

**GLOBAL JEODEZİK REFERANS KOORDİNAT SİSTEMİNDEKİ  
KOVARYANSLARIN KESTİRİMİ ÜZERİNE BİR YAKLAŞIM**  
(AN APPROACH TO ESTIMATE COVARIANCES IN GLOBAL GEODETIC FRAME)

**Bahadır AKTUĞ**  
Harita Genel Komutanlığı  
bahadir.aktuğ@hgk.mil.tr

**ÖZET**

Yerin ağırlık merkezine duyarlı uydu konumlama sistemlerinin gelişmesiyle birlikte, bilimsel çalışmalardan imar uygulamalarına kadar birçok jeodezik ölçü sonucu yer-merkezli (earth-centered) ve yere-bağlı (earth-fixed) global bir sistemde ifade edilmektedir. Bununla beraber, global bir sistemdeki sonuçların fiziksel ve geometrik olarak yorumlanabilmesi ve yersel ölçü sistemleriyle birlikte kullanılabilmesi için uzay jeodezisi ölçü sonuçlarının kullanıcı-merkezli (topocentric) yerel bir jeodezik sisteme dönüştürülmesi zorunludur. Bu dönüşüm sürecinde, global jeodezik sistemdeki varyans-kovaryans ilişkilerinin yerel jeodezik sistemde korunması; hata kaynaklarının doğru tespit edilebilmesi, yersel ölçülerle birlikte değerlendirirken uygun ağırlık tanımı yapılması, iki ve üç boyutlu ağlar oluşturulurken uygun referans koordinat sistemi noktalarının seçilebilmesi ve yerel jeodezik sistemde gerçekçi hata elipslerinin oluşturabilmesi için gereklidir. Global jeodezik sistemdeki koordinat/hız hatalarının yerel jeodezik sisteme dönüştürülmesinde, global jeodezik sistem koordinat/hız hataları arasında var olan ve büyük oranda geometrik ilişkilerden kaynaklanan yüksek korelasyon, dönüşümde oldukça etkili olmaktadır. Bu anlamda, global koordinat/hız hataları arasındaki kovaryans ilişkilerinin göz ardı edilmesi, yerel sistemdeki standart sapma ve hata elipslerinin hatalı olarak hesaplanması sonucunu doğurmaktadır. Bu çalışmada global bir jeodezik sistemdeki koordinat/hız varyanslarının yerel jeodezik sisteme dönüştürülmesinde X,Y,Z koordinat varyansları ile yerel jeodezik sistem başlangıç noktasının konumuna bağlı yarı-analitik dönüşüm formülleri geliştirilmiştir. Sonuçlar, global sistemdeki kovaryans ilişkilerinin yeniden elde edilebileceğini ve global jeodezik sistem ile tutarlı kovaryans matrisinin yerel jeodezik sistemde tanımlanabileceğini göstermektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Varyans, kovaryans, korelasyon, global jeodezik sistem.

**ABSTRACT**

With the developments in space-based systems, the results of many applications are provided in an earth-fixed global frame. However, for physical and geometrical interpretation of results and combining them with terrestrial observations, it is necessary to transform those results into local geodetic frame. In the procedure of transformation, preserving the covariance relations in global reference is important in several aspects: (1) correctly determining the error sources (2) determining appropriate weighting schema to combine with terrestrial observations (3) appropriate selection of sites to be used in reference frame definition (4) forming realistic error ellipses in local geodetic frame. High correlations between global geodetic frame components which intrinsically exist during transformation of global frame into local

frame and which comes mostly from geometrical relations, have also an important role in transforming variances of coordinates and velocities. Covariance relations ignored in this sense, cause wrong computation of standard errors and error ellipses. In this study, semi-analytical expressions were developed, which do not require full or block-diagonal covariance matrices and are dependent only on the variances in global frame and position of origin in local frame. Results show that covariance relations in global frame arising from geometry can be reconstructed without any loss and covariance matrices of a local geodetic system which are consistent with global frame can be obtained.

**Key words:** Variance, covariance, correlation, global geodetic frame.

## 1. GİRİŞ

Doğrusal modellerde En Küçük Kareler (EKK) yöntemi ile elde edilen sonsal varyans-kovaryans matrisleri;

- Ölçüler ile ilgili önsel varyans-kovaryanslar,
- Parametreler ile ilgili önsel stokastik öngörüler,
- Jeodezik ağların datum tanımı (ağ yöneltme parametreleri, referans koordinat sistemi tanımı, ağ geometrisi),
- Parametreler arasındaki fiziksel ve geometrik ilişkiler (matematiksel model).

gibi faktörlere bağlı olarak şekillenmektedir (Vanicek, vd., 1982). Global jeodezik sistemden yerel jeodezik sisteme dönüşümde, global jeodezik koordinatlar arasında mevcut olan yüksek korelasyon, yerel jeodezik sistemdeki varyanslar üzerinde etkili olmaktadır. Global jeodezik sistemdeki kovaryans matrisin köşegen matris kabul edilerek korelasyonların göz ardı edilmesi yerel jeodezik sistemdeki varyansların hatalı hesaplanmasına neden olur. Global jeodezik sistemdeki varyans-kovaryans ilişkilerinin yerel jeodezik sistemde de korunması aşağıdaki nedenlerle önemlidir:

a. Koordinat hata kaynaklarının neler olduğunun doğru olarak tespit edilebilmesi: Uydu tabanlı sistemlerde uydu konfigürasyonuna bağlı olarak koordinat ve hız bileşenleri farklı doğrulukla ya da standart sapma ile belirlenmektedir (Seeber, 1993; Nakiboğlu ve Demir, 2003). Bunun bir örneği, 550 eğim (inklinasyon) açısıyla dünyayı dolaşan GPS uydularından elde edilen baz vektörü bileşenleridir. İlgili doğruluk parametresi (DOP) değerlerine bağlı olarak yükseklik bileşeni en düşük doğrulukla belirlenirken, eğim açısına bağlı olarak kuzey-güney bileşeni doğu-batı bileşenine göre daha yüksek doğrulukla hesaplanabilmektedir (Seeber, 1993). GPS değerlendirme yazılımları ile elde edilen global jeodezik sistemdeki hataların yerel sistemde ancak doğru ifade edilmesi ile hata kaynağının atmosfer, anten faz merkezi gibi yükseklik bileşeni ile doğrudan ilgili kaynaklardan meydana gelip gelmediği ortaya çıkarılabilir.

b. Uzay jeodezisi ölçü sonuçlarının yersel ölçülerle birlikte değerlendirilmesinde uygun ağırlık tanımı yapılabilmesi: İki boyutlu yersel ağlarda uydu jeodezisi sistemlerinin kullanılmasında, yerel jeodezik sisteme dönüştürülen koordinat veya hız

bileşenlerinin önsel varyansları global jeodezik sistemden dönüştürülen varyanslarla elde edilecektir. Varyansların yerel jeodezik sisteme hatalı dönüştürülmesi, sonraki aşamada ağırlıkların hatalı belirlenmesine yol açar (Aktuğ, 2004).

c. İki ve üç boyutlu ağ konfigürasyonu (yersel, uzaysal) için referans koordinat sistemi noktalarının uygun seçilebilmesi: Global jeodezik sistemdeki baz vektörü bileşenlerinin hataları, yerel jeodezik sisteme dönüştürüldüğünde yerel sistemdeki bileşenlere farklı oranlarda dağılacaktır. Yatay konum ve yükseklik hataları yerel jeodezik sisteme doğru dönüştürülürse, referans koordinat sistemi tanımı da sağlıklı şekilde yapılabilir. Örneğin GPS ölçülerinde yükseklik bileşeni tipik olarak diğer bileşenlere göre daha düşük doğrulukla belirlenmektedir. Türkiye enlem ve boylamlarında yer alan bir coğrafyada, yükseklik bileşenindeki hatalar çoğunlukla global jeodezik sistemdeki X ve Z bileşenlerinde görülmektedir. Global jeodezik sistemde doğruluğu düşük görünen koordinat ve hız bileşenleri, yerel jeodezik sisteme dönüştürüldükten sonra yatay konum doğruluğu iyi olanlar belirlenerek iki boyutlu referans koordinat sistemi tanımlamada kullanılabilir ya da global jeodezik sistemdeki varyansların yüksek olmasına neden olan yükseklik bileşenlerinin ağırlıkları düşürülerek üç boyutlu referans koordinat sistemleri tanımlanabilir (Aktuğ vd., 2004; Herring, 1998).

ç. Yerel sistemde gerçekçi tolerans ve hata elipslerinin oluşturulabilmesi: Gerek ağ tasarımı gerek yerel jeodezik sistemdeki sonuçların fiziksel yorumu, yerel sistemdeki hataların doğru belirlenmesini zorunlu kılar. Elde edilen koordinat ve hız bileşenlerinin standart sapma, istatistiksel güven aralığı, elips ve elipsoitleri sonuçlara ilişkin doğruluk ölçütleridir (Seeber, 1993; Krakiwsky, 1995; Altamimi vd., 2002). Global jeodezik sistemdeki koordinat bileşenlerinin yerel jeodezik sisteme dönüştürülmesinde, global jeodezik sistem bileşenleri arasında var olan ve büyük oranda geometrik ilişkilerden kaynaklanan yüksek korelasyon, koordinat veya hız varyanslarının dönüştürülmesinde de etkin olmaktadır. Bu anlamda, göz ardı edilen kovaryans ilişkileri, yerel sistemdeki standart sapma ve güven bölgelerinin hatalı olarak hesaplanmasına neden olmaktadır.

Bu çalışmada amaç, global sistemdeki koordinat veya koordinat farklarına ait kovaryans elemanlarının bilinmediği/mevcut olmadığı durumda bu hataların yerel sistemdeki hatalara dönüşümü için bir yöntem önermek ve ilgili eşitlikleri üretmektir. Zira hata elipsleri yerel sistemde ifade edilmekte ve doğrudan bu dönüşümden etkilenmektedir. Kovaryans elemanlarının mevcut olmadığı sayısız durum söz konusudur. Örneğin bilimsel GPS yazılımları global sistemde dengeleme işlemlerini gerçekleştirmekte, hız ve koordinatlar için istenilen bir veya birkaç epoktaki hatalar yalnızca global sistemdeki varyanslar şeklinde elde edilmektedir. Benzer şekilde ITRF SSC koordinat ve hızları sadece varyans olarak yayınlanmakta, koordinat zaman serileri analizi sırasında da her bir epok için korelasyon katsayılarını elde etmek ve/veya yayınlamak olanaklı olmamaktadır. Ayrıca birçok yayında verilen hız ve koordinatlar tüm kovaryans matrisi şeklinde değil, yalnızca varyanslar olarak gösterilmektedir.

Çalışma kapsamında kovaryans elemanlarının ihmal edilerek (varyans-kovaryans matrisi diyagonal kabul edilerek) kovaryans yayılma kuralı ile yerel sistemdeki

hatalara yapılan dönüşümlerin kovaryans elemanlarının bulunmaması nedeniyle ortaya çıkan farkların ihmal edilemez mertebede olduğu, buna karşın yerel sistemdeki hatalar global sisteme kovaryans elemanları ihmal edilse bile kabul edilebilir doğrulukta dönüştürülebildiği gösterilmektedir. Bunun temel nedeni global sistem bileşenleri arasındaki geometrik korelasyonun, yerel sistem bileşenleri arasındaki geometrik korelasyona oranla çok daha fazla olmasıdır. Önerilen yöntem ile yerel sistem bileşenleri arasındaki göreceli olarak düşük geometrik korelasyonun avantajı kullanılarak mevcut olmayan diyagonal dışı kovaryans elemanları verilen eşitliklerle elde edilmekte ve global sistemdeki hataları yerel sisteme daha doğru dönüştürülebilmektedir.

İkinci bölümde global ve yerel jeodezik sistemler arasındaki ilişki kısaca açıklanmakta ve global jeodezik koordinatlar arasındaki korelasyonlar incelenmektedir. Üçüncü bölümde ise ihmal edilen korelasyonların yerel jeodezik sistemdeki varyanslara etkileri gösterilerek, geliştirilen yarı-analitik yaklaşımlar ve elde edilen sonuçlar verilmektedir.

## 2. YEREL JEODEZİK SİSTEM VE FONKSİYONEL İLİŞKİLER

Global jeodezik sistemin yerel jeodezik sistemle ilişkisi GPS veri değerlendirme ve kontrol çalışmalarından global plaka modelleri hesaplamalarına kadar birçok alanda kullanılmaktadır (Aktuğ, 2003; Aktuğ, 2004; Aktuğ vd. 2004). Söz konusu ilişki temel olarak, iki dik koordinat sistemi arasındaki iki dönüklük ve yansıma (reflection) matrisleriyle tanımlanabilir. Dönüklük matrisleri ortogonal olup, yerel jeodezik sistemin başlangıç noktasını global sisteme göre tanımlayan enlem ve boylam değerlerine bağlıdır (Kılıçoğlu, 1995; Kahveci ve Yıldız, 2001). Yansıma matrisi ise, bir sol el sistemi olan yerel jeodezik sistemi, sağ el sistemi olan global jeodezik sisteme dönüştürmek amacıyla kullanılır. Yerel ve global sistemdeki koordinat farkları sırasıyla  $\Delta Y$  ve  $\Delta G$  ile gösterilirse iki sistem arasında;

$$\Delta G = D \Delta Y \quad (1)$$

dönüşüm eşitliği yazılabilir (Seeber, 1993). Burada D, iki sistem arasındaki dönüklük ve yansıma matrislerinden elde edilen dönüşüm matrisidir:

$$D = R_3(180^\circ - \lambda) R_2(90^\circ - \varphi) P \quad (2)$$

D, ikinci (R2) ve üçüncü (R3) eksen yönündeki dönüklükler ile P yansıma matrisini içermektedir (Seeber, 1993). Global ve yerel jeodezik koordinat sistemleri Şekil 1'de gösterilmiştir. (2) eşitliğinden,

$$D = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (3)$$

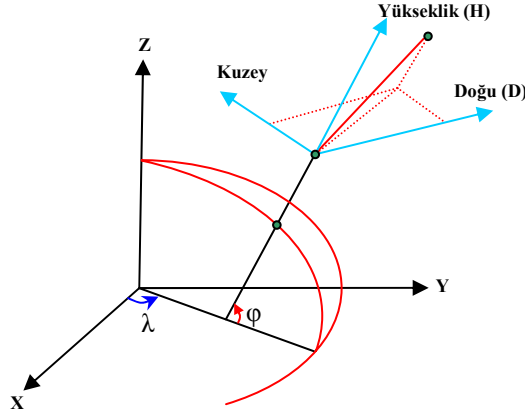
çıkar (Leick, 1990; Kılıçoğlu, 1995). Dönüşüm matrisi D'nin ortogonal olduğu göz

önüne alınarak global jeodezik sistemden yerel jeodezik sisteme geçiş için (1)'den,

$$\Delta Y = D^T \Delta G \quad (4)$$

eşitliği elde edilir. Global jeodezik sistemdeki koordinat bileşenlerinin kovaryans matrisinin yerel jeodezik sistemdeki karşılığı ise kovaryans yayılma kuralı ile (4)'den;

$$C_{neu} = D^T C_{\Delta XYZ} D \quad (5)$$



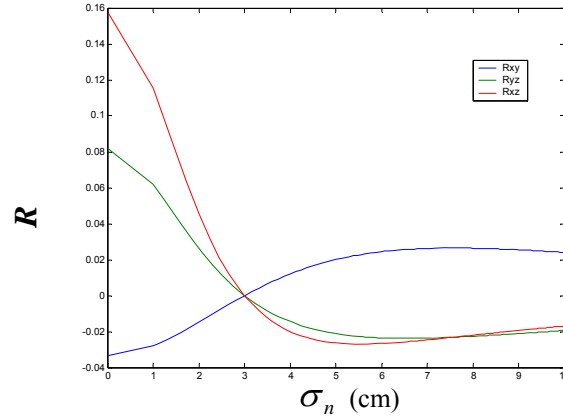
Şekil 1. Global ve Yerel Jeodezik Sistemler.

çıklar. Burada, kovaryans matrisler C ile, global ve yerel jeodezik sistemler ise sırasıyla,  $\Delta XYZ$  ve neu (kuzey, doğu ve yükseklik) alt indisleriyle gösterilmiştir. Görüleceği üzere, yerel jeodezik sistemdeki koordinat bileşenlerinin hataları, global ve yerel jeodezik sistemler arasındaki geometrik ilişkiler ile global jeodezik sistemdeki hata miktarlarına bağlıdır. Bu durumu grafik olarak göstermek amacıyla global sistemdeki kovaryanslar ele alınmış, korelasyon katsayıları incelenmiştir (Şekil 2-4). Korelasyon katsayısı ( $r$ ), parametrelerin birbirlerine göre ilişkisini tanımlamakta olup, parametrelerin kovaryansları ve varyansları yardımıyla elde edilmektedir (Kılıçoğlu, 1995; El-Sheimy, 2001).

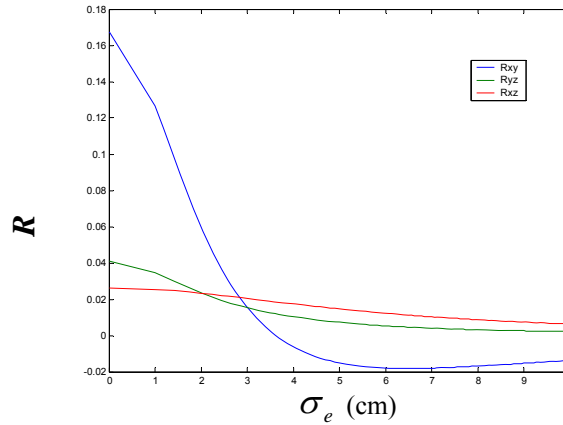
$$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (6)$$

Parametreler üzerinde koşul (condition) veya kısıt (constraint) uygulanmadığı sürece yerel jeodezik sistem koordinat ve hız bileşenleri arasındaki korelasyon ihmal edilebilir düzeydedir (Aktuğ, 2004). Ancak global jeodezik sistemde, çoğu zaman köşegen matris olarak alınan kovaryans matrisin köşegeni dışındaki elemanların önemi, (Aktuğ, 2004)'de verilen "gözlemsi" yaklaşımda açıklanmıştır. Global jeodezik sisteme ilişkin kovaryans matrisin köşegeni dışındaki elemanları incelemek amacıyla, yerel jeodezik sistemde korelasyon olmadığı, başka bir deyişle korelasyon katsayısının sıfır olduğu bir kovaryans matris oluşturulmuş ve  $C_{\Delta XYZ} = D C_{neu} D^T$  fonksiyonel ilişkisi yardımıyla global sisteme dönüştürülmüştür. Ankara Sabit GPS İstasyonunda ( $\varphi$ :  $39^{\circ}.887$ ,  $\lambda$ :  $32^{\circ}.758$ ) korelasyonların göz ardı edildiği yerel

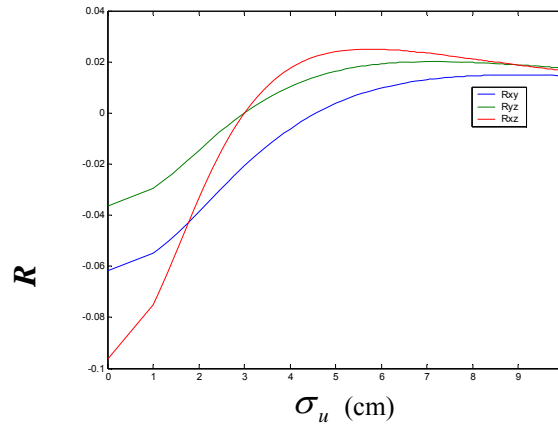
jeodezik sistemdeki standart sapmalar ( $\sigma_n, \sigma_e, \sigma_u$ ), global jeodezik sistemdeki standart sapmalara ( $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ ) dönüştürülerek korelasyonlar incelenmiştir.



Şekil 2. Yerel jeodezik sistemdeki kuzey bileşenin standart sapması ( $\sigma_n$ ) ve korelasyon katsayıları arasındaki ilişkiler ( $\sigma_e$  ve  $\sigma_u = 3$  cm alınmıştır).



Şekil 3. Yerel jeodezik sistemdeki kuzey bileşenin standart sapması ( $\sigma_D$ ) ve korelasyon katsayıları arasındaki ilişkiler ( $\sigma_n = 3$  cm ve  $\sigma_u = 4$  cm alınmıştır).



Şekil 4. Yerel jeodezik sistemdeki kuzey bileşenin standart sapması ( $\sigma_H$ ) ve korelasyon katsayıları arasındaki ilişkiler ( $\sigma_n = 3$  cm ve  $\sigma_e = 4$  cm alınmıştır).

Görüleceği üzere korelasyon katsayısı, dolayısıyla korelasyonlar yalnızca geometrik ilişkilere değil, aynı zamanda koordinat bileşeni varyans ve kovaryanslarının büyüklüklerine de bağlıdır. Grafiklerden elde edilen en önemli bulgu, global jeodezik sistemdeki standart sapmalar eşit olduğunda korelasyon katsayısının sıfır olmasıdır. Bu durumda, global jeodezik sistemdeki varyans-kovaryans matrisinin dönüşüm sırasında köşegen matris kabul edilmesi sonuçları etkilemeyecektir. Ancak global jeodezik sistemdeki koordinat bileşeni varyanslarının farklı olduğu bir köşegen matrisin kovaryans matrisi olarak kullanılması durumunda yerel jeodezik sisteme dönüştürülmüş varyans ve kovaryanslar olması gereken değerlerden oldukça farklı çıkacaktır.

Global jeodezik sisteme ilişkin köşegen kovaryans matristen elde edilen yerel koordinat standart sapmaları Tablo 1’de verilmiştir; öteki sonuçlarla birlikte sonraki bölümde incelenecektir.

### 3. YARI-ANALİTİK KOVARYANS İLİŞKİLERİ

Global jeodezik sistemdeki,

$$C_{XYZ} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_Z^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

kovaryans matrisi (5) yardımıyla yerel jeodezik sisteme dönüştürülürse,

$$C_{neu} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad (8)$$

elde edilir. Bu matrisin elemanları;

$$a = \begin{vmatrix} -(-\sin \varphi \cos \lambda \sigma_X^2 - \sin \varphi \sin \lambda \sigma_{XY} + \cos \varphi \sigma_{XZ}) \sin \varphi \cos \lambda \\ -(-\sin \varphi \cos \lambda \sigma_{XY} - \sin \varphi \sin \lambda \sigma_Y^2 + \cos \varphi \sigma_{YZ}) \sin \varphi \sin \lambda \\ +(-\sin \varphi \cos \lambda \sigma_{XZ} - \sin \varphi \sin \lambda \sigma_{YZ} + \cos \varphi \sigma_Z^2) \cos \varphi \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$b = \begin{vmatrix} -(-\sin \varphi \cos \lambda \sigma_X^2 - \sin \varphi \sin \lambda \sigma_{XY} + \cos \varphi \sigma_{XZ}) \sin \lambda \\ +(-\sin \varphi \cos \lambda \sigma_{XY} - \sin \varphi \sin \lambda \sigma_Y^2 + \cos \varphi \sigma_{YZ}) \cos \lambda \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$c = \begin{vmatrix} (-\sin \varphi \cos \lambda \sigma_X^2 - \sin \varphi \sin \lambda \sigma_{XY} + \cos \varphi \sigma_{XZ}) \cos \varphi \cos \lambda \\ + (-\sin \varphi \cos \lambda \sigma_{XY} - \sin \varphi \sin \lambda \sigma_Y^2 + \cos \varphi \sigma_{YZ}) \cos \varphi \sin \lambda \\ + (-\sin \varphi \cos \lambda \sigma_{XZ} - \sin \varphi \sin \lambda \sigma_{YZ} + \cos \varphi \sigma_Z^2) \sin \varphi \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$d = \begin{vmatrix} -(-\sin \lambda \sigma_X^2 + \cos \lambda \sigma_{XY}) \sin \lambda \\ +(-\sin \lambda \sigma_{XY} + \cos \lambda \sigma_Y^2) \cos \lambda \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$e = \begin{vmatrix} (-\sin \lambda \sigma_X^2 + \cos \lambda \sigma_{XY}) \cos \varphi \cos \lambda \\ +(-\sin \lambda \sigma_{XY} + \cos \lambda \sigma_Y^2) \cos \varphi \sin \lambda \\ +(-\sin \lambda \sigma_{XZ} + \cos \lambda \sigma_{YZ}) \sin \varphi \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$f = \begin{vmatrix} (\cos \varphi \cos \lambda \sigma_X^2 + \cos \varphi \sin \lambda \sigma_{XY} + \sin \varphi \sigma_{XZ}) \cos \varphi \cos \lambda \\ +(\cos \varphi \cos \lambda \sigma_{XY} + \cos \varphi \sin \lambda \sigma_Y^2 + \sin \varphi \sigma_{YZ}) \cos \varphi \sin \lambda \\ +(\cos \varphi \cos \lambda \sigma_{XZ} + \cos \varphi \sin \lambda \sigma_{YZ} + \sin \varphi \sigma_Z^2) \sin \varphi \end{vmatrix} \quad (14)$$

şeklinde. Pozitif tanımlı bir matris için  $a$ ,  $d$  ve  $f$  köşegen elemanlarının pozitif olması gerektiği açıktır. Ancak yoğun cebirsel işlemler sırasındaki nümerik problemler nedeniyle pozitif tanımlı olması gereken matrislerde negatif özdeğerlere rastlandığı bilinmektedir (Herring, 1998). Bu durum (9), (12) ve (14) eşitliklerinde mutlak değer işareti (| . |) ile vurgulanmıştır. Yerel jeodezik koordinatlar arasındaki korelasyonun sifıra yakın olduğu düşünüldüğünde, global jeodezik sisteme ilişkin kovaryans matrisin köşegeni dışındaki elemanlar, (8) eşitliğindeki  $b$ ,  $c$  ve  $e$  sıfır olacak şekilde elde edilebilir. Bu amaçla (10), (11) ve (13) eşitlikleri sifıra eşitlenerek, homojen bir doğrusal denklem sistemi oluşturulmuştur. Homojen bir doğrusal denklem sisteminin nasıl çözülebileceği çeşitli kaynaklarda bulunabilir (Borre and Strang, 1997; Vanicek and Krakiwsky, 1982). Bu şekilde üç bilinmeyenli ve üç denklemlili bu homojen doğrusal denklem sistemi çözülerek, global jeodezik sistem kovaryans matrisinin köşegeni dışındaki elemanlar, köşegen elemanları ile yerel jeodezik sistem başlangıç noktasının konumuna bağlı olarak hesaplanmıştır:

$$\sigma_{XY} = \frac{\sin \lambda \cos \lambda (\sigma_Y^2 - \sigma_X^2)}{2 \sin^2 \lambda - 1} \quad (15)$$

$$\sigma_{XZ} = \frac{-\cos \lambda \tan \varphi (\sigma_X^2 \sin^2 \lambda + \sigma_Y^2 \sin^2 \lambda - \sigma_X^2 + \sigma_Z^2 - 2 \sigma_Z^2 \sin^2 \lambda)}{1 - \tan^2 \varphi + 2 \tan^2 \varphi \sin^2 \lambda - 2 \sin^2 \lambda} \quad (16)$$

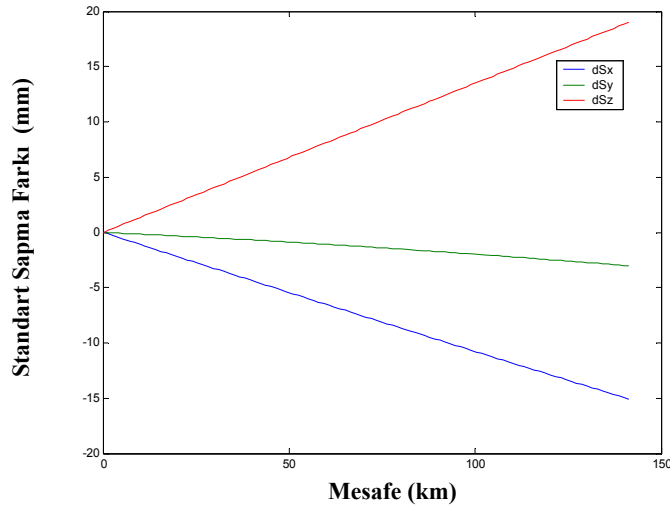
$$\sigma_{YZ} = \frac{-\sin \lambda \tan \varphi (\sigma_X^2 \sin^2 \lambda + \sigma_Y^2 \sin^2 \lambda - \sigma_X^2 + \sigma_Z^2 - 2 \sigma_Z^2 \sin^2 \lambda)}{1 - \tan^2 \varphi + 2 \tan^2 \varphi \sin^2 \lambda - 2 \sin^2 \lambda} \quad (17)$$

(15), (16) ve (17) ile bulunan kovaryans parametreleri, global jeodezik sistem kovaryans matrisinin köşegeni dışındaki elemanların elde edilmesi için kullanılırsa, (8) eşitliğinde verilen blok kovaryans matris yeniden elde edilebilir. Geliştirilen yöntemin etkinliğini göstermek amacıyla, Türkiye üzerinde yer alan 40 noktada rasgele yerel jeodezik sistem hataları tanımlanmış, (4) ve (5) eşitlikleri yardımıyla bu hataların global jeodezik sistemde blok kovaryans matris şeklinde gerçek karşılıkları bulunmuştur. Bulunan global jeodezik sistem kovaryans matrisinin bir köşegen matris

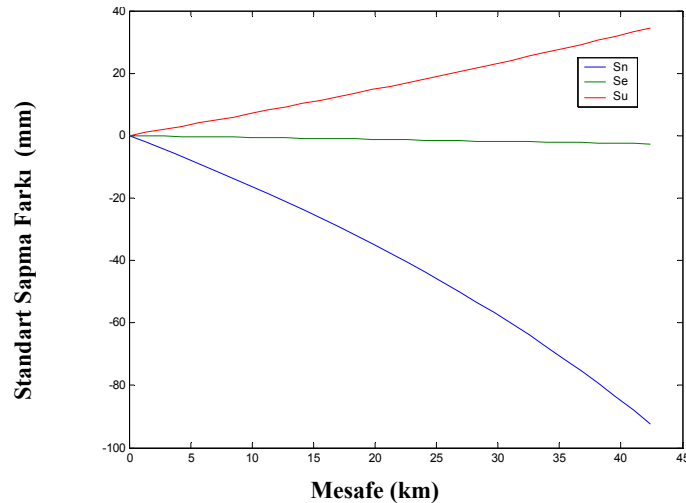


alınması durumunda yukarıda geliştirilen yarı-analitik yöntem yardımıyla yeniden blok köşegen matrise dönüştürülerek elde edilen yerel jeodezik sistem hata bileşenleri her iki yöntem için Tablo 1’ de verilmektedir.

Aynı uygulama gerçek verilerle de denenmiş, gerçek veri grubu olarak referans koordinat sistemi ITRF2000 ve 3 boyutlu benzerlik dönüşümü ile tanımlanan GPS kampanya ölçüleri kullanılmıştır. Gerçek veri grubu ile yapılan çalışmaya ait sonuçlar Tablo 2’de verilmektedir. Global ve yerel jeodezik sistemler arasındaki dönüşümde kullanılan yerel jeodezik sistem başlangıç noktası konum parametreleri (enlem ve boylam) dönüşümün doğruluğunu etkilemeyecek kadar iyi bilinmelidir. Çok düşük korelasyonun olduğu yerel jeodezik sistemden global jeodezik sisteme dönüşümde, konum parametrelerinin dönüşüme etkisi doğrusal iken, yüksek korelasyonlu global jeodezik sistemden yerel jeodezik sisteme dönüşümde, köşegen dışındaki elemanların da konum parametrelerine bağlı olması nedeniyle, konum parametrelerinin doğruluğu dönüşüme doğrusal olmayan bir şekilde etki etmektedir. Konum parametrelerinin dönüşüme etkisi Şekil 5 ve Şekil 6’ da gösterilmektedir.



Şekil 5. Başlangıç noktasının konum hatasının, yerel jeodezik sistem hatalarından global jeodezik sistem hatalarına geçişteki etkisi.



Şekil 6. Başlangıç noktasının konum hatasının, global jeodezik sistem hatalarından yerel jeodezik sistem hatalarına geçişteki etkisi.

Tablo 1. Yapay oluşturulan noktalarda yerel jeodezik sisteme dönüştürülen koordinat standart sapmaları (mm. biriminde).

Boylam ( $^{\circ}$ )	Enlem ( $^{\circ}$ )	Global Sistemde			Yerel Sistemde			Köşegen Kovaryans Matrisiyle Dönüşümle Bulunanlar			Yarı-analitik Dönüşümle Bulunanlar		
		$\sigma_X$	$\sigma_Y$	$\sigma_Z$	$\sigma_n$	$\sigma_e$	$\sigma_u$	$\sigma_n$	$\sigma_e$	$\sigma_u$	$\sigma_n$	$\sigma_e$	$\sigma_u$
26.000	36.000	±38.8	±46.0	±41.7	±47.0	±48.0	±29.0	±41.2	±44.7	±40.8	±47.0	±48.0	±29.0
26.000	38.000	29.2	20.0	38.8	48.0	16.0	14.0	35.0	22.0	32.3	48.0	16.0	14.0
26.000	40.000	12.9	16.1	10.1	4.0	17.0	15.0	11.7	15.6	12.3	4.0	17.0	15.0
26.000	42.000	16.1	8.1	18.6	21.0	2.0	15.0	17.0	10.1	16.7	21.0	2.0	15.0
28.000	36.000	34.7	30.7	27.4	11.0	29.0	44.0	29.8	31.7	31.8	11.0	29.0	44.0
28.000	38.000	24.5	28.6	19.5	13.0	30.0	27.0	22.0	27.7	23.4	13.0	30.0	27.0
28.000	40.000	12.2	6.5	12.2	7.0	1.0	17.0	11.8	8.1	11.6	7.0	1.0	17.0
28.000	42.000	40.3	47.5	34.5	19.0	50.0	47.0	38.0	46.0	38.8	19.0	50.0	47.0
30.000	36.000	31.4	42.4	23.1	22.0	47.0	25.0	27.6	40.0	31.0	22.0	47.0	25.0
30.000	38.000	43.5	46.6	44.8	49.0	48.0	37.0	44.6	45.8	44.5	49.0	48.0	37.0
30.000	40.000	28.7	39.6	25.3	33.0	44.0	2.0	28.2	37.1	29.3	33.0	44.0	2.0
30.000	42.000	15.7	10.0	18.1	19.0	5.0	17.0	16.6	11.7	16.2	19.0	5.0	17.0
32.000	36.000	21.8	34.8	1.4	1.0	41.0	2.0	15.4	31.7	21.1	1.0	41.0	2.0
32.000	38.000	25.5	16.0	27.2	22.0	2.0	34.0	25.7	19.1	24.8	22.0	2.0	34.0
32.000	40.000	22.9	26.8	19.2	17.0	29.0	22.0	21.4	25.8	22.2	17.0	29.0	22.0

Tablo 2. Test noktalarında yerel jeodezik sisteme dönüştürülen koordinat standart sapmaları (mm. biriminde).

Boylam ( $^{\circ}$ )	Enlem ( $^{\circ}$ )	Global Sistemde			Yerel Sistemde			Köşegen Kovaryans Matrisiyle Dönüşümle Bulunanlar			Yarı-analitik Dönüşümle Bulunanlar		
		$\sigma_X$	$\sigma_Y$	$\sigma_Z$	$\sigma_n$	$\sigma_e$	$\sigma_u$	$\sigma_n$	$\sigma_e$	$\sigma_u$	$\sigma_n$	$\sigma_e$	$\sigma_u$
42.680	74.694	±1.3	±3.6	±3.4	±0.6	±0.7	±5.0	±3.4	±1.6	±3.5	±0.0	±0.9	±5.2
39.135	66.885	2.0	3.8	3.3	0.6	0.8	5.3	3.4	2.4	3.5	0.0	1.3	5.3
40.995	39.776	2.6	2.3	2.9	0.7	0.6	4.4	2.7	2.4	2.7	1.8	1.4	3.9
55.699	36.759	2.0	1.6	3.6	0.7	0.5	4.4	2.6	1.8	3.2	0.0	0.9	4.4
35.141	33.396	3.2	2.2	2.7	0.7	0.6	4.6	2.8	2.5	2.9	0.6	0.8	4.6
39.887	32.758	2.7	1.9	2.7	0.7	0.5	4.2	2.6	2.2	2.6	1.1	1.0	4.0
40.787	29.451	2.5	1.5	2.5	0.6	0.5	3.7	2.4	1.8	2.4	0.9	0.6	3.7
41.104	29.019	2.6	1.5	2.6	0.6	0.5	3.9	2.5	1.8	2.5	0.6	0.5	3.9
52.097	21.032	2.5	1.1	3.5	0.7	0.5	4.4	2.9	1.4	3.1	0.0	0.6	4.5
47.790	19.282	2.8	1.1	3.2	0.6	0.5	4.3	2.9	1.4	3.0	1.4	0.5	4.1
69.663	18.940	1.8	0.8	5.0	0.6	0.5	5.3	2.4	1.0	4.7	0.4	0.5	5.3
52.277	17.073	2.7	1.0	3.6	0.7	0.6	4.5	3.0	1.2	3.3	0.7	0.6	4.5
40.649	16.704	3.1	1.0	2.7	0.6	0.5	4.2	2.8	1.3	2.9	0.0	0.4	4.4
47.067	15.493	2.7	0.9	3.0	0.6	0.5	4.0	2.8	1.1	2.8	0.5	0.5	4.1
52.379	13.066	2.5	0.8	3.3	0.7	0.6	4.1	2.8	1.0	3.0	0.5	0.6	4.2

#### 4. SONUÇ

Günümüz veri toplama ve veri değerlendirme sistemleri konum parametrelerini yer merkezli global bir sistemde ifade etmektedir. Bununla beraber, birçok fiziksel süreç ve geometrik koşullar, konum parametrelerine yerel jeodezik bir sistem içinde (yatay ve düşey yönde) etki etmektedir. Bu anlamda koordinat tekrarlılıkları ve hızların fiziksel olarak yorumlanabilmesi ve yersel ölçülerle birlikte değerlendirebilmesi, sonuçların yerel jeodezik sisteme uygun şekilde dönüştürülmesine bağlıdır. Yerel jeodezik sistemin global sisteme dönüştürülmesi temel olarak enlem ve boylama bağlı iki dönüklük ve sol el sistemini sağ el sistemine dönüştüren yansıma matrisinden oluşan üç dönüştürme matrisi ile gerçekleşir. Yerel jeodezik sisteme dönüştürülmüş konum parametrelerine ait hata ve toleranslar da konum parametreleri gibi global jeodezik sistemden dönüştürülerek elde edilmektedir. Ancak dönüştürme işleminde çoğu zaman, tüm veya blok köşegen kovaryans matrisi yerine global sistemdeki hata bileşenlerinden oluşturulan köşegen kovaryans matrisi kullanılmaktadır. Bu şekilde elde edilen yerel sistemdeki varyanslar, çeşitli faktörlere bağlı olarak değişen kovaryans ilişkilerinin göz ardı edilmesi nedeniyle hatalı olarak hesaplanmaktadır. Global jeodezik sistem hata bileşenleri arasındaki korelasyon ise giriş bölümünde sıralandığı üzere, geometrik, fiziksel ve stokastik faktörlere bağlı olarak şekillenmektedir.

Bu çalışmada, global jeodezik sistem kovaryans ilişkilerinde genel olarak baskın faktör olan geometrik ilişkiler ters çözüm yardımıyla yarı-analitik olarak elde edilmiştir. Global jeodezik sistemdeki kovaryans matrisi bu yöntemle yeniden düzenlenerek dönüştürme yapıldığında, yerel ve global kovaryans matrisleri arasındaki tutarsızlıklar giderilebilmektedir. Elde edilen sonuçlar, global jeodezik sistemin kovaryans matrisinin köşegeni dışındaki elemanların geometriden kaynaklanan bölümünün yuvarlama ve kesme hataları içerisinde kayıpsız olarak yeniden elde edilebileceğini göstermektedir.

Çalışma kapsamında elde edilen diğer önemli bir bulgu ise, global jeodezik sistemdeki varyansların eşit olması durumunda, kovaryanslarının da sifıra yakın değerlere sahip olmasıdır. Bu durumda, birbirine yakın varyans değerlerinin dönüştürümünde kovaryans ilişkileri ihmal edilebilir ya da geliştirilen yarı-analitik ifadelerle düzeltilebilir.

Sonuç olarak, bulunan yarı-analitik ifadeler ile global ve yerel jeodezik sistem varyansları arasındaki dönüştürme hataları giderilebilmekte ve yerel jeodezik sistemde, global sistem ile tutarlı stokastik modeller oluşturulabilmektedir.

#### KAYNAKLAR

**Aktuğ, B.**, 2003. ITRF Hız Alanı ve Görelî Hız Referans Sistemlerine Bakış, *Harita Dergisi*, 130, Temmuz, Ankara.

**Aktuğ, B.**, 2004. Günümüz Jeodezik Ölçü Sistemlerinde Veri İndirgemesi ve Kısıtların Ele Alınması, *Harita Dergisi*, 131, Ocak, Ankara.

**Aktuğ, B., Ayhan, M.E., Demir, C.,** 2004. 1992-2004 Yılları GPS Kampanyalarının Birleřtirilmesi ve Türkiye Hız Alanının Belirlenmesi, İ Rapor, UZYTEK.:05-04, Jeodezi D.Břk.İği, Haziran, Ankara.

**Altamimi, Z., Sillard, P., Boucher, C.,** 2002. ITRF2000: A New Release of the International Terrestrial Reference Frame for Earth Science Applications, *Geophysical Research Letters*, Vol.107, No.B10, pp.2214.

**Borre K., Strang, G.,** 1997..Linear Algebra, Geodesy and GPS, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley.

**El-Sheimy, N.,** 2001. Adjustment of Observations, Lecture Notes, University of Calgary, Canada.

**Herring, T. A.,** 1998. GAMIT/GLOBK Kalman filter VLBI and GPS analysis program, Version 4.1, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.

**Kahveci M., Yıldız F.,** 2001. Global Konumlama Sistemi (GPS), Nobel Yayın.

**Kılıoğlu, A.,** 1995. Jeodezide Dnřmler, İT *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul.

**Krakiwsky, E.J.,** 1995. Adjustment, Elementary Level, Lecture Notes, University of Calgary, Canada.

**Leick, A.,** 1990. GPS Satellite Surveying, Wiley & Sons Publication, New York.

**Nakiboğlu, M., Demir, C.,** 2003. Dengeleme Hesabı, Cilt.I-II, Harita Yüksek Teknik Okulu Ders Notları, Ankara.

**Seeber, G.,** 1993. Satellite Geodesy: Foundations, Methods, and Applications, Walter De Gruyter; ISBN: 3110127539.

**Vanicek, P., Krakiwsky, E.J.,** 1982. Geodesy: The Concepts, North Holland Publishing Company.