

FRANZ MAYR PROJEKSİYONU ÖRNEĞİNDE GERÇEK ANLAMDA OLMAYAN PROJEKSİYONLARA SAYISAL BİR YAKLAŞIM*

(A NUMERICAL APPROACH TO THE PSEUDO-PROJECTIONS ON THE EXAMPLE OF FRANZ MAYR PROJECTION)

Olca ÖZTAN
Cengizhan İPBÜKER
Necla ULUĞTEKİN

ÖZET

Bu makalede Franz Mayr'ın projeksiyonu ayrıntılı bir biçimde incelenmiş ve projeksiyon denklemlerinin analitik ifadeleri elde edilmiştir. Franz Mayr tarafından ortaya atılan alan koruyan modifiye edilmiş silindirik projeksiyonun dik koordinatlarının hesabı bir eliptik integralin çözümüne dayanmaktadır. Franz Mayr bu integralin çözümü için Legendre tablolarından aldığı E ve F eliptik fonksiyon değerlerini kullanmaktadır. Bu çalışmada tablo değerlerinden enterpolasyon yerine projeksiyonu ifade eden genel eşitliklerle analitik çözüm verilmiştir. Ayrıca gerçek anlamda olmayan bazı projeksiyonlarda, projeksiyon koordinatlarından coğrafi koordinatların elde edilmesindeki güçlükleri çözmek amacı ile uygulanabilecek genel bir iterasyon yöntemi verilmiştir.

ABSTRACT

In this article, the modified cylindrical projection of Franz Mayr studied in detail and the analytical expressions of the projection equations are derived. The computation of the plane coordinates of this projection depends on the solution of an elliptical integral. Franz Mayr used The Legendre Tables for the E and F elliptical function values. In this study an analytical solution is presented instead of interpolation between the table values. At the end a general iteration algorithm is given, which can be used for deriving the geographical coordinates from the projection coordinates for some pseudo-projections.

1. GİRİŞ

Kartografik projeksiyonlar, uygulanan izdüşüm yönteminin geometrik veya matematik ifade biçimine bağlı olarak; gerçek anlamda olan projeksiyonlar ve gerçek anlamda olmayan projeksiyonlar şeklinde sınıflandırılmaktadır. Gerçek projeksiyonlar, seçilen projeksiyon özelliği sonucu ortaya çıkan geometrik yapıdan yararlanılarak yeryüzünün öncelikle düzlem, silindir veya koni gibi aracı yüzeylere aktarılması, daha sonra da bu yüzeylerin harita düzlemine açılması şeklinde açıklanabilir. Gerçek anlamda olmayan projeksiyonlarda yeryüzü üzerindeki noktaların harita düzlemi üzerindeki karşılıkları aracı bir yüzey kullanılmadan bir matematik operatör yardımıyla elde edilirler. Bu nedenle, “gerçek yüzeyli olmayan” veya “itibari” projeksiyonlar olarak da isimlendirilmektedirler. Fakat gerçek yüzeyli projeksiyonlar dan esinlenerek elde edildikleri için modifiye edildikleri gerçek projeksiyonların türüne bağlı olarak düzlem, konik veya silindirik projeksiyonlar olarak gruplara ayrılırlar. Genellikle atlas

* Bu makalenin ana teması Prof.Dr. Olca Öztan'ın vefatından önceki son çalışmalarından biri olup, kendisinin orijinal notlarından faydalanılarak diğer yazarlar tarafından tamamlanmıştır.

haritalarının veya küçük ölçekli coğrafya haritalarının yapımında kullanılırlar /6/. Genellikle alan koruma özelliğine sahiptirler. Uzunluk koruyan gerçek anlamda olmayan projeksiyonlar türetilmiş olmasına karşın, bu projeksiyonlarda açı koruma özelliği söz konusu değildir.

Franz Mayr projeksiyonu gerçek anlamda olmayan, alan koruyan silindirik bir projeksiyondur /3/. Dünya haritalarının çiziminde referans yüzeyi olarak küre alındığından, φ coğrafi enlemde bulunan $d\varphi$ genişliğindeki bir kuşağın dF alanı,

$$dF = 2\pi R^2 \cos\varphi d\varphi \quad (1)$$

veya λ boylam farkı için,

$$dF = \lambda R^2 \cos\varphi d\varphi \quad (1.a)$$

olarak ifade edilmektedir (λ radyan biriminde). Bu formül farklı bileşenlere ayrılarak aşağıdaki şekillerde ifade edilebilir :

a. (1.a) ifadesi,

$$\begin{aligned} y &= \lambda R \cos\varphi \\ dx &= R d\varphi \end{aligned} \quad (2)$$

gibi iki uzunluğun çarpımı olarak ele alındığında bir φ enlemindeki kuşağın y uzunluğu, ekvatordaki λR uzunluğuna göre $\cos \varphi$ kadar kısalmış, dx uzunlukları ise aynı kalır. Bu nedenle orta meridyenin ve paralel dairelerin uzunlukları da korunur. Bu da

$$\begin{aligned} y &= \lambda R \cos\varphi \\ x &= R\varphi \end{aligned} \quad (3)$$

şeklinde Mercator-Sanson (alan koruyan sinüsoidal) projeksiyon eşitliklerini verir /3,9/.

b. (1.a) ifadesi,

$$\begin{aligned} y &= \lambda R \\ dx &= R \cos\varphi d\varphi \end{aligned} \quad (4)$$

gibi iki uzunluğun çarpımı olarak da ele alındığında kuşakların y uzunluğu tam çevre için $2\pi R$, bir λ boylamı için λR olarak sabit kalır, dx uzunlukları ise $\cos \varphi$ kadar kısalmış. Bu ise,

$$\begin{aligned} y &= \lambda R \\ x &= R \sin\varphi \end{aligned} \quad (5)$$

şeklinde Lambert'in alan koruyan ortografik silindirik projeksiyon eşitliklerine karşılık gelir /3,9/.

c. Franz Mayr (1.a) ifadesini, $\cos \varphi$ değişkeninin etkisini projeksiyon koordinatlarına eşit olarak dağıtmak amacıyla

$$\begin{aligned} dy &= R\sqrt{\cos\varphi}d\varphi \\ x &= \lambda R\sqrt{\cos\varphi} \end{aligned} \quad (6)$$

gibi iki uzunluğun çarpımı olarak ele almıştır /3/. (6) ifadesinden,

$$\begin{aligned} y &= R \int_0^{\varphi} \sqrt{\cos\varphi} d\varphi \\ x &= \lambda R \sqrt{\cos\varphi} \end{aligned} \quad (7)$$

şeklinde Franz Mayr projeksiyon denklemleri elde edilir. (7) den,

$$\begin{aligned} dy &= R\sqrt{\cos\varphi}d\varphi \\ dx &= R\sqrt{\cos\varphi}d\lambda \end{aligned} \quad (8)$$

olur. (8) ifadeleri; küre üzerindeki bir $P(\varphi,\lambda)$ noktasında φ 'nin $d\varphi$, λ 'nında $d\lambda$ kadar artması durumunda P noktasının projeksiyon düzlemindeki karşılığı olan $P'(x,y)$ noktasındaki y 'nin dy , x ' in dx artımını vermektedir. (8) den, küre üzerinde $d\varphi=d\lambda$ şeklinde bir coğrafi pafta ağının projeksiyon düzlemi üzerinde $dy=dx$ şeklinde bir kareler ağına dönüşeceği görülür. Bu nedenle Franz Mayr projeksiyonu alan koruyan bir projeksiyon olarak tanımlanır.

x ' in, λ ve φ 'nin $[0^\circ,90^\circ]$ kapalı aralığındaki değerleri için hesaplanması bir zorluk göstermez. y ' nin hesabı, öncelikle $\int_0^{\varphi} \sqrt{\cos\varphi} d\varphi$ eliptik integralinin çözümünü gerektirdiği için oldukça zordur. Franz Mayr integralin çözümünü,

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi} \sqrt{\cos\vartheta} d\vartheta &= 2\sqrt{2} \left[E(\varphi_1, 45^\circ) - \frac{1}{2} F(\varphi_1, 45^\circ) \right] \\ \varphi_1 &= \arcsin \left(\sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned}$$

şeklinde bulmuştur /1,3/. Çözümde ortaya çıkan E ve F eliptik fonksiyonun değerlerini ise Legendre tablolarından alarak yapmıştır /3,5,7/.

Bölüm 2.de bu eliptik integralin çözümü (15) eşitliği ile verilmiş, Franz Mayr projeksiyonunun projeksiyon denklemlerinin analitik ifadeleri çıkarılmıştır. Bölüm 3.de Franz Mayr projeksiyonunda dünya haritasının çizimi için gerekli olan kıta kıyı çizgilerinin coğrafi koordinatlarının elde edilmesinde kullanılan yöntemler verilmiştir.

2. FRANZ MAYR PROJEKSİYONU DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, (7) eşitliklerindeki eliptik integralin çözümü için $\sqrt{\cos\varphi}$ seriye açılacak (Bkz. Bölüm 2.a) ve analitik çözüm için iki yol verilecektir (Bkz. Bölüm 2.b). Birincisinde bilgisayar yazılımına uygun, doğruluğu çok yüksek bir ifade (15), ikincisinde ise Legendre tablolarından elde edilen değerlere en iyi yakınsayan eşitlikler (16), (19) verilecektir.

a. Eliptik İntegralin Çözümü

$\int_0^{\varphi} \sqrt{\cos\varphi} d\varphi$ integralinin alınabilmesi için,

$$\psi = \|\varphi\| \quad (9)$$

değişkeni tanımlanarak

$$\varphi = \theta + \psi \quad (10)$$

değişken dönüşümü yapılabilir ($0^\circ < \theta < 1^\circ$). (9) ifadesi tam değer fonksiyonu olduğu için $d\psi = 0$ dır. Bu nedenle

$$d\varphi = dx \quad (11)$$

olmaktadır. O halde $f(\varphi) = \sqrt{\cos\varphi}$ fonksiyonunun herhangi bir φ değişkeni için değeri, ψ 'ye bağlı olarak ,

$$f(\varphi) = f(\psi + \theta) = f(\psi) + \frac{1}{1!} f'(\psi)\theta + \frac{1}{2!} f''(\psi)\theta^2 + \frac{1}{3!} f'''(\psi)\theta^3 + \Lambda$$

$$\Lambda + \frac{1}{10!} f^{(10)}(\psi)\theta^{10} \quad (12)$$

şeklinde Taylor serisine açılarak hesaplanabilir /8,10/. Burada, $t = \tan\psi$ değişken dönüşümü ile,

$$f(\psi) = h = \sqrt{\cos\psi}$$

$$f'(\psi) = -\frac{1}{2} ht$$

$$f''(\psi) = -\frac{1}{2} h\left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)$$

$$f'''(\psi) = -\frac{1}{2} h\left(\frac{3}{4}t^3 + \frac{1}{2}t\right)$$

$$f^{(4)}(\psi) = -\frac{1}{2} h\left(\frac{15}{8}t^4 + \frac{10}{4}t^2 + \frac{1}{2}\right) \quad (13)$$

$$f^{(5)}(\psi) = -\frac{1}{2} h\left(\frac{105}{16}t^5 + \frac{90}{8}t^3 + \frac{19}{4}t\right)$$

$$\begin{aligned}
f^{(6)}(\psi) &= -\frac{1}{2}h\left(\frac{945}{32}t^6 + \frac{975}{16}t^4 + \frac{289}{8}t^2 + \frac{19}{4}\right) \\
f^{(7)}(\psi) &= -\frac{1}{2}h\left(\frac{10395}{64}t^7 + \frac{12495}{32}t^5 + \frac{4767}{16}t^3 + \frac{559}{8}t\right) \\
f^{(8)}(\psi) &= -\frac{1}{2}h\left(\frac{135135}{128}t^8 + \frac{185220}{64}t^6 + \frac{86310}{32}t^4 + \frac{14851}{16}t^2 + \frac{559}{8}\right) \\
f^{(9)}(\psi) &= -\frac{1}{2}h\left(\frac{2027025}{256}t^9 + \frac{3118500}{128}t^7 + \frac{1715490}{64}t^5 + \frac{389793}{32}t^3 + \frac{29143}{16}t\right) \\
f^{(10)}(\psi) &= -\frac{1}{2}h\left(\frac{34459425}{512}t^{10} + \frac{58783725}{256}t^8 + \frac{37268910}{128}t^6 + \frac{10526415}{64}t^4 + \frac{1198522}{32}t^2 + \frac{29143}{16}\right)
\end{aligned}$$

olmaktadır. (9), (10) ve (11) gözönüne alınırsa, R=1 için (7) ifadesinden ($\psi_{i+1} - \psi_i = \rho = \pi / 180$),

$$\begin{aligned}
y &= \int_0^{\psi} \sqrt{\cos \varphi} d\varphi = \left\{ \sum_{\psi_i=0}^{\psi-1} \int_{\psi_i}^{\psi_i+1} \sqrt{\cos \varphi} d\varphi \right\} + \int_{\psi}^{\psi} \sqrt{\cos \varphi} d\varphi \\
y &= \left\{ \sum_{\psi_i=0}^{\psi-1} \int_0^{\rho} f(\psi_i + \theta) d\theta \right\} + \int_0^{\theta} f(\psi + \theta) d\theta \tag{14}
\end{aligned}$$

yazılabilir /8/. (12) ifadesi (14) de yerine konursa,

$$\begin{aligned}
y &= \left\{ \sum_{\psi_i=0}^{\psi-1} \left(f(\psi_i)\rho + \frac{1}{2!} f'(\psi_i)\rho^2 + \Lambda + \frac{1}{11!} f^{(10)}(\psi_i)\rho^{11} \right) \right\} + \\
&+ f(\psi)\theta + \frac{1}{2!} f'(\psi)\theta^2 + \Lambda + \frac{1}{11!} f^{(10)}(\psi)\theta^{11}
\end{aligned} \tag{15}$$

$$x = \lambda \sqrt{\cos(\psi + \theta)}$$

olur.

(15) denkleminin uygun olarak kodlanan bir yazılım ile elde edilen değerler Tablo-1'de Y1 değerleri olarak verilmiştir.

b. Analitik Çözüm

Franz Mayr projeksiyonu için verilen (7) ifadesindeki eliptik integralin analitik ifadesi için $\sqrt{\cos \varphi}$ fonksiyonu R=1 için Maclaurin serisine açılıp serinin integrali alındığında /8,10/

$$y = \varphi - \frac{1}{12}\varphi^3 - \frac{1}{480}\varphi^5 - \frac{19}{40320}\varphi^7 - \frac{559}{5806080}\varphi^9 \quad (16)$$

$$x = \lambda\sqrt{\cos\varphi}$$

elde edilir.

Tablo-1: Franz Mayr'in Tablo değerlerinin (15),(16) ve (19) denklemlerinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması

φ	X	Y1	Y2	Y3	Y4
0	1.5708	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	1.5678	0.0872	0.0872	0.0872	0.0872
10	1.5588	0.1741	0.1740	0.1741	0.1741
15	1.5438	0.2603	0.2602	0.2603	0.2603
20	1.5227	0.3455	0.3455	0.3455	0.3455
25	1.4954	0.4294	0.4293	0.4293	0.4294
30	1.4618	0.5115	0.5115	0.5115	0.5115
35	1.4217	0.5917	0.5916	0.5916	0.5917
40	1.3748	0.6694	0.6693	0.6693	0.6694
45	1.3209	0.7443	0.7442	0.7442	0.7443
50	1.2594	0.8160	0.8160	0.8159	0.8160
55	1.1896	0.8841	0.8840	0.8840	0.8841
60	1.1107	0.9480	0.9480	0.9479	0.9481
65	1.0212	1.0073	1.0072	1.0072	1.0074
70	0.9186	1.0612	1.0612	1.0611	1.0616
75	0.7991	1.1091	1.1091	1.1089	1.1099
80	0.6546	1.1496	1.1496	1.1495	1.1515
85	0.4637	1.1810	1.1810	1.1809	1.1857
90	0.0000	1.1982	1.1993	1.1981	1.2112

(16) denklemlerinden elde edilen değerler Tablo-1' de Y4 değerleri olarak verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi Y4 değerleri Franz Mayr tarafından verilen Y3 değerlerinden özellikle yüksek enlemlerde farklılıklar göstermektedir. Yeterli doğrulukta bir formül elde edebilmek için (7) ifadeleri herhangi bir ψ değerinde $R=1$ için Taylor serisine açılıp serinin integrali alındığında,

$$y = a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + a_4\varphi^4 + a_5\varphi^5 + a_6\varphi^6 + a_7\varphi^7 + a_8\varphi^8 + a_9\varphi^9 + \Lambda \quad (17)$$

$$x = \lambda\sqrt{\cos\varphi}$$

elde edilir. Burada a_i katsayıları,

$$a_1 = f(\psi) - \frac{1}{1!}f'(\psi)\psi + \frac{1}{2!}f''(\psi)\psi^2 - \frac{1}{3!}f'''(\psi)\psi^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\psi)\psi^4 - \frac{1}{5!}f^{(5)}(\psi)\psi^5 +$$

$$+ \frac{1}{6!}f^{(6)}(\psi)\psi^6 - \frac{1}{7!}f^{(7)}(\psi)\psi^7 + \frac{1}{8!}f^{(8)}(\psi)\psi^8 - \frac{1}{9!}f^{(9)}(\psi)\psi^9 + \frac{1}{10!}f^{(10)}(\psi)\psi^{10}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(f'(\psi) - \frac{1}{1!}f''(\psi)\psi + \frac{1}{2!}f'''(\psi)\psi^2 - \frac{1}{3!}f^{(4)}(\psi)\psi^3 + \frac{1}{4!}f^{(5)}(\psi)\psi^4 - \frac{1}{5!}f^{(6)}(\psi)\psi^5 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6!}f^{(7)}(\psi)\psi^6 - \frac{1}{7!}f^{(8)}(\psi)\psi^7 + \frac{1}{8!}f^{(9)}(\psi)\psi^8 - \frac{1}{9!}f^{(10)}(\psi)\psi^9 \right)$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1}{3} \left(\begin{aligned} &\frac{1}{2!} f''(\psi) - \frac{3}{3!} f'''(\psi)\psi + \frac{6}{4!} f^{(4)}(\psi)\psi^2 - \frac{10}{5!} f^{(5)}(\psi)\psi^3 + \frac{15}{6!} f^{(6)}(\psi)\psi^4 + \\ &-\frac{21}{7!} f^{(7)}(\psi)\psi^5 + \frac{28}{8!} f^{(8)}(\psi)\psi^6 - \frac{36}{9!} f^{(9)}(\psi)\psi^7 + \frac{45}{10!} f^{(10)}(\psi)\psi^8 \end{aligned} \right) \\
a_4 &= \frac{1}{4} \left(\begin{aligned} &\frac{1}{3!} f'''(\psi)\psi - \frac{4}{4!} f^{(4)}(\psi)\psi + \frac{10}{5!} f^{(5)}(\psi)\psi^2 - \frac{20}{6!} f^{(6)}(\psi)\psi^3 + \\ &+\frac{35}{7!} f^{(7)}(\psi)\psi^4 - \frac{56}{8!} f^{(8)}(\psi)\psi^5 + \frac{84}{9!} f^{(9)}(\psi)\psi^6 - \frac{120}{10!} f^{(10)}(\psi)\psi^7 \end{aligned} \right) \\
a_5 &= \frac{1}{5} \left(\begin{aligned} &\frac{1}{4!} f^{(4)}(\psi) - \frac{5}{5!} f^{(5)}(\psi)\psi + \frac{15}{6!} f^{(6)}(\psi)\psi^2 - \frac{35}{7!} f^{(7)}(\psi)\psi^3 + \\ &+\frac{70}{8!} f^{(8)}(\psi)\psi^4 - \frac{126}{9!} f^{(9)}(\psi)\psi^5 + \frac{210}{10!} f^{(10)}(\psi)\psi^6 \end{aligned} \right) \\
a_6 &= \frac{1}{6} \left(\begin{aligned} &\frac{1}{5!} f^{(5)}(\psi) - \frac{6}{6!} f^{(6)}(\psi)\psi + \frac{21}{7!} f^{(7)}(\psi)\psi^2 - \frac{56}{8!} f^{(8)}(\psi)\psi^3 + \\ &+\frac{126}{9!} f^{(9)}(\psi)\psi^4 - \frac{252}{10!} f^{(10)}(\psi)\psi^5 \end{aligned} \right) \\
a_7 &= \frac{1}{7} \left(\begin{aligned} &\frac{1}{6!} f^{(6)}(\psi) - \frac{7}{7!} f^{(7)}(\psi)\psi + \frac{28}{8!} f^{(8)}(\psi)\psi^2 - \frac{84}{9!} f^{(9)}(\psi)\psi^3 + \\ &+\frac{210}{10!} f^{(10)}(\psi)\psi^4 \end{aligned} \right) \\
a_8 &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{7!} f^{(7)}(\psi) - \frac{8}{8!} f^{(8)}(\psi)\psi + \frac{36}{9!} f^{(9)}(\psi)\psi^2 - \frac{120}{10!} f^{(10)}(\psi)\psi^3 \right) \\
a_9 &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{8!} f^{(8)}(\psi) - \frac{9}{9!} f^{(9)}(\psi)\psi + \frac{45}{10!} f^{(10)}(\psi)\psi^2 \right)
\end{aligned} \tag{18}$$

olarak elde edilir. ψ' ler radyan biriminde olup türev değerleri (13) ifadesinden hesaplanır. Burada sorun ψ' nin seçimidir. Bu nedenle ψ' nin çeşitli değerleri için (17) ifadesinin doğruluğu araştırılmıştır. Sonuç olarak $0^\circ \leq \varphi \leq 75^\circ$ aralığında $\psi=32^\circ$, $75^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ aralığında ise $\psi=75^\circ$ alınması durumunda en yüksek doğruluğa sahip olduğu görülmüştür.

ψ nin 32° ve 75° değerleri için (13), (18) ve (17) den,

$$x = \lambda \sqrt{\cos \varphi}$$

olmak üzere

$0^\circ \leq \varphi \leq 75^\circ$ ($\psi=32^\circ$) için,

$$y = 0.99940\varphi + 0.00272\varphi^2 - 0.09113\varphi^3 + 0.01711\varphi^4 - 0.03397\varphi^5 + 0.04945\varphi^6 + \\ - 0.05945\varphi^7 + 0.05054\varphi^8 - 0.02939\varphi^9 + 0.01040\varphi^{10} - 0.00176\varphi^{11}$$

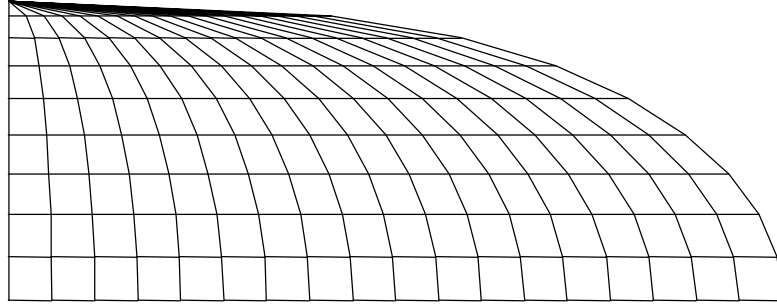
$75^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ($\psi=75^\circ$) için,

$$y = 4390.65878 - 37553.21610\varphi + 14104.77552\varphi^2 - 341261.91685\varphi^3 + \\ + 531698.81236\varphi^4 - 580200.22906\varphi^5 + 452478.00377\varphi^6 - 252191.82603\varphi^7 + \\ + 98450.32661\varphi^8 - 25637.99960\varphi^9 + 4008.63079\varphi^{10} - 285.10478\varphi^{11} \tag{19}$$

denklemleri elde edilmiştir. (19) denklemlerinden elde edilen değerler Tablo-1’de Y2 değerleri olarak verilmiştir.

3. FRANZ MAYR PROJEKSİYONUNDA DÜNYA HARİTASININ ÇİZİMİ

Şekil-1’de (19) denklemlerinden yararlanılarak çizilen Franz Mayr projeksiyonu coğrafi pafta ağı verilmiştir (Şekil-2 ile 3 ve Şekil-4 ile 5’i karşılaştırınız.). Kartografik projeksiyonlarda pafta ağı projeksiyon koordinatları istenilen projeksiyon ve aralıklarda enlem ve boylam artışlarına göre hesaplanabilen büyüklüklerdir. Bu pafta ağının üzerine yerleştirilecek kıta kıyı çizgileri bilgileri varolan ve projeksiyonu bilinen haritalardan sayısallaştırılarak elde edilir. (Projeksiyonu bilinen haritanın ölçeği bilinmiyorsa, uzunluğu korunan elemana göre ölçeği hesaplanarak sayısallaştırma işleminde dikkate alınır.) Burada problem elde edilen bu projeksiyon koordinatlarından coğrafi enlem ve boylam değerlerinin bulunmasıdır. Aşağıda bu dönüşümler ile ilgili bütün projeksiyonlara uygulanabilecek genel bir algoritma Aitow-Hammer ve Mollweide projeksiyonlarına uygulanarak verilmiştir.



Şekil-1: Franz Mayr projeksiyonunda coğrafi pafta ağı (Çeyrek yarıküre için).

Aitow-Hammer projeksiyonu denklemleri,

$$f_1(\varphi, \lambda) = \frac{R\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}} - X = 0 \quad (20)$$

$$f_2(\varphi, \lambda) = \frac{2\sqrt{2}R \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}} - Y = 0$$

şeklinde verilmektedir /2/. Görüldüğü gibi bu projeksiyonda sayısallaştırılmış X,Y koordinatlarından φ, λ coğrafi koordinatları direkt olarak elde edilememektedir. Sayısallaştırılmış X,Y harita koordinatlarından coğrafi koordinatların elde edilebilmesi için,

$$L_{i+1} = L_i - J(L_i)^{-1} F(L_i)$$

$$F(L_i) = \begin{bmatrix} f_1(\varphi_i, \lambda_i) \\ f_2(\varphi_i, \lambda_i) \end{bmatrix}$$

$$J(L_i) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\right)_{\varphi_i} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_i} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\right)_{\varphi_i} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ E & F \end{bmatrix}$$

$$J(L_i)^{-1} = \frac{1}{BF - CE} \begin{bmatrix} F & -C \\ -E & B \end{bmatrix}$$

$p = 1 + \cos\varphi \cos(\lambda/2)$ ile gösterilmek üzere,

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = \frac{R}{\sqrt{2}} \frac{(1+p) \cos\varphi + \cos(\lambda/2)}{p^{3/2}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} = \frac{R\sqrt{2}}{4} \frac{\sin\varphi \cos\varphi \sin(\lambda/2)}{p^{3/2}}$$

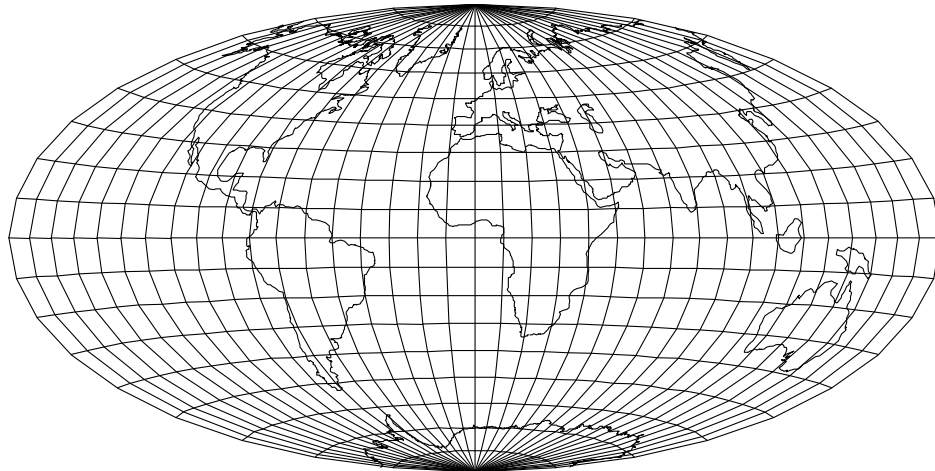
$$\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = -R\sqrt{2} \frac{(1+p) \sin\varphi \sin(\lambda/2)}{p^{3/2}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \frac{(1+p) \cos\varphi \cos(\lambda/2) + \cos^2\varphi}{p^{3/2}}$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - \frac{1}{BF - CE} \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda}\right)_{\varphi_i} f_1(\varphi_i, \lambda_i) - \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_i} f_2(\varphi_i, \lambda_i) \right]$$

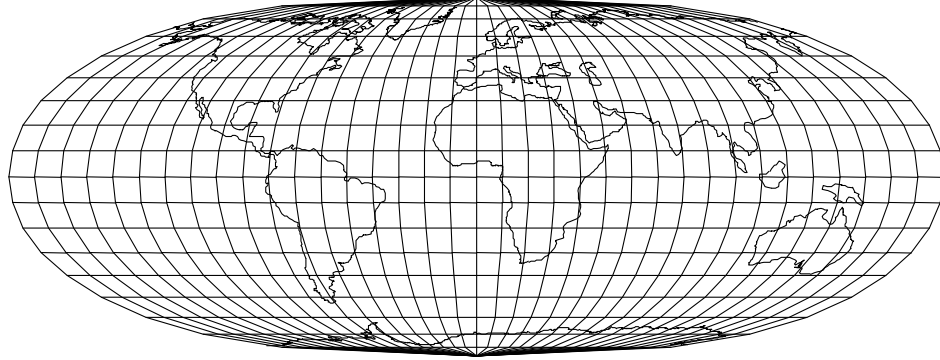
$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \frac{1}{BF - CE} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\right)_{\varphi_i} f_2(\varphi_i, \lambda_i) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\right)_{\lambda_i} f_1(\varphi_i, \lambda_i) \right] \quad (21)$$

iteratif denklemleri yazılır /10/, (Burada R küre yarıçapı ölçek modülü ile ilişkilendirilmiştir.). İterasyona $\varphi_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$ başlangıç değerleri ile başlandığında sonuç alınabilmektedir. İterasyonun çok daha hızlı yakınsaması için, iterasyona $\varphi_0 = \frac{\pi X}{2R}$, $\lambda_0 = \frac{\pi Y}{2R}$ başlangıç değerleri ile başlanması önerilir.

Aitow-Hammer'in Şekil-2'deki Dünya Haritasından sayısallaştırılan X,Y değerleri (21) denklemlerinde kullanılarak φ ve λ coğrafi koordinatları elde edilmiş ve bu coğrafi koordinatlar (19) denklemlerinde yerine konularak Franz Mayr'ın Şekil-3'deki dünya haritası çizilmiştir.



Şekil-2: Aitow-Hammer projeksiyonunda Dünya Haritası.



Şekil-3: Franz Mayr projeksiyonunda Dünya Haritası
(Aitow-Hammer projeksiyonundan elde edilmiştir.)

Mollweide projeksiyonu denklemleri,

$$\begin{aligned}
 X &= R\sqrt{2} \sin t \\
 Y &= \frac{2R\sqrt{2}}{\pi} \lambda \cos t \\
 2t + \sin 2t &= \pi \sin \varphi
 \end{aligned} \tag{22}$$

olarak verilmektedir /2,9/. Görüldüğü gibi bu projeksiyon için coğrafi koordinatları veren eşitlikler (22) den,

$$\begin{aligned}
 t &= \arcsin\left(\frac{X}{R\sqrt{2}}\right) \\
 \lambda &= \frac{\pi Y}{2R\sqrt{2} \cos t} \\
 \varphi &= \arcsin\left(\frac{2t + \sin 2t}{\pi}\right)
 \end{aligned} \tag{23}$$

şeklinde kolaylıkla yazılabilmektedir. Mollweide projeksiyonunda verilen dünya haritasından X,Y harita koordinatları sayısallaştırılarak elde edilir, (23) ifadelerinden φ , λ coğrafi koordinatları bulunur ve (19) denklemlerinden de Franz Mayr projeksiyon koordinatları hesaplanabilir. Buna rağmen Aitow-Hammer projeksiyonu için uygulanan yöntem genel bir algoritma olarak bu projeksiyon için de kullanılabilir. Buna göre (22) ifadeleri,

$$\begin{aligned}
 f_1(\varphi, \lambda, t) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R\lambda \cos t - Y = 0 \\
 f_2(\varphi, \lambda, t) &= \sqrt{2}R \sin t - X = 0 \\
 f_3(\varphi, \lambda, t) &= 2t + \sin 2t - \pi \sin \varphi = 0
 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerin Newton-Raphson iterasyon yöntemi ile çözülmesi için,

$$L_{i+1} = L_i - J(L_i)^{-1} F(L_i)$$

$$F(L_i) = \begin{bmatrix} f_1(\varphi_i, \lambda_i, t_i) \\ f_2(\varphi_i, \lambda_i, t_i) \\ f_3(\varphi_i, \lambda_i, t_i) \end{bmatrix}$$

$$J(L_i) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\right)_{\varphi_i} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_i} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{t_i} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\right)_{\varphi_i} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_i} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)_{t_i} \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial \varphi}\right)_{\varphi_i} & \left(\frac{\partial f_3}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_i} & \left(\frac{\partial f_3}{\partial t}\right)_{t_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R \cos t & -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} R \lambda \sin t \\ 0 & 0 & \sqrt{2} R \cos t \\ -\pi \cos \varphi & 0 & 4 \cos^2 t \end{bmatrix}$$

$$J(L_i)^{-1} = -\frac{1}{4R^2 \cos \varphi \cos^2 t} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{8\sqrt{2}}{\pi} R \cos^3 t & -\frac{4R^2}{\pi} \cos^2 t \\ -\sqrt{2}\pi R \cos \varphi \cos t & -2\sqrt{2}R \lambda \cos \varphi \sin t & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}R \cos \varphi \cos t & 0 \end{bmatrix}$$

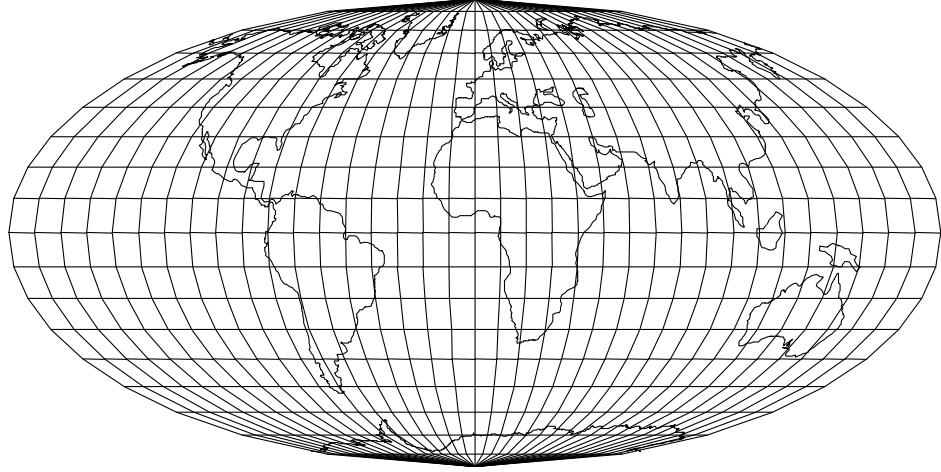
eşitlikleri elde edilebilir /8/.

Buradan,

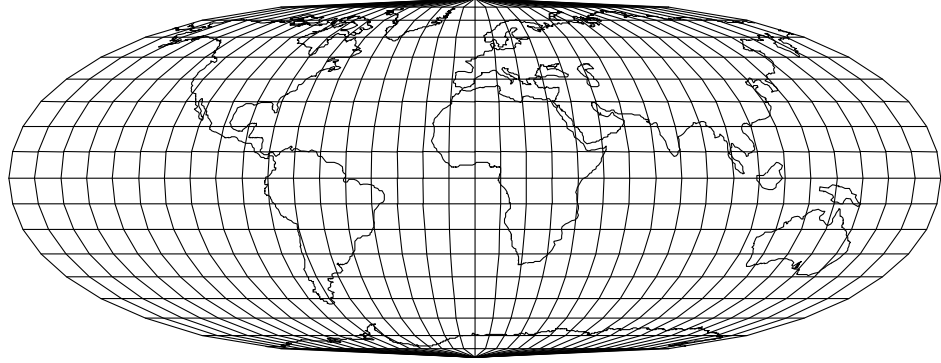
$$\begin{aligned} \varphi_{i+1} &= \varphi_i - \frac{1}{\pi R \cos \varphi_i} \left[2\sqrt{2} \cos t_i f_2(\varphi_i, \lambda_i, t_i) + R f_3(\varphi_i, \lambda_i, t_i) \right] \\ \lambda_{i+1} &= \lambda_i - \frac{1}{2\sqrt{2} R \cos t_i} \left[\pi_i f_1(\varphi_i, \lambda_i, t_i) + 2\lambda_i \tan t_i f_2(\varphi_i, \lambda_i, t_i) \right] \\ t_{i+1} &= t_i - \frac{f_2(\varphi_i, \lambda_i, t_i)}{\sqrt{2} R \cos t_i} \end{aligned} \quad (24)$$

iterasyon formülü bulunur.

Mollweide'nin Şekil-4'deki alan koruyan dünya haritasından sayısallaştırılan X,Y değerleri kullanılarak (24) denkleminde φ ve λ coğrafi koordinatları elde edilmiş ve bu coğrafi koordinatlar (19) denkleminde yerine konularak Franz Mayr'ın Şekil-5'deki Dünya Haritası çizilmiştir.



Şekil-4: Mollweide projeksiyonunda Dünya Haritası.



Şekil-5: Franz Mayr projeksiyonunda Dünya Haritası.
(Mollweide projeksiyonundan elde edilmiştir.)

5. SONUÇ

Kartografik projeksiyonlarda, uygulamada eliptik integral ile verilen projeksiyon denklemleri ile çok sık olmasa da karşılaşılabilmektedir. Fakat Mollweide projeksiyonunda olduğu gibi kapalı denklemlerle ifade edilen projeksiyon eşitlikleri veya bir projeksiyondan diğerine dönüşüm gibi problemlerle her zaman karşılaşmak mümkündür. Eliptik integral içeren projeksiyon eşitliklerinin Taylor veya Maclaurin formülleri ile seriye açılarak çözümü projeksiyon koordinatlarının yeterli doğrulukta elde edilmesini sağlamaktadır. Projeksiyon koordinatlarından coğrafi koordinatların hesaplanabilmesi için verilen iterasyon algoritması tüm kartografik projeksiyonlar için kullanılabilir, bilgisayarda programlamaya elverişli genel bir yöntemdir. Bu anlamda, bu çalışma Franz Mayr projeksiyonu örneğinde bu problemlerin çözümüne ışık tutacaktır.

Ayrıca konuya baz teşkil etmesi açısından tek başına ele alındığında, Franz Mayr projeksiyonu gerçek anlamda olmayan alan koruyan silindirik bir projeksiyon olarak kendi sınıfındaki diğer projeksiyonlar gözönüne alındığında bu türün bugüne kadar pek önemsenmemiş bir örneğidir. Tüm yerküreyi kapsayan haritalar için en fazla tercih edilen

Winkel, Wagner, Eckert IV, Hammer, Mollweide, Robinson ve McBryde-Thomas Projeksiyonları ile karşılaştırılarak deformasyonlar açısından irdelenmesi ayrı bir araştırma konusudur.

Franz Mayr projeksiyonu kıtaların birbirlerine göre rölatif büyüklüklerini ve -alan korumasına rağmen- şekillerini harita okuyucusuna en gerçek biçimde yansıtması bakımından “doğru görünüşlü” projeksiyonlar sınıfında daha ayrıntılı olarak ele alınmalıdır. Franz Mayr projeksiyonu ile yapılacak kartografik uygulamalarda Bölüm-3’de verilen (19) eşitlikleri kullanılmalıdır. $\varphi \leq 60^\circ$ bölgeleri için (16) denklemi kullanımı yeterlidir.

KAYNAKLAR

- /1/ Bryd,P.,F.; Friedman,D. : Handbook of Elliptic Integrals for Engineer and Physicist, Springer-Berlin, 1954
- /2/ Fiala, F. : Mathematische Kartographie, Veb Verlag Technik Berlin, 1957
- /3/ Franz, M. : Flaechentreue Plattkarten eine bisher vernachlaessigte Gruppe unechter Zylinderprojektionen, Internationales Jahrbuch für Kartographie, 1964
- /4/ Hoschek, J. : Mathematische Grundlagen der Kartographie 2. überarbeitete und erweiterte Auflage, Mannheim; Wien; Zürich:
- /5/ Hütte : Des Ingenieurs Taschenbuch 28.Auflage, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1955
- /6/ Koçak, E. : Harita Projeksiyonları, 2.Baskı, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Basım Birimi, 1999
- /7/ Legendre, A.,M. : Traite des Fonctions Elliptiques et des Integrales Eulerinnes, avec des Tables pour en Faciliter le calcul Numerique, Tome second, Paris, 1826
- /8/ Pipes, A.L.; Harvill, R.L. : Applied Mathematics for Engineers and Physicists, McGraw Hill Book Company, New York, 1970
- /9/ Snyder,J.P.;Voxland,P.M. : An Album of Map Projections, U.S.Geological Survey Professional Paper 1453, 1989
- /10/ Strubecker, K. : Einführung in die höhere Matematik, Band II, R. Oldenberg Verlag, München, Wien, 1967



Prof.Dr. Olcay ÖZTAN

1943 yılında İzmir’de doğdu. 1960 yılında İstanbul Pertevnihal Lisesini bitirdikten sonra 1966 yılında İ.T.Ü. İnşaat Fakültesinden mezun oldu. 1968 yılında İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Topoğrafya ve Jeodezi Kürsüsüne asistan olarak girdi. 1974 yılında Doktor ünvanını aldı. 1978-80 yılları arasında Almanya’da Kartografya alanında bilimsel çalışmalar yaptı ve doçentlik tezi ile ilgili araştırmalara devam etti. 1981 yılında Jeodezi dalında Doçent ünvanını aldı. 1988’de Profesör oldu. İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü Kartografya Anabilim Dalı Başkanlığı görevini sürdürürken 23 Aralık 1994 ‘de vefat etti.

Kısa yaşam süresi içerisinde mühendislik uygulamaları, eğitim, öğretim ve bilime katkılarının yanısıra 5 kitap, 11 bildiri, birçoğu yabancı dilde yayınlanan 16 makale sahibi bir bilim adamı; dürüst, aydın, sevecen kişiliğiyle de yeri doldurulamayacak saygın bir insan olarak belleklerde yaşatılmaktadır.