220}$ | $\frac{112}{220}$ | $\frac{136}{220}$ | $\frac{250}{220}$ | $\frac{454}{220}$ | $+\infty$ |

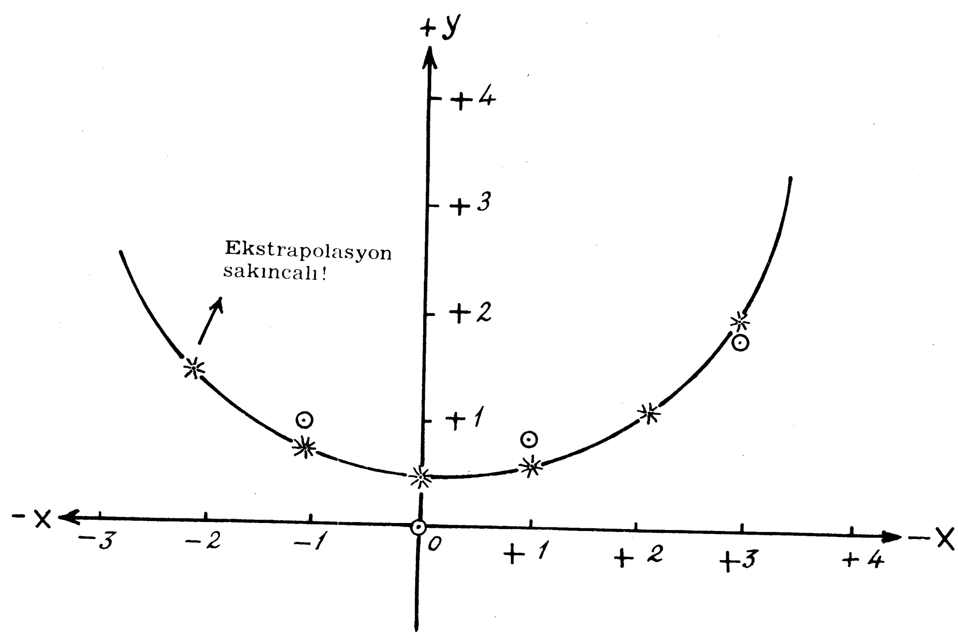
Çizimsel olarak gösterilirse;

Dengelemeden önce verilen noktalar, gözlem değerleri olarak O işareti ile x, y değerlerine göre çizilmiştir. Bunlar :

$P_1$ (—1 ,1)
$P_2$ (0 , 0)
$P_3$ (1 , 1)
$P_4$ (3 , 2) noktalarıdır.

Dengelemeden sonra elde edilen denklemin eğrisi de gösterilmiştir.

Pratik uygulamada, bu eğrinin verilen dört nokta bölümü kullanılır. Bu noktalar dışındaki bölümü yanlış, çok hatalı değerler verebilir.




⊙ Verilen noktalar

✳ dengelenen noktalar

Burada verilen noktalarda bulunan parabol arasındaki hatalar :

$f(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx + c - y_i)^2 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = -0,04 + 0.25 - 0.16 + 0.04 = -0.20 + 0.29 = \text{Minimum}$

$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$ olması gerekir. (Kontrol)

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \left(\frac{168}{220} - 1\right) + \left(\frac{112}{220} - 0\right) + \left(\frac{136}{220} - 1\right) + \left(\frac{454}{220} - 2\right) = 0$$

$$= -\frac{52}{220} + \frac{112}{220} + \frac{84}{220} + \frac{14}{220}$$

$$= -\frac{136}{220} + \frac{136}{220}$$

$$= 0$$

Bu kontrol yapılan hesapların doğruluğunu gösterir.

Örnek :

Aşağıda verilen üç noktadan dengeleme yolu ile bir parabol geçiriniz.

$P_1\ (0\ ,\ 1)$
$P_2\ (1\ ,\ 4)$
$P_3\ (-1\ ,\ 0)$
$y = ax^2 + bx + c$

Denkleminde a, b, c değerlerinin tayini gerekir. Bunun için evvelki örneğe ve denklemlere göre :

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$x^2 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x^2 + 8x - 4y + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x - y + 4 = 0$$

$$y = x^2 + 2x + 1$$

Parabol denklemi elde edilir.

Bu parabol denkleminin grafiği çizilir ve evvelce verilen üç nokta koordınatlarına göre yerlerine konursa, hepsinin parabol üzerinde bulunduğu görülür.

Bu örnekte,

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 = \text{Minimum}$$

Şartından başka bunun sıfıra eşit oluşu da birlikte mevcuttur. Çünkü, verilen üç nokta kasten y = x2 + 2 x 1 denklemi üzerinde verilmiştir.

Verilen dört noktanın ağırlıkları, şimdiye kadar eşit olduğu kabul edilmiştir. Bu ağırlıklar eşit olmayıp değişik ise, örnek olarak :

$P_1$ (—1 , 1) $W_1 = 1$
$P_2$ (0 , 0) $W_2 = 10$
$P_3$ (1 , 1) $W_3 = 1$
$P_4$ (3 , 2) $W_4 = 1$ ise :

Her verilen nokta için yazılabilen denklemin bu ağırlık sayısı ile çarpımı gerekir :

$$
\begin{aligned}
f(a, b, c) &= ax^2 + bx + c - y = 0 \\
&= a(-1)^2 + b(-1) + c - 1 = 0 \qquad x\ W_1 = 1 \\
&= a(0)^2 + b(0) + c - 0 = 0 \qquad x\ W_2 = 10 \\
&= a(1)^2 + b(1) + c - 1 = 0 \qquad x\ W_3 = 1 \\
&= a(3)^2 + b(3) + c - 2 = 0 \qquad x\ W_4 = 1
\end{aligned}
$$

Buradan :

$$
\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ 11 & 3 & 4 & 13 \\ 27 & 11 & 6 & 3 \\ 83 & 27 & 20 & 11 \end{vmatrix} = 0
$$

$$
x^2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 13 \\ 11 & 6 & 3 \\ 27 & 20 & 11 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 11 & 4 & 13 \\ 27 & 6 & 3 \\ 83 & 20 & 11 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 11 & 3 & 13 \\ 27 & 11 & 3 \\ 83 & 27 & 11 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 11 & 3 & 4 \\ 27 & 11 & 6 \\ 83 & 27 & 20 \end{vmatrix} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
&x^2\ [3(66-60) - 4(121-81) + 13(220-162)] \\
&\qquad 18 - 160 + 754 = 612 \\
&\qquad + 612\, x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x\ [11(66-60) - 4(297-249) + 13(540-498)] \\
&\qquad 66 - 192 + 446 = 420 \\
&\qquad - 420\, x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&y\ [11(121-81) - 3(297-249) + 13(729-913)] \\
&\qquad 440 - 144 - 2392 = -2096 \\
&\qquad - 2096\, y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&1\ [11(220-162) - 3(540-498) + 4(729-913)] \\
&\qquad 638 - 126 - 736 = 224
\end{aligned}
$$

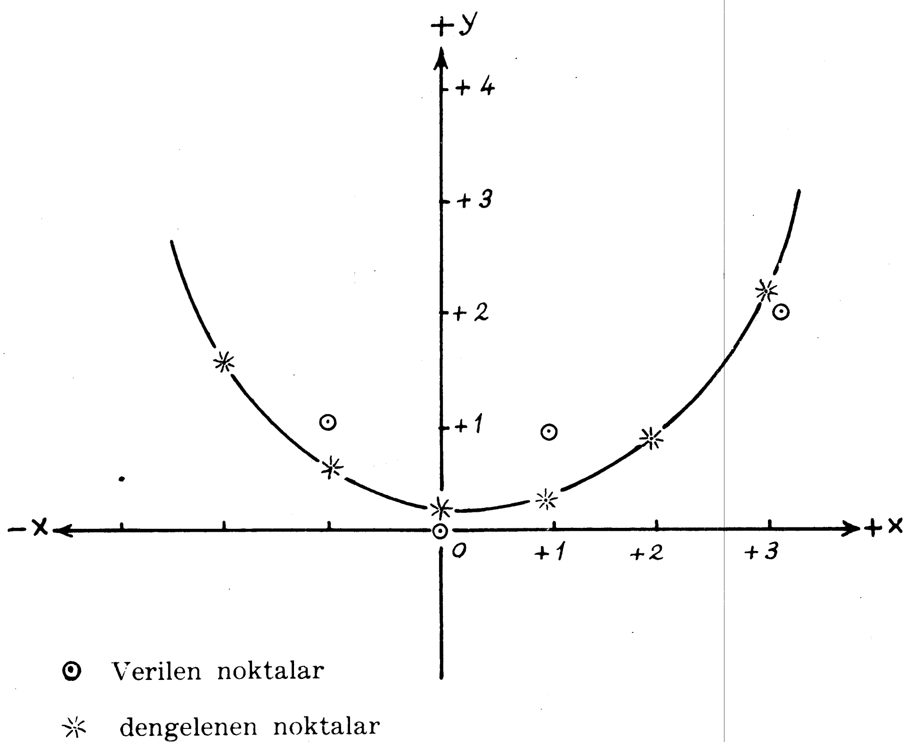
$$2096\,y = 612\,x^2 - 420\,x + 224$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2096 | 2 | 612 | 2 | 420 | 2 | 224 | 2 |
| 1048 | 2 | 306 | 2 | 210 | 2 | 112 | 2 |
| 524 | 7 | 153 | 3 | 105 | 3 | 56 | 2 |
| 77 | 7 | 51 | 3 | 35 | 5 | 28 | 2 |
| 11 | 11 | 17 | 17 | 7 | 7 | 14 | 2 |
| | | | | | | 7 | 7 |

$$524\,y = 153\,x^2 - 105\,x + 56$$

| x | $-\infty$ | $-2$ | $1-$ | 0 | $+1$ | $+2$ | $+3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | $+\frac{878}{524}$ | $+\frac{314}{524}$ | $+\frac{56}{524}$ | $+\frac{104}{524}$ | $+\frac{458}{524}$ | $+\frac{1118}{524}$ | $+\infty$ |
| y (kabaca) | | $+1.6$ | $+0.60$ | $+0.11$ | $+0.20$ | $+0.9$ | $+2.13$ | |

Verilen noktalar ve hesap sonunda bulunan parabol çizilecek olursa, dört noktanın ağırlıkları eşit alınarak bulunan ve çizimi yapılan parabola oranla, bu ikinci parabolün ağırlığı $W_2 = 10$ olarak alınan $P_2$ (O, O).




noktasına daha yakın geçtiği ve diğer üç noktadan uzaklaştığı görülür.

Verilen değerlerde, gözlem değerlerinde ağırlık anlamı hesapla ve geometrik olarak böylece gösterilmiş olur.

Bir niceliğin türlü değerlerinden birinin diğerlerine oranla inanılma derecesine ağırlık denir ve W ile gösterilir.

Ağırlık, ölçülerin doğruluk derecelerini gösteren ortalama hatalarının karesi ile ters orantılıdır.

Verilen değerlerle bu noktalara karşılık bulunan parabol üzerindeki noktalar arasındaki farklar, diğer deyişle, hataların kendi ağırlıkları ile çarpımlarının toplamı sıfır olması gerekir. Bu kontrol :

$$v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4 = 0$$

$$1\,x\left(\frac{314}{524} - 1\right) + 10\,x\left(\frac{56}{524} - 0\right) + 1\,x\left(\frac{104}{524} - 1\right) + 1\,x\left(\frac{1118}{524} - 2\right) = 0$$

$$-\frac{210}{524} + \frac{560}{524} - \frac{420}{524} + \frac{70}{524} = 0$$

$$-\frac{630}{524} + \frac{630}{524} = 0$$

Böylece yapılan hesapların doğruluğu kontrol edilmiş olur.

$$2096\,y = 612\,x^2 - 420\,x + 224$$

$$524\,y = 153\,x^2 - 105\,x + 56$$

| x | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $+1$ | $+2$ | $+3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | $+\frac{878}{524}$ yok | $+\frac{314}{524}$ | $+\frac{56}{524}$ | $+\frac{104}{524}$ | $+\frac{458}{524}$ yok | $+\frac{1118}{524}$ | $+\infty$ |

Kontrol :

$$v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4 = 0$$

$$1\,x\left(\frac{314}{524} - 1\right) + 10x\left(\frac{56}{524} - 0\right) + 1x\left(\frac{104}{524} - 1\right) + 1x\left(\frac{1118}{524} - 2\right) = 0$$

$$-\frac{210}{524} + \frac{560}{524} - \frac{420}{524} + \frac{70}{524} = 0$$

$$-\frac{630}{524} + \frac{630}{524} = 0$$

DAİRENİN DENKLEMİ

DETERMİNANT OLARAK

Bir doğru üzerinde bulunmayan belirli üç nokta verilmiş olsun :

$P_1 \ (x_1 \ , \ y_1)$
$P_2 \ (x_2 \ , \ y_2)$
$P_3 \ (x_3 \ , \ y_3)$

Bu üç noktadan geçen dairenin denklemi :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Çünkü bundan evvelki örnekte olduğu gibi $x^2+y^2$ nin katsayısı olan determinant :

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

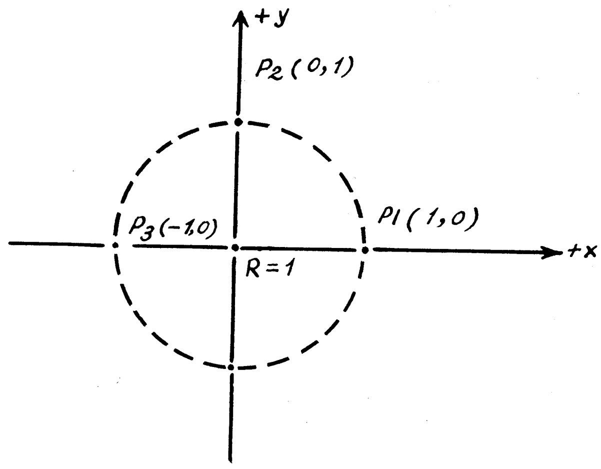
Sıfırdan farklıdır (üç nokta bir doğru üzerinde olmadığından). Dördüncü dereceden determinant açılırsa; daire denklemini verir :

$A \ (x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$

Üç noktanın geometrik yeri gerçek ise ve biri (x, y) olarak alınırsa iki satır identik olur ve determinant denklemi gerçekleşir. Denklemin bir daireyi gösterdiği ve her üç noktanında bu daire üzerinde bulunduğu meydana çıkar.

Örnek :

Verilen üç nokta :




$P_1$ ( 1 , 0)
$P_2$ ( 0 , 1)
$P_3$ (—1 , 0)

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x^2 + y^2 (1-0+1) - x (1-0-1) + y (1-0-1) - 1 (1+1)$$

$$2 (x^2 + y^2) = 2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Yarıçapı R = 1 ve merkezi koordinat merkezinde bulunan bir daire denklemi olduğu anlaşılmış olur.

Uygulamada, herhangi bir daire, merkezi koordinat merkezine sürülür, yarı çapı bir ölçeğe göre bire indirgenir ve yukarıki basit denklemlerle çözüm yapılır.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x^2 + y^2 \, (1-0+1) - x \, (1-0-1) + y \, (1-0-1) - 1 \, (1+1)$$

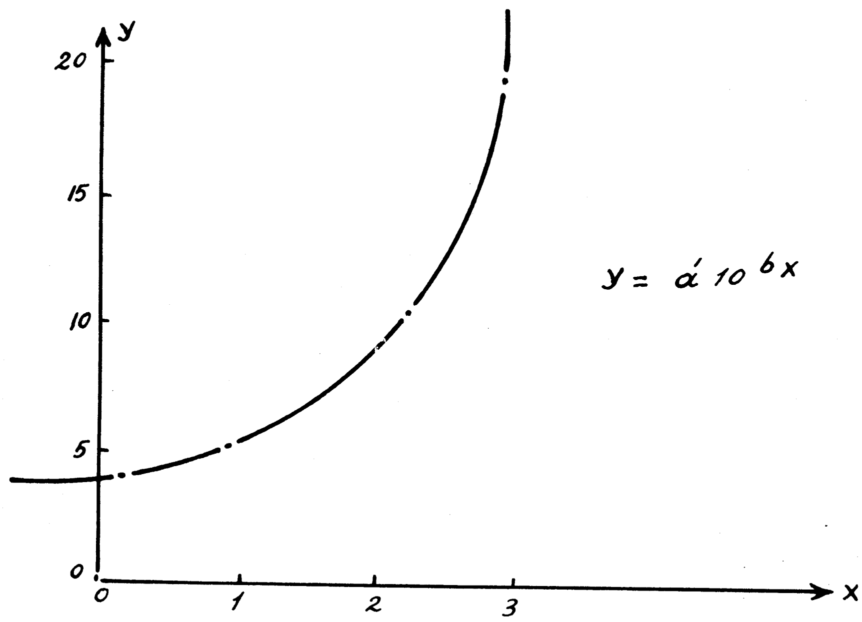
$$2\,(x^2 + y^2) = 2$$

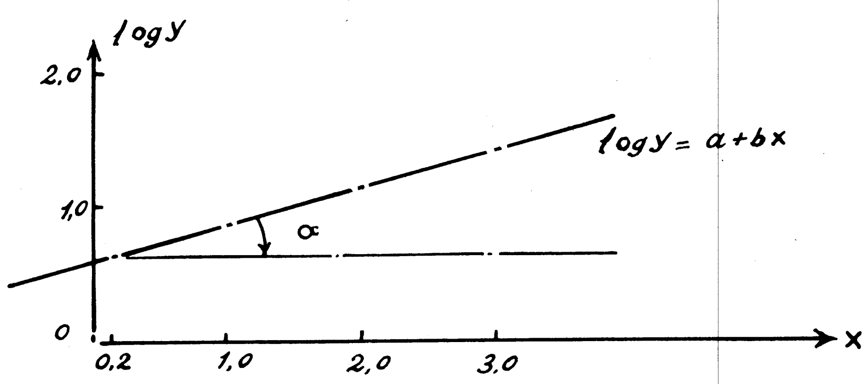
$$x^2 + y^2 = 1$$

## ÜSLÜ FONKSİYON

Yapılan gözlem değerleri :

| x | log x | fark | y | log y | fark | $y^2$ | w |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.2 | 9.30 | 0.30 | 4.5 | 0.66 | 0.16 | 20 | 0.2 |
| 1.0 | 0.00 | 0.30 | 6.5 | 0.82 | 0.26 | 42 | 0.4 |
| 2.0 | 0.30 | | 12.0 | 1.08 | | 144 | 1.4 |
| 3.0 | 0.48 | 0.18 | 20.0 | 1.30 | 0.22 | 400 | 4.00 |






$$\log y = a + bx$$

$$tg\alpha = \frac{1.30 - 0.64}{3.0 - 0.2} = \frac{0.66}{2.8} = +\ 0.235 = b$$

$b = +\ 0.235$ (Çizimden, kabaca)

$$\frac{\Delta \log y}{0.2} = 0.235 \qquad \Delta \log y = 0.0470$$

$x = 0$ için

$\log y = 0.66 - 0.047 = +\ 0.613$

$a = +\ 0.613$ (Çizimden, kabaca)

Gözlem Denklemleri :

$$\begin{aligned} bx &+ a - \log y = 0 \\ 0.2b &+ a - 0.66 = 0 \\ 1.0b &+ a - 0.82 = 0 \\ 2.0b &+ a - 1.08 = 0 \\ 3.0b &+ a - 1.30 = 0 \end{aligned}$$

Gözlemler eşit ağırlıkta ise, log Y veya gözlem denklemlerinin diğer deyişle fonksiyonun ağırlıkları $y^2$ olur.

Ağırlıklar nispî sayılar olduğundan hesap işiemini kısaltma bakımından 1/100 değerleri alınarak :

Normal denklemler :

$$42.008\ b + 15.24\ a - 18.9784 = 0$$
$$15.24\ b + 6.00\ a - 7.172 = 0$$
$$42.01\ b + 15.24\ a - 18.98 = 0$$
$$15.24\ b + 6.00\ a - 7.17 = 0$$

Çözüm sonunda :

$$b = +\ 0.22$$
$$a = +\ 0.64$$

elde edilir.

Bu elde edilen değerler yerlerine konursa :

$$\log y = 0.64 + 0.22\ x$$
$$x = \frac{1}{0.22} \log y - \frac{0.64}{0.22}$$
$$x = 4.545 \log y - 2.909$$
$$y = 4.365\ (\ 10^{0.22x}\ )$$

Çünkü :

$y = \grave{a} \, (10^{bx})$

$\log y = \log \grave{a} + bx$

$\log \grave{a} = a$ ise

$\log y = a + bx$

$\log y = 0.64 + 0.22\,x$

$y = 4.365 \, (10^{0.22x})$

Ampirik denklemi elde edilmiş olur.

Normal denklemler yerine, gözlem değerlerinden veya gözlem denklemlerinden doğrudan doğruya :

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} b & a & 1 \\ 15.24 & 6 & 7.17 \\ 42.01 & 15.24 & 18.98 \end{vmatrix} = 0$$

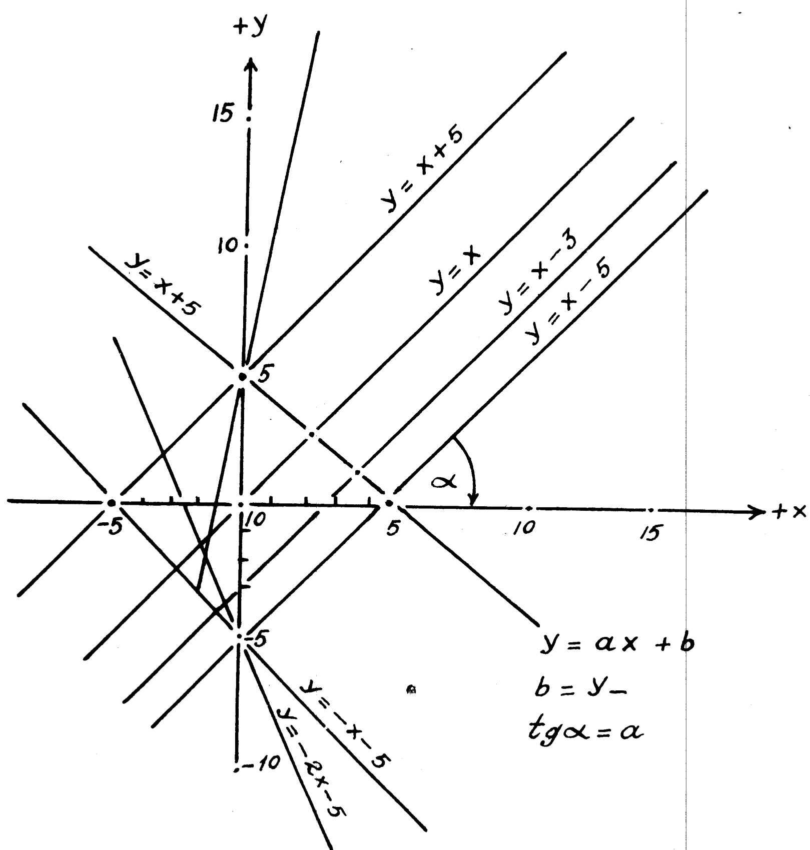
$$b = \frac{\begin{vmatrix} 7.17 & 6 \\ 18.98 & 15.24 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15.24 & 6 \\ 42.01 & 15.24 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{matrix} +109.27 \\ -113.88 \end{matrix}}{\begin{matrix} +232.26 \\ -252.06 \end{matrix}} = \frac{-4.61}{-19.80} = +0.233$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 15.24 & 7.17 \\ 42.01 & 18.98 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15.24 & 6 \\ 42.01 & 15.24 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{matrix} +289.26 \\ -301.21 \end{matrix}}{-19.80} = \frac{-11.95}{-19.80} = +0.604$$

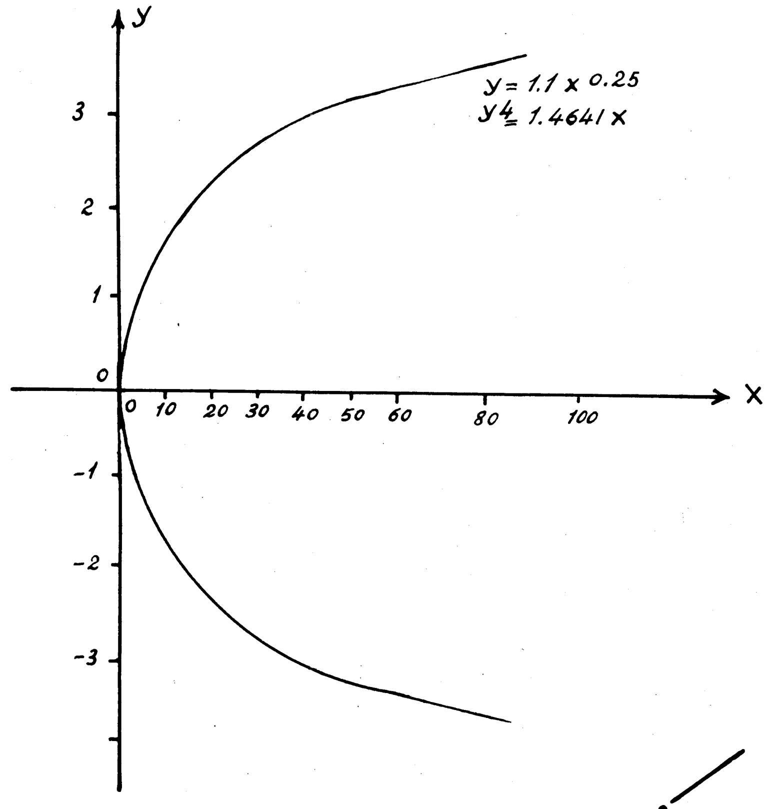
$$\log y = a + bx$$
$$\log y = 0.604 + 0.233\,x$$

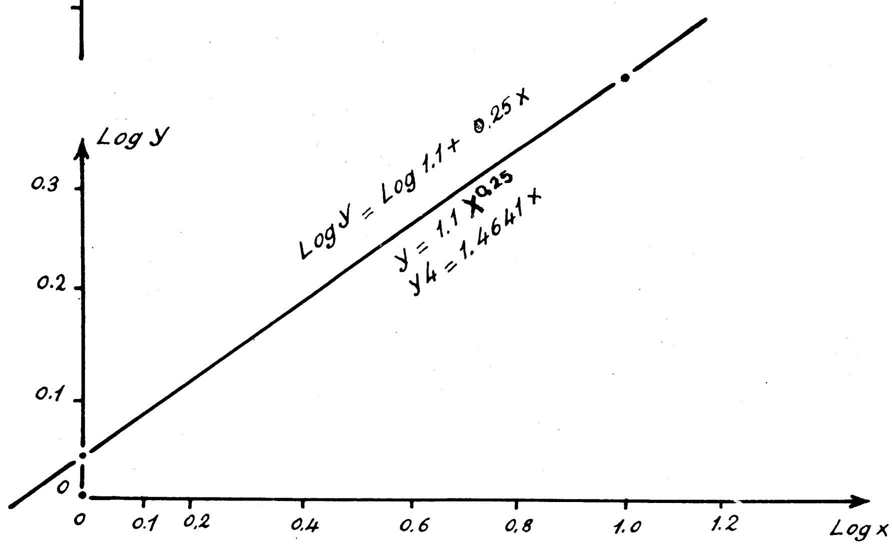
Evvelce elde edilen sonuç bulunmuş olur.

DOĞRU ÖRNEKLERİ

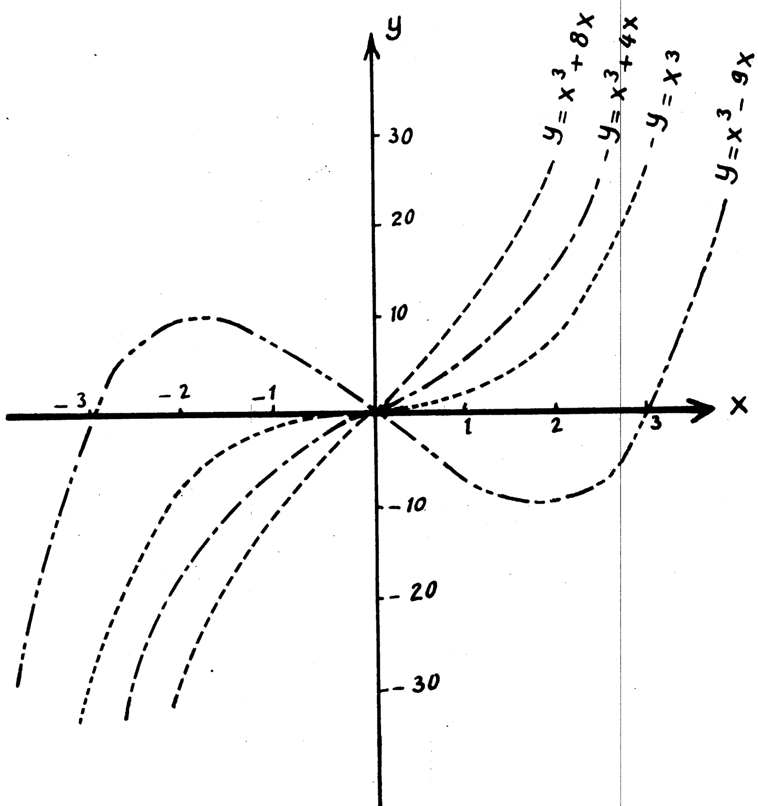


PARABOL

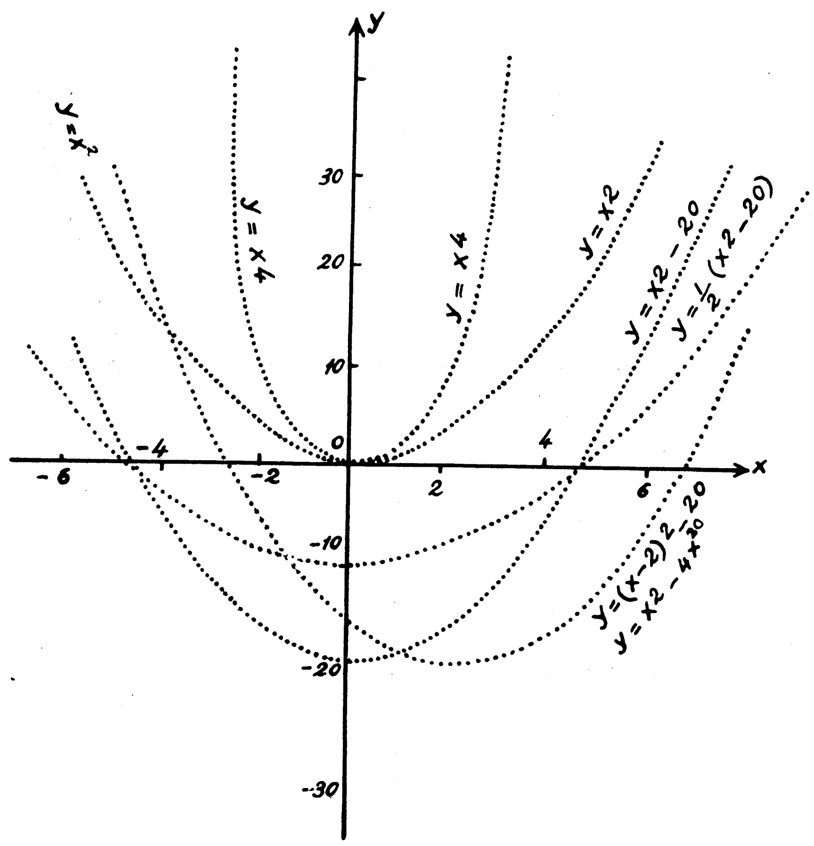

y
3
2
1
0
-1
-2
-3
X
0 10 20 30 40 50 60 80 100
y = 1.1 x 0.25
y4 = 1.4641 x


Log y
0.3
0.2
0.1
0
0 0.1 0,2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2
Log x
Log y = Log 1.1 + 0.25 x
y = 1.1 x0.25
y4 = 1.4641 x

PARABOL



PARABOLLER :



HİPERBOL

$y = 1.36\,x^{-\frac{1}{3}}$ verilmiş ise :

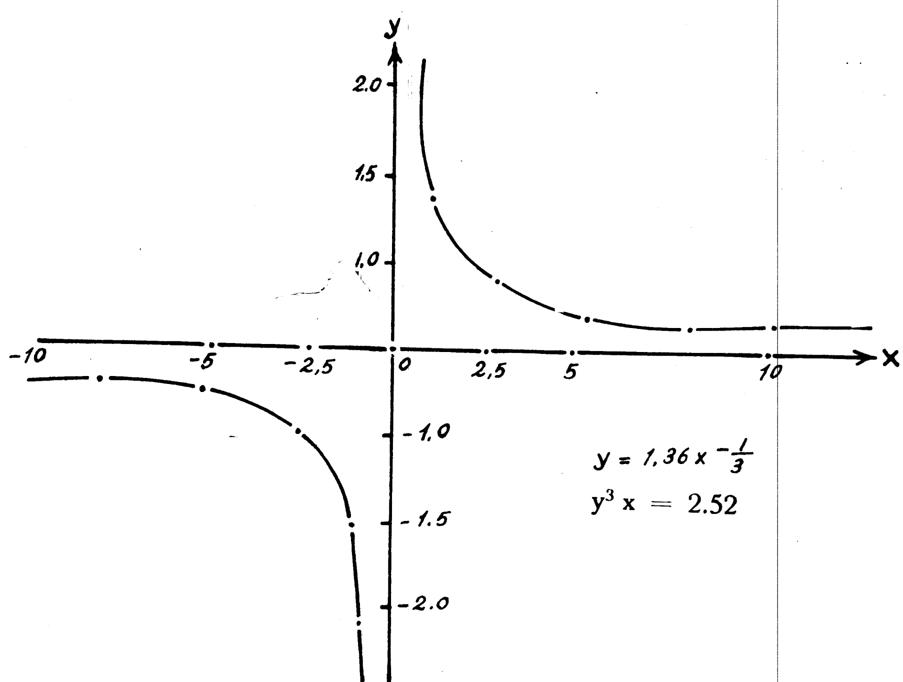
$y^3x = 2.52$

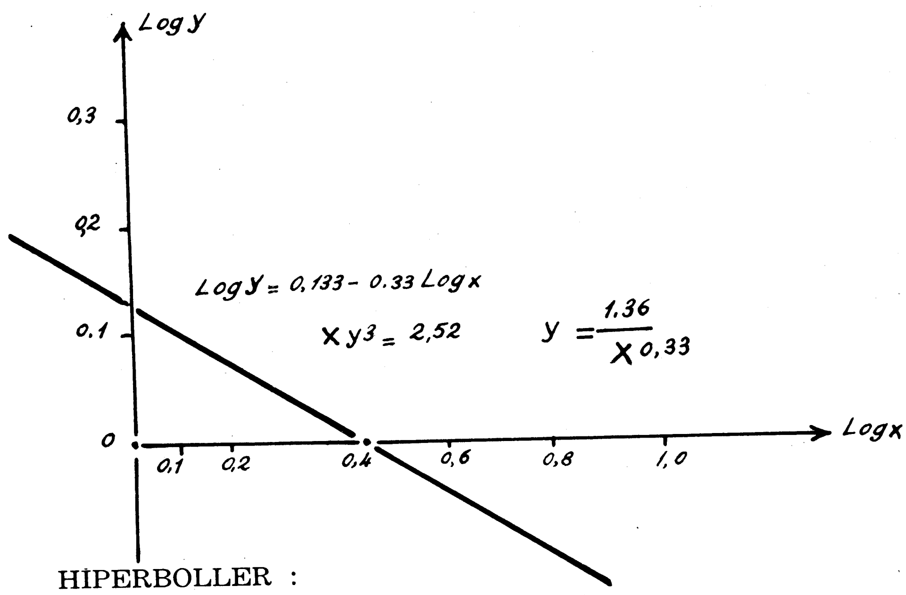
$\log y = 0.133 - 0.33 \log x$

$y = \dfrac{1.36}{x^{0.33..}}$

$xy^3 = 2.52$

$x = \dfrac{2.52}{y^3}$






HİPERBOLLER :

Koordinat eksenleri üzerinde ölçek değiştikçe :

x.y = 25

x.y = 2 500

x.y = 250 000

değerleri için aynı eğri kullanılır.