GAUSS - KRÜGER VE MERCATOR SİSTEMLERİNİN YEKDİĞERLERİNE TAHVİLİ HAKKINDA

Yazan
Yüksek Mühendis
Macit Erbudak

Bir $f(x)$ tabi'inin birden n ve kadar $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{(n)}_{(x)}$ müştakları malüm olursa, bu $f(x)$ tabi'inin TAYLOR silsilesine tevsii mümkün olur:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}_{(x)} + \ldots$$

İşte bu Taylor inkişafını meselemizi halederken kullanacağız. Deniz haritacılığında, Loxcodrome'ların sabit rota üzerinden deniz seferlerine imkân verdiklerinden dolayı MERCATOR inkişafı kullanılır. Bu deniz haritaları yapılırken, GAUSS-KRÜGER sistemine göre hesaplanmış sahil nirengi noktalarından istifade edildiğinden, ya bu noktaların veya Gauss-krugere göre hesaplanmış olan deniz nirengi noktalarının kordinatlarının Mercator sistemine tahvil edilmesi icap eder. İşte bu tahvil förmüllerini bulmağa çalışacağız.

Şimdi Mercator vaziyetlerini yazalım:

$$x' = rq \qquad\qquad y' = rl$$

q İzometrik arzdır:

$$q = \int^{\varphi} \frac{M d\varphi}{N \cos\varphi} = \int^{B} \frac{dB}{N \cos\varphi} = \int^{B} \frac{dB}{r}$$

İtmamdan sonra :

$$q = \ln tg \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin\varphi}{1 - e \sin\varphi}$$

Buda silsileye tevsi edilerek :

$$q = \frac{1}{\text{Mod.}} \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) - e^2 \sin\varphi - \frac{1}{3} e^4 \sin^3\varphi - \frac{1}{5} e^6 \sin^6\varphi \ldots$$

Gauss-krüger kordinatlarını x, y ile gösteriyoruz.

Gerek Mercator, gerekse Gauss-krüger inkişafları konforme olduklarından bunların biribirlerinin analitik fonksyonları olmaları icab eder, yani:

$$q + i\,l = f\,(x + i\,y) \qquad (1)$$
$$x + l\,y = \varphi\,(q + i\,l) \qquad (2)$$

$y = l = 0$ için $x = B - B_0$ olacağından $q = \int_{B_0}^{B} \frac{dB}{N \cos\varphi} = f\,(B)$ olur.

Bu halde f ve φ tabilerinin x ve q ye nazaran müştakları malüm olacağından, f ve φ silsileye tevsi edelelirler.

$$q + il = f'(x_0)(\Delta x + iy) + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x + iy)^2 + \ldots + \frac{\overset{(n)}{f}(x_0)}{n!}(\Delta x + iy)^n + .$$

$\overset{(n)}{f}(x_0) = \frac{d^n q}{dB^n}$ olduğundan, müştakları aşağıya yaziyoruz, ayrıca

$$t = \operatorname{tg}\varphi$$
$$\eta = e^{2\prime} \cos^2\varphi \text{ vaz edilmiştir:}$$

$$f'(x_0) = \frac{dq}{dB^n} = \frac{1}{N_0 \cos\varphi_0} = A_1$$

$$f''(x_0) = \frac{d^2q}{dB^2} = \frac{1}{N_0^2 \cos\varphi_0}\, t = A_2 \,.\, 2!$$

$$f'''(x_0) = \frac{d^3q}{dB^3} = \frac{1}{N_0^3 \cos\varphi_0}(1 + 2t_0 + \eta_0^2) = A_3 \,.\, 3!$$

$$f^{(IV)}(x_0) = \frac{d^4q}{dB^4} = \frac{1}{N_0^4 \cos\varphi_0}\, t_0\,(5 + 6t_0^2 + \eta_0^2 - 4\eta_0^4) = A_4 \,.\, 4!$$

$$f^{(V)}(x_0) = \frac{d^5q}{dB^5} = \frac{1}{N_0^5 \cos\varphi_0}(5 + 28t_0^2 + 24t_0^4 + 6\eta_0^2 + 8\eta_0^2 t_0^2) = A_5 . 5!$$

$$f^{(VI)}(x_0) = \frac{d^6q}{dB^6} = \frac{1}{N_0^6 \cos\varphi_0}\, t_0\; 61 + 180t_0^2 + 120t_0^4 + 46\eta_0^2 + 48\eta_0^2 t_0^2) = A_6 . 6!$$

$$f^{(\mathrm{VII})}(x_\circ)=\frac{d^7q}{dB^7}=\frac{1}{N_\circ^7\cos\varphi_\circ}(61+662t_\circ^2+1320t_\circ^4+720t_\circ^6)=A_7\,.\,7!$$

$$f^{(\mathrm{VIII})}(x_\circ)=\frac{d^8q}{dB^8}=\frac{1}{N_\circ^8\cos\varphi^\circ}t_\circ(1385+7266t_\circ^2+10920t_\circ^4+5040t_\circ^6)=A_8.8!$$

$$\Delta\,x=\rho\cos\theta$$

$y=\rho\sin\theta$ vaz ederek tahvil formüllerini elde etmiş oluruz:

$$\left.\begin{aligned} q &= A_1\,\Delta\,x + A_2\,\rho^2\cos 2\theta + A_3\,\rho^3\cos 3\,\theta + \ldots\\ l &= A_1\,y \quad + A_2\,\rho^2\sin 2\theta + A_3\,\rho^3\sin 3\,\theta + \ldots\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$\rho=\sqrt{\Delta\,x^2+y^2}$ ve $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{\Delta\,x}$ dir.

Şimdı meselenin aksini mütalaa edelim:

$$x+iy=\varphi'(q_1)\,(\Delta\,q+i\,l)+\frac{\varphi''(q_1)}{2!}(\Delta\,q+il)^2+\ldots+\frac{\overset{(n)}{\varphi}(x_1)}{n!}(\Delta q+il)^n+.$$

$K_n=\overset{(n)}{\varphi}(q_1)=\dfrac{d^nB}{dq^n}$ olduğuna göre:

$$\overset{(\mathrm{I})}{\varphi}(q_1)=\frac{dB}{dq}=N_1\cos\varphi_1=K_1$$

$$\overset{(\mathrm{II})}{\varphi}(q_1)=\frac{d^2B}{dq_1^2}=-N_1\cos^2\varphi_1.t_1=K_2\,.\,3!$$

$$\overset{(\mathrm{III})}{\varphi}(q_1)=\frac{d^3B}{dq_1^3}=-N_1\cos^3\varphi_1(1-t_1^2+\eta_1^2)=K_3\,.\,3!$$

$$\overset{(\mathrm{IV})}{\varphi}(q_1)=\frac{d^4B}{dq_1^4}=N_1\cos^4\varphi_1.t_1(5-t_1^2+q\,\eta_1^2+44\eta_1^4)=K_4\,.\,4!$$

$$\overset{(\mathrm{V})}{\varphi}(q)=\frac{d^5B}{dq_1^5}=N_1\cos^5\varphi_1(5\;\;18t_1^2+t_1^4+14\eta_1^2-58\eta_1^2t_1^2)=K_5\,.\,5!$$

$$\overset{(\mathrm{VI})}{\varphi}(q_1)=\frac{d^6B}{dq_1^6}=-N_1\cos^6\varphi_1-t(61-58t_1^2+t_1^4+270\eta_1^2-330\eta_1^2t_1^2)=K_6.6!$$

$$\overset{(\mathrm{VII})}{\varphi}(q_1)=\frac{d^7B}{dq_1^7}=-N_1\cos^7(61-479t_1^2+179t_1^4-t_1^6)=K_7.\,7!$$

$$\overset{(VIII)}{\varphi}(q_1) = \frac{d^8 B}{d q^8} = N_1 \cos^8 \varphi_1 \,.\, t_1 (1385 - 3111 t_1^2 + 543 t_1^4 - t_1^6) = K_8 \,.\, 8!$$

$$\begin{aligned} \Delta q &= R \cos w \\ l &= R \sin w \end{aligned} \quad \text{vaz ettikten sonra}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= K_1 \,\Delta q + K_2 R^2 \cos 2w + \ldots + K_n R^n \cos n\,w + \ldots \\ Y &= K_1 \, l \;+ K_2 R^2 \sin 2w + \ldots + K_n R^n \sin n\,w + \ldots \end{aligned}\right\} (4)$$

yazılır.

Şimdi (3) ve (4) muadelelerinde

q, l yerine $\dfrac{X^1}{N_o \cos \varphi_o}$, $\dfrac{L^1}{N_o \cos \varphi_o}$

ve X, Y yerinede $\dfrac{\bar{x}}{m_o}$, $\dfrac{\bar{Y}}{m_o}$ koyarız.

$m_o = 0{,}9999$ dır.

A ve K emallerini Karadeniz, cenubi ve garbî ak deniz sahillerinin birkaç noktası için hesaplayarak tahvil işlerini kolayca icra edebiliriz.

İstifade edilen eserler:

Yordan - Eggert
Zeitschrift F. Vermessungswesen 934
Roussilhe