Gauss-Krüger İrtisamı

Yazan :
Yüks. Müh.
Sami Aykaç

Her hangi bir meridiyan Dairesi boyunca mümas bir üstüvane üzerine arzın konform irtisamına gauss - krüger irtisamı denir. Bu tariften anlaşıldığı üzere gauss - krüger irtisamı :

1 — Konform bir irtisamdır

2 — Dilim mebde meridiyanının mürtesemi x mihveridir

3 — x mihveri üzerinde irtisam büyültme faktoru m = 1 dir.

Bir irtisamın konform olabilmesi için irtisam famktionlarının umumi şekli bundan evvelki yazıda istihraç edilmişti

$$x + i y = f(q + i l)$$

bu formülde

q = izometrik arz

l = dilim mebde merıdyanı ile her hangi bir noktanın meridıyanı arasındaki tul farkıdır. Kolaylık olmak üzere dilim mebde merıdıyanının tulunu ($\lambda = o$) kabul edelim.

Dilim mebde merıdıyanı üzerinde alınan bir A noktasını mürtesemi A' olsun A noktası için $l = o$ olur. A' noktası (2) nolu şarta göre (x) mihveri üzerinde olacağından A' noktası için $y = o$ olur. (A) ve (A') için $l = o, y = o$ olduğundan mebde merıdiyanı üzerindeki noktalar için irtisam funktionu

$$x + i y = E(q + i l)$$

$$x + i(o) = F(q + \imath o)$$

$$x = F(q) \quad \text{şeklini alır.}$$

(3) nolu şartta (x) mihveri üzerinde büyültme faktoru m == 1 idi (x) in hattı üstüvadan şimale doğru büyüdüğünü kabul edersek (x) in tulu (A) noktasının izometrik arz ile hattı üstüva arasında kalan dilim mebde meridıyanının tuluna müsavi olur. Bu tulu (B) ile gösterelim

$x = B$ olur

$x = F(q)$ olduğundan

$B = F(q)$ olur.

$F(q + il)$ funktionun taylor serisine göre açabilmek için (l) in küçük olması lazımdır. (l) ise bilindiği gibi mebde meridiyanından olan tul farkıdır şu halde biz $F(q + il)$ funktionunu taylor serisine göre açabilmek için irtisamı tahdit etmek mecburiyetindeyiz bunun için mebde meridiyanı her iki tarafındaki küçük şeritleri irtisam ettirelim bu şartlar altında $F(q + il)$ funktionunda l küçük alacağından Taylor silsilesine göre açılabilir.

$$F(q + il) = F(p) + il \frac{dF(q)}{dq} + 1/2\,(il)^2 \frac{dF^2(q)}{dq^2}$$

$$+ 1/6\,(il)^3 \frac{dF^3(q)}{dq^3} + 1/24\,(il)^4 \frac{dF^4(q)}{dq^4} + \ldots$$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = +1$ ve $B = F(q)$ olduğundan.

$$F(q + il) = X + iy = B + il \frac{dB}{dq} - 1/2\; l^2 \frac{d^2 B}{dq^2}$$

$$- 1/6\; i\, l^3 \frac{d^3 B}{dq^3} + 1/24\; l^4 \frac{d^4 B}{dq^4} + \ldots$$

reell ve imaginer kısımları ayrılınca :

$$X = B - 1/2\; l^2 \frac{d^2 B}{dq^2} + 1/24\; l^4 \frac{d^4 B}{dq^4}$$

$$Y = l \frac{d\,B}{d\,q} - 1/6\; l^3 \frac{d^3 B}{dq^3} + 1/120\; l^5 \frac{d^5 B}{dq^5}$$

bu düsturlarda, $B, \frac{dB}{dq}, \frac{d^2 B}{dq^2}, \frac{d^3 B}{dq^3}. \frac{d^4 B}{dq^4}$ ve $\frac{d^5 B}{dq}$ emsalleri (q) nin funktıonları olduğundan riyazi olarak meseleye halledilmiş nazarıyla bakılabilir yalnız.

Coğrafi koordineleri verilen bir noktanın Gauss - Krüger koordinelerini yukarıdaki formüllerle halletmek oldukça müşkül ve yorucudur.

Bunun için formüllerdeki (B) ve türevlerinin (φ) cinsinden değerleri hesaplanmıştır. Daha kolay anlaşılabilmesi için şimdilik bu değerleri ısbatsız olarak yazalım ve formülleri çıkaralım. Bahsin sonunda bu emsalleri teker teker ısbat edelim.

$$\frac{dB}{dq} = N \cos \varphi$$

$$\frac{d^2 B}{dq^2} = - N \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\frac{d^3 B}{dq^3} = - N \cos^3 \varphi \, (1 - t^2 + \eta^2)$$

$$\frac{d^4 B}{dq^4} = + N \sin \varphi \cos^3 \varphi \, (5 - t^2 + q\,\eta^2 + 4\,\eta^4)$$

$$\frac{d^5 B}{dq^5} = N \cos^5 \varphi \, (5 - 18\, t^2 + t^4)$$

$$\left.\begin{aligned} t &= \operatorname{tg} \varphi \\ \eta &= é \cos \varphi \end{aligned}\right\} \text{ olarak kabul edilmiştir.}$$

$$N = \frac{\alpha}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)\ 1/2} \quad \text{dır.}$$

bu değerler yukarıdaki förmüllerue yerine konursa. Gauss - Krüger irtisamının esas formüllerini elde etmiş oluruz.

$$X = B + \frac{l^2}{2}\frac{N}{\varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{l^4}{24} \cdot \frac{N}{\varrho^4} \sin \varphi \cos^3 \varphi \, (5 - t^2 + q\eta^2 + 4\eta^4)$$

$$Y = l\,\frac{N}{\varrho} \cos \varphi + \frac{l^3}{6}\frac{N}{\varrho^3} \cdot \cos^3 \varphi \, (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{l^5}{120} \cdot \cos^5 \varphi \, (5 - 18\, t^2 + t^4) .$$

Emsallerin İsbatı

$$\frac{dB}{dq} = N \cos \varphi$$

her hangi bir arzdaki meridiyan kavsinin tulünün umumî formülü :

$$B = \int_0^{\varphi} M \, d\varphi. \qquad \text{dir.}$$

$$dB = M\,d\varphi$$ olur.

$$M = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)\,3/2}$$ (M) in tarif formülüdür.

$$\frac{dB}{dq} = \frac{dB}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq} \qquad (1)$$

$dB = M\,d\varphi$ olduğundan.

$\frac{dB}{d\varphi} = M.$ bu değeri (1) No. lu formülde yerine yazalım.

$$\frac{dB}{dq} = M.\,\frac{d\varphi}{dq}$$ olur.

(q) izometrik Arzın tarif formülü :

$$dq = \frac{M\,d\varphi}{N \cos \varphi}$$ idi buradan

$$\frac{N \cos \varphi}{M} = \frac{d\varphi}{dq}$$ olur.

$$\frac{dB}{dq} \cdot M.\,\frac{d\varphi}{dq} = M.\,\frac{N \cos \varphi}{M} = N \cos \varphi.$$

$$\underline{\frac{dB}{dq} = N \cos \varphi}$$ ısbat edilmiş olur.

$$\underline{\frac{d^2 B}{dq^2} = -\,N \sin \varphi \cos \varphi}$$

ısbatı :

$$\left.\begin{array}{l} N = \dfrac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \\ W^2 = (1 - e^2 \sin^2 \varphi) \\ V^2 = (1 + e^2 \sin^2 \varphi) \\ a = \dfrac{c}{\sqrt{1 - e^2}} = c\sqrt{1 - e^2} \end{array}\right\}$$ tarif formülleridir.

$$\frac{c}{\sqrt{1 + e^2}} = c\sqrt{1 - e^2}$$

$$1 + e'^2 = \frac{1}{1 - e^2}$$

$$e'^2 = \frac{1}{1 - e^2} - 1 = \frac{1 - (1 - e^2)}{1 - e^2} = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$ bulunur.

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi = 1 + \left(\frac{e^2}{1 - e^2}\right) \cos^2 \varphi = \frac{(1 - e^2) + e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2}$$

$$= \frac{1 - e^2 (1 - \cos^2 \varphi)}{1 - e^2} = \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2}$$

$$V^2 = \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2}$$

$$(1 - e^2 \sin^2 \varphi) = V^2 (1 - e^2)$$ bulunur.

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)1/2} = \frac{a}{\sqrt{v^2 (1 - e^2)}} = \frac{1}{V} \cdot \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$\underline{\underline{N = \frac{c}{V}}}$$ bulunur.

$$\frac{dB}{dq} = N \cos \varphi = \frac{c}{v} \cos \varphi$$ olur.

$$\frac{d^2 B}{d q^2} = d\left(\frac{dB}{dq}\right) \cdot \frac{d\varphi}{dq} = \frac{d^2 B}{dq\, d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq}$$

$$\frac{dB}{dq} = \frac{c \cos \varphi}{v}$$

$$\frac{d^2 B}{dq\, d\varphi} = c \frac{\left[v \frac{d}{d\varphi} (\cos \varphi) - \cos \varphi \cdot \frac{dv}{d\varphi} \right]}{v^2}$$

$$= \frac{c}{v^2} \left[- v \sin \varphi - \cos \varphi \frac{dv}{d\varphi} \right]$$

$\frac{dv}{d\varphi}$ yi hesaplayıp yerine yazalım.

$$V = (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)\, 1/2$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = 1/2\ (1 + e'^2 \cos^2\varphi)^{-1/2}\ 2\, e'^2 \cos\varphi \sin\varphi\ (-1)$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{-e'^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(1 + e'^2 \cos^2\varphi)^{1/2}} = -e'^2 \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{v}$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = -e'^2 \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{v}$$

$$\left.\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}\,\varphi \\ \eta &= e' \cos^2\varphi \end{aligned}\right\} \text{ ile gösterelim.}$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{e'^2 . \cos^2\varphi . \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{v} = -\frac{\eta^2\, t}{v}$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{\eta^2\, t}{v} \qquad \text{bulunur.}$$

$$\frac{d^2 B}{dq\, d\varphi} = \frac{c}{v^2}\left[-v \sin\varphi - \cos\varphi . \left(\frac{-\eta^2\, t}{v}\right)\right]$$

$$= -\frac{c}{v^3}\left[v^2 \sin\varphi - \cos\varphi . \eta^2 . \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right]$$

$$= -\frac{c}{v^3} \sin\varphi\ [v^2 - \eta^2]$$

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos\varphi = 1 + \eta^2 \qquad \text{olduğundan.}$$

$$\frac{d^2 B}{dq\, d\varphi} = -\frac{c}{v^3} . \sin\varphi . [1 + \eta^2 - \eta^2]$$

$$\frac{d^2 B}{dq\, d\varphi} = -\frac{c}{v^3} \sin\varphi \qquad \text{bulunur.}$$

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{N}{M} . \cos\varphi \qquad \text{idi.}$$

$$\frac{N}{M} = \frac{\dfrac{a}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{1/2}}}{\dfrac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{3/2}}} = \frac{1 - e^2 \sin^2\varphi}{1 - e^2}$$

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{1 - e^2}\,(1 - e^2 \sin^2\varphi) = \frac{1}{1 - e^2}\, v^2\,(1 - e^2)$$

$$\frac{N}{M} = v^2 \text{ bulunur.}$$

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{N}{M} \cos\varphi = V^2 \cos\varphi$$

$$\frac{d^2 B}{dq^2} = \frac{d^2 B}{dq\, d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq} = -\frac{c}{v^3} \sin\varphi .\ V^2 \cos\varphi$$

$$\frac{d^2 B}{dq^2} = -\frac{c}{v} \sin\varphi \cos\varphi$$

$$N = \frac{c}{v} \quad \text{olduğundan.}$$

$$\boxed{\frac{d^2 B}{dq^2} = - N \sin\varphi \cos\varphi} \quad \text{isbat edilmiş olur.}$$

$$\underline{\frac{d^3 B}{dq^3} = - N \cos^3\varphi \,(1 - t^2 + \eta^2)}$$

ısbatı :

$$\frac{d^3 B}{dq^3} = \frac{d^3 B}{dq^2\, d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq}$$

$$\frac{d^2 B}{dq^2} = -\frac{c}{v} \sin\varphi \cos\varphi \quad \text{idi.}$$

$$\frac{d^3 B}{dq^2\, d\varphi} = - C \left[\frac{V(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - \sin\varphi \cos\varphi \dfrac{dv}{d\varphi}}{V^2} \right]$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{\eta^2 t}{v} \quad \text{idi.}$$

$$\frac{d^3 B}{dq^2\, d\varphi} = -\frac{c}{v^2} \left[V(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \sin\varphi \cos\varphi . \frac{\eta^2 t}{v} \right]$$

$$= -\frac{c}{v^3} [V^2 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \eta^2 \sin^2\varphi]$$

$$= -\frac{c}{v^3} [\sin^2\varphi\, (\eta^2 - v^2) + v^2 \cos^2\varphi]$$

$$\eta^2 - v^2 = -1 \quad \text{olduğundan.}$$

$$\frac{d^3 B}{dp^2\, d\varphi} = -\frac{c}{v^3} \cos^2 \varphi \, [\, v^2 - tg^2 \varphi \,]$$

$$\left.\begin{array}{l} v^2 = 1 + \eta^2 \\ tg^2 \varphi = t^2 \end{array}\right\} \quad \text{değerleri yerine konursa.}$$

$$\underline{\frac{d^3 B}{dq^2\, d\varphi} = -\frac{c}{v^3} \cos^2 \varphi \, [\, 1 + \eta^2 - t^2 \,]} \qquad \text{bulunur.}$$

$$\frac{d\varphi}{dq} = v^2 \cos \varphi \qquad \text{idi.}$$

$$\frac{d^3 B}{d q^3} = \frac{d^3 B}{dq^2\, d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq} = -\frac{c}{v^3} \cos^2 \varphi \, (1 - t^2 + \eta^2) \,.\, v^2 \cos \varphi$$

$$= -\frac{c}{v} \cos^3 \varphi \, (1 - t^2 + \eta^2)$$

$$N = \frac{c}{v} \qquad \text{olduğundan.}$$

$$\boxed{\frac{d^3 B}{dq^3} = -N \cos^3 \varphi \, (1 - t^2 + \eta^2)} \qquad \text{olduğu isbat edilmiş olur.}$$

$$\frac{d^4 B}{dq^4} = + N \sin \varphi \cos^3 \varphi \, (5 - t^2 + q\,\eta^2 + 4\,\eta^4)$$

emsalinin isbatı.

$$\frac{d B^4}{dq^4} = \frac{d^4 B}{dq^3\, d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq}$$

$$\frac{d^3 B}{dq^3} = -\frac{c}{v} \cos^3 \varphi \, (1 + t^2 + \eta^2)$$

$$= -\frac{c}{v} \cos^2 \varphi \, (v^2 - tg^2 \varphi)$$

$$= '- c\, v \cos^3 \varphi + \frac{c}{v} \cos \varphi \sin^2 \varphi$$

$$\frac{d^4 B}{dq^3\, d\varphi} = -\, c \left[\cos^3 \varphi .\ \frac{dv}{d\varphi} - 3\ v\ \cos^2 \varphi .\ \sin\ \varphi \right]$$

$$+\, c\, \frac{\left[v - (\sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi) - \cos \varphi \sin^2 \varphi \dfrac{d\,v}{d\varphi} \right]}{v^2}$$

$$\frac{d\,v}{d\,\varphi} = -\, \frac{\eta^2\ t}{v}$$ olduğundan.

$$\frac{d^4 B}{dq^3\, d\varphi} = -\, c \left[-\, \frac{\eta^2\ t}{v} \cos^3\ \varphi - 3\ v\ \cos^2\ \varphi\ \sin\ \varphi \right]$$

$$+\, \frac{c}{v^3} \left[v^2 \left(-\sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \right) + \cos \varphi \sin^2 \varphi .\ \eta^2\ t \right]$$

$$= -\, \frac{c}{v} \cos^2 \varphi \left[-\, \eta^2\ \frac{\sin\ \varphi}{\cos\ \varphi} \cos\ \varphi - 3\ v^2 \sin\ \varphi \right]$$

$$+\, \frac{c}{v^3} \left[(1 + \eta^2) \left(-\sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \right) .\ + \sin^3 \varphi\ \eta^2 \right]$$

$$\frac{d^4 B}{dq^3\, d\varphi} = -\, \frac{c}{v} \cos^2 \varphi \left[-\, \eta^2 \sin\ \varphi - 3\ v^2 \sin\ \varphi \right]$$

$$+\, \frac{c}{v^3} \left[-\sin^3 \varphi + 2 \sin\ \varphi\ \cos^3\ \varphi - \eta^2 \sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi \cos^3 \varphi \right.$$

$$\left. \eta^2 + \eta^2 \sin^3 \varphi \right]$$

$$= +\, \frac{c}{v} \cos^2 \varphi\ \sin\ \varphi\ [+ \eta^2 + 3\ v^2]$$

$$+\, \frac{c}{v^3} \left[-\sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + 2\, \eta^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \right]$$

$$= +\, \frac{c}{v} \sin\ \varphi\ \cos^2\ \varphi\ [4\, \eta^2 + 3]$$

$$+\, \frac{c}{v^3} \sin\ \varphi\ \cos^2\ \varphi \left[-\, \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + 2 + 2\ \eta^2 \right]$$

$$= +\, \frac{c}{v^3} \sin\ \varphi\ \cos^2\ \varphi \left[v^2 (3 + 4\ \eta^2) \right]$$

$$+ \frac{c}{v^3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \left[2 - t^2 + 2\eta^2 \right]$$

$$= + \frac{c}{v^3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \left[(1 + \eta^2)(3 + 4\eta^2) + 2 - t^2 + 2\eta^2 \right]$$

$$= + \frac{c}{v^3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \left[3 + 4\eta^2 + 3\eta^2 + 4\eta^4 + 2 - t^2 + 2\eta^2 \right]$$

$$\frac{d^4 B}{dq^3\, d\varphi} = + \frac{c}{v^3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \left[5 - t^2 + q\,\eta^2 + 4\eta^4 \right]$$

$$\frac{d^4 B}{dq^4} = \frac{d^4 B}{dq^3\, d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq} = + \frac{c}{v^3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \, [5 - t^2 + q\,\eta^2 + 4\eta^4] .\, v^2 \cos \varphi$$

$$\underline{\frac{d^4 B}{dq^4} = + \frac{c}{v} \sin \varphi \cos^3 \varphi \, [5 - t^2 + q\,\eta^2 + 4\eta^4]}$$

$$N = \frac{c}{v}$$

$$\frac{d^4 B}{dq^4} = N \sin \varphi \cos^3 \varphi \, [5 - t^2 + q\,\eta^2 + 4\eta^4]$$

formülü çıkar.

$$\underline{\frac{d^5 B}{dq^5} = N \cos^5 \varphi \, (5 - 18\, t^2 + t^4)}$$

<u>Isbatı :</u>

$$\frac{d^4 B}{dq^4} = + \frac{c}{v} \sin \varphi \cos^3 \varphi \, [5 - t^2 + q\,\eta^2 + 4\eta^4]$$

$$\frac{d^5 B}{dq^4\, d\varphi} = [5 - t^2 + q\,\eta^2 + 4\eta^4] . \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{c}{v} \sin \varphi \cos^3 \varphi \right)$$

$$+ \frac{c}{v} \sin \varphi \cos^3 \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(5 - t^2 + q\,\eta^2 + 4\eta^4 \right)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{c}{v} \sin \varphi \cos^3 \varphi \right) =$$

$$c\,\frac{\left[(\cos^4\varphi - 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\,v - \sin\varphi\cos^3\varphi\,\dfrac{dv}{d\varphi}\right]}{v^2}$$

$$= \frac{c}{v^2}\left[(\cos^4\varphi - 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\,v + \sin\varphi\cos^3\varphi\,\frac{\eta^2 t}{v}\right]$$

$$= \frac{c}{v^3}\cos^4\varphi\left[\left(1 - 3\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)v^2 + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\eta^2 t\right]$$

$$= \frac{c}{v^3}\cos^4\varphi\left[(1 - t^2)\,v^2 + \eta^2 t^2\right]$$

$$= \frac{c}{v^3}\cos^4\varphi\left[(1 - 3t^2)(1 + \eta^2) + \eta^2 t^2\right]$$

$$= \frac{c}{v^3}\cos^4\varphi\left[1 - 3t^2 + \eta^4 - 3\eta^2 t^2 + \eta^2 t^2\right]$$

$$= \frac{c}{v^3}\cos^4\varphi\left[1 - 3t^2 + \eta^2 - 2\eta^2 t^2\right]$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{c}{v}\sin\varphi\cos^3\varphi\right) = \frac{c}{v^3}\cos^4\varphi\,[1 - 3t^2 + \eta^2 - 2\eta^2 t^2]$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(5 - t^2 + q\eta^2 + 4\eta^4\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(5 - tg^2\varphi + q\,é^2\cos^2\varphi + 4é^4\cos^4\varphi\right)$$

$$= -\frac{2\,tg\,\varphi}{\cos^2\varphi} + q\,é^2 \,.\, 2\cos\varphi\sin\varphi\,(-1) + 4\,é^4\,4\cos^3\varphi.\,\sin\varphi\,(-1)$$

$$= -\frac{2\,tg\,\varphi}{\cos^2\varphi} - 18\,é^2\cos\varphi\sin\varphi - 16\,é^4\cos^3\varphi\sin\varphi$$

$$= -\frac{2\,tg\,\varphi}{\cos^2\varphi} - 18\,é^2\cos^2\varphi.\,tg\,\varphi - 16\,é^4\cos^4\varphi\,tg\,\varphi$$

$$= -2\,tg\,\varphi\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} + q\,\eta^2 + 8\,\eta^4\right)$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(5 - t^2 + q\eta^2 + 4\eta^4\right) = -2t\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} + q\eta^2 + 8\eta^4\right)$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + tg^2 = 1 + t^2$$ olduğundan.

$$\frac{d}{d\varphi}\left(5 - t^2 + q\eta^2 + 4\eta^4\right) = -2t\left(1 + t^2 + q\eta^2 + 8\eta^4\right)$$

$$\frac{d^5 B}{dq^4\, d\varphi} = \left(5 - t^2 + q\eta^2 + 4\eta^4\right)\frac{c}{v^3}\cos^4\varphi\left(1 - 3t^2 + \eta^2 - 2\eta^2 t^2\right)$$

$$-\frac{c}{v}\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos^4\varphi \,.\, 2t\left(1 + t^2 - q\eta^2 - 8\eta^4\right)$$

$$= \frac{c}{v^3}\cos^4\varphi\left(5 - t^2 + q\eta^2 + 4\eta^4\right)\left(1 - 3t^2 + \eta^2 - 2\eta^2 t^2\right)$$

$$-\frac{c}{v^3}\cos^4\varphi \,.\, 2t^2 v^2\left(1 + t^2 - q\eta^2 - 8\eta^4\right)$$

$$\frac{d^5 B}{dq^4\, d\varphi} = \frac{c}{v^3}\cos^4\varphi\Big[\left(5 - t^2 + q\eta^2 + 4\eta^4\right)\left(1 - 3t^2 + \eta^2 - 2\eta^2 t^2\right)$$
$$2t^2\left(1 + \eta^2\right)\left(1 + t^2 - q\eta^2 - 8\eta^4\right)\Big]$$

4 ncü kuvvetten daha büyük kuvvetli kosınusler sıfıra çok yakın olduklarından terk edilebilirler.

$\eta^2 = \acute{e}^2\cos^2\varphi$ olduğundan.

$\eta^2\cos^4\varphi = \acute{e}^2\cos^6\varphi$. eder. Ve terk edilir şu halde yukarıdaki formülde (η^2) lı hatlar terk edilirse.

$$\frac{d^5 B}{dq^4\, d\varphi} = \frac{c}{v^3}\cos^4\varphi\left[\left(5 - t^2\right)\left(1 - 3t^2\right) - 2t^2\left(1 + t^2\right)\right]$$

kalır. Ve.

$$\frac{d^5 B}{dq^4\, d\varphi} = \frac{c}{v^3}\cos^4\varphi\left[5 - 15t^2 - t^2 + 3t^4 - 2t^2 - 2t^4\right]$$

$$\frac{d^5 B}{dq^4\, d\varphi} = \frac{c}{v^3} \cos^4\varphi \left[5 - 18\, t^2 + t^4 \right]$$ bulunur.

$$\frac{d^5 B}{dq^5} = \frac{d^5 B}{dq^4\, d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq} = \frac{c}{v^3} \cos^4\varphi \left[5 - 18\, t^2 + t^4 \right] \cdot v^2 \cos\varphi$$

$$\frac{d^5 B}{dq^5} = \frac{c}{v} \cos^5\varphi \left[5 - 18\, t^2 + t^4 \right]$$

$$N = B + \frac{l^2}{2}\frac{N}{\varrho^2} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{l^4}{24}\frac{N}{\varrho^4} \sin\varphi \cos^3\varphi \left(5 - t^2 + q\eta^2 + 4\eta^4 \right)$$

$$Y = l\frac{N}{\varrho} \cos\varphi + \frac{l}{6}\frac{N}{\varrho^3} \cos^3\varphi \left(1 - t^2 + \eta^2 \right) + \frac{l^5}{120}\frac{N}{\varrho^5} \cos^5\varphi \left(5 - 18\, t^2 + t^4 \right)$$

formüllerini ısbatlı olarak istihraç ettik. Arz ellipsoide üzerinde (φ_1 2) coğrafi koordineleri ile verilen bir noktanın Gauss - Krüger irtisamı müstevisindeki mürtesemini bulmak için.

$l = \lambda - \lambda_0$ hesap edilir.

$\lambda_0 =$ mebde merıdıyanının tulüdür.

φ ve l malûm olunca yukarıdaki formüller vasıtasiyle X Y hesaplanır ve tersim edilir.