

FOTOGRAMETRİDE VE KARTOĞRAFYADA KULLANILAN PERSPEKTİF
İZDÜŞÜM DENKLEMLERİ ARASINDAKİ ANALİTİK BAĞINTILAR

Doç.Dr. Derya MAKTAV

ÖZET

Yeryüzeyi bir küre biçiminde düşünülerek yeryüzeyinin bir düzleme perspektif izdüşürülmesi için, izdüşüm denklemlerini- X' ve Y' dik düzlem koordinatlarının, coğrafi koordinatların (ϕ, λ) veya polar koordinatların (δ, α) fonksiyonları biçiminde ele alınması ile ifade etmek olasıdır.

Bu çalışmada, bu denklemlerden (fonksiyonlardan) yararlanılarak, önce stereografik ve gnomonik izdüşüm denklemleri çıkarılmış ve bu denklemler yardımı ile uydu görüntülerinin izdüşüm denklemleri, gene coğrafi ve polar koordinatların fonksiyonları olarak ifade edilmiştir.

ZUSAMMENFASSUNG

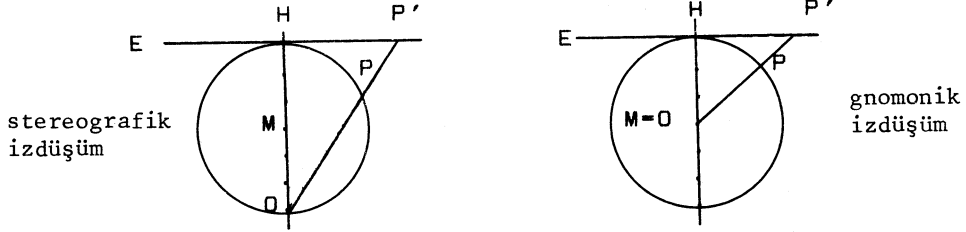
Mit der Annahme der Erdoberflaeche als Kugelflaeche und für die perspektive Abbildung dieser Kugelflaeche auf eine Ebene, ist es möglich, die Abbildungsgleichungen so zu definieren, indem man die rechtwinkligen ebenen Koordinaten X' und Y' als Funktionen der geographischen -oder polar Koordinaten bildet.

In dieser Arbeit wird mit Hilfe dieser Funktionen erst die stereographischen und gnomonischen Abbildungsgleichungen berechnet und mittels dieser Gleichungen die Abbildungsgleichungen der Satellitenaufnahmen wieder als Funktionen der geographischen und polar Koordinaten hergestellt.

1. KÜRENİN DÜZLEME PERSPEKTİF İZDÜŞÜMÜ VE BAZI KARTOĞRAFİK İZDÜŞÜMLER

Normal durumda, bir küre yüzeyinin bir düzleme perspektif izdüşürülmesinde, üzerinde perspektif izdüşüm merkezinin de bulunduğu izdüşüm ışınının (ana ışının) kürenin merkezinden geçtiği varsayılmaktadır. Resim düzlemi veya harita düzlemi de bu izdüşüm ışınına dik olan herhangi bir düzlem olmaktadır. Yeryüzeyinin bir küre olarak alınmasında, izdüşüm ışını ve yeryüzü eksenî arasında küre merkezinde bir açı mevcut ise, açının miktarına göre farklı perspektif izdüşüm şekilleri söz konusudur : izdüşüm ışını ile

yer eksenini arasındaki açı 0° ise, normal veya polar izdüşüm, izdüşüm ışını ekvator düzleminde ise transversal izdüşüm, izdüşüm eksenini yer eksenini ile yukarıdaki durumlardan farklı bir açı yapıyorsa eğik izdüşüm denir. Ayrıca izdüşüm merkezi olarak alınan nokta, yeryüzeyinde ise stereografik veya açı koruyan azimutal izdüşüm, kürenin merkezinde ise, dairelerin doğrular olarak izdüşürüldüğü gnomonik izdüşümdür (Şekil-1) /1/.



Şekil-1 : Stereografik ve gnomonik izdüşümlerin geometrik gösterimleri (D: izdüşüm merkezi, E: resim düzlemi, P/P': izdüşülen/izdüşüm noktası, H: ana nokta)

2. FOTOGRAMETRİDE GENEL PERSPEKTİF İZDÜŞÜM

Günümüzde uçaklardan yani belirli bir uçuş yüksekliğinden elde edilen fotoğraflar yanında, yüzlerce km. uzaklıktan elde edilen uydu fotoğrafları da, öncelikle bilgisayarların ortaya çıkması ile, büyük önem kazanmakta ve bunlar coğrafya, ziraat, meteoroloji, okyanus bilimi gibi bilim dallarında geniş uygulama alanları bulabilmektedirler. Bu tür fotoğraflarda uçuş yüksekliği çok fazla olduğundan (örn. LANDSAT V: 705 km, SPOT: 805 km) çok geniş bölgeler, hatta dünyanın tamamı görüntülenebilmektedir. Uçuş yüksekliğinin çok fazla olduğu bu fotoğraflarda, izdüşüm ışınının küre merkezinden geçmeyip, küreyi herhangi bir noktada deldiği perspektif izdüşüm denklemlerinin kullanılması daha uygundur /1/,/2/.

3. PERSPEKTİF İZDÜŞÜM DENKLEMLERİNDE PARAMETRELERİN SEÇİMİ

Coğrafi koordinatların fonksiyonu olarak verilen bir küre yüzeyinin bilinen parametrik denklemlerinden yararlanılarak, bu yüzeyin bir düzleme perspektif izdüşümünün genel ifadesi matematiksel olarak (1) denklemleri ile verilir. Bu tür denklemler genellikle normal durum için uygundur.

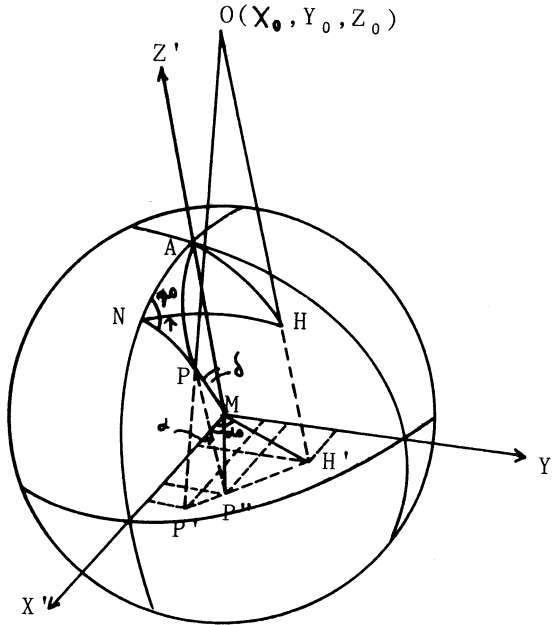
$$\begin{aligned} X' &= f(\phi, \lambda) \\ Y' &= f(\phi, \lambda) \end{aligned} \quad (1)$$

Eğik veya transversal izdüşümlerde ise, önce küresel bir polar koordinat sistemi alınır (δ ve α). Bu sistemde koordinat başlangıç noktası küre üzerinde herhangi bir noktadır. Bu noktadan geçen yatay ve düşey daireler parametrik eğrileri oluştururlar. Böylece bir küre yüzeyinin parametrik denklemleri, polar koordinatların fonksiyonu olarak yazılabilir. Bu denklemlere göre küre yüzeyinin izdüşüm denklemleri için de genel olarak

$$\begin{aligned} X' &= F(\delta, \alpha) \\ Y' &= F(\delta, \alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

yazılabilir.

Amaç, bu denklemlere göre küre yüzeyinin genel perspektif izdüşümünü çıkarmak olduğuna göre, önce gerekli noktaların coğrafi ve polar koordinatlarının gösterildiği Şekil-2'den, aşağıdaki bağıntıları çıkarmak gerekir.



- X'/Y' : resim düzlemi
- O : izdüşüm merkezi
- H/H' : ana ışığın küreyi/resim düzlemini kestiği nokta
- P : küre üzerinde bir nokta
- P' : OP ışınının resim düzlemini kestiği

Şekil-2 : Küre yüzeyinin izdüşüm bağıntılarının geometrik gösterilimi.

Şekil-2'ye göre, OP'H' üçgeninden, resim düzlemindeki üçgen bağıntılarından ve $T = (Z_o - Z)$ yazarak

$$X' = (Z_o X - X_o Z) / T \quad (3)$$

$$Y' = (Z_o Y - Z Y_o) / T$$

bulunur. Ayrıca polar koordinatlar ile

$$X' = \frac{Z_o r \sin\delta \cos\alpha - r \cos\delta X_o}{Z_o - r \cos\delta} \quad (4)$$

$$Y' = \frac{Z_o r \sin\delta \sin\alpha - r \cos\delta Y_o}{Z_o - r \cos\delta}$$

hesaplanır ve $H(\delta_o, \alpha_o)$ alınarak

$$X' = \frac{-r^2 \cos\delta \sin\delta_o \cos\alpha_o + Z_o r \sin\delta \cos\alpha}{Z_o - r \cos\delta} \quad (5)$$

$$Y' = \frac{-r^2 \cos\delta \sin\delta_o \sin\alpha_o + Z_o r \sin\delta \sin\alpha}{Z_o - r \cos\delta}$$

yazılır. (5) denklemleri, izdüşüm denklemlerinin azimutal koordinatlarla ifadesidir.

Ayrıca, P,H ve A noktaları sırası ile (ϕ, λ) , (ϕ_o, λ_o) ve (ϕ_a, λ) ile gösterilirse, NAP ve NAH üçgenlerindeki bağıntılardan elde edilen coğrafi koordinatları içeren trigonometrik denklemler (5) denkleminde yerlerine konarak, (1) denklemleri

$$X' = \frac{Z_o r m - r^2 n l}{Z_o - r n} \quad (6)$$

$$Y' = \frac{Z_o r \cos\phi \sin\lambda - r^2 n \cos\phi_o \sin\lambda_o}{Z_o - r n}$$

$$m = -\cos\phi \sin\phi_a \cos\lambda + \sin\phi \cos\phi_a$$

$$n = \cos\phi \cos\phi_a \cos\lambda + \sin\phi \sin\phi_a$$

$$l = -\cos\phi_o \sin\phi_a \cos\lambda_o + \sin\phi_o \cos\phi_a$$

biçiminde bulunur. Burada görüldüğü gibi, bu denklemlerin çözümü için Z_o ile

A ve H'nin coğrafi koordinatlarının bilinmesi gereklidir.

4. GENEL PERSPEKTİF İZDÜŞÜM VE KARTOĞRAFİK DENKLEMLER ARASINDAKİ BAĞINTI

Bölüm 3 deki izdüşüm denklemlerinden Bölüm 1 de sözü edilen kartoğrafik izdüşüm denklemlerine analitik olarak geçebilmek için gene Bölüm 1 de sözü edilen ana ışın ile ilgili koşullar gözönüne alındığında $A = H$ olacağından

$$X' = \frac{Z_0 r (\sin\phi \cos\phi_a - \cos\phi \sin\phi_a \cos\lambda)}{Z_0 - r (\sin\phi \sin\phi_a + \cos\phi \cos\phi_a \cos\lambda)} \quad (7)$$

$$Y' = \frac{Z_0 r \cos\phi \sin\lambda}{Z_0 - r (\sin\phi \sin\phi_a + \cos\phi \cos\phi_a \cos\lambda)}$$

bulunur. Kartoğrafik izdüşüm düzleminin, kürenin alt kısmında bulunduğu varsayılır (izdüşüm ölçeği, izdüşüm düzleminin konumuna göre değişir) ve $OM=d$ alınır ve bu durum, (7) denklemi $(d+r)/d$ ile çarpılarak ifade edilirse

$$X' = \frac{r (d+r) (\sin\phi \cos\phi_a - \cos\phi \sin\phi_a \cos\lambda)}{d - r (\sin\phi \sin\phi_a + \cos\phi \cos\phi_a \cos\lambda)} \quad (8)$$

$$Y' = \frac{(d+r) r \cos\phi \sin\lambda}{d - r (\sin\phi \sin\phi_a + \cos\phi \cos\phi_a \cos\lambda)}$$

bulunur /1/. (8) denklemlerinde, izdüşüm merkezi, küre yüzeyi üzerinde, yani $d=r$ alındığında, perspektif izdüşümlerden, jeodezik amaçlar için en önemli olan coğrafi koordinatlardan resim koordinatlarının hesaplandığı stereografik izdüşüm denklemleri (9) bulunur:

$$X' = \frac{2r (\sin\phi \cos\phi_a - \cos\phi \sin\phi_a \cos\lambda)}{1 - (\sin\phi \sin\phi_a + \cos\phi \cos\phi_a \cos\lambda)} \quad (9)$$

$$Y' = \frac{2r \cos\phi \sin\lambda}{1 - (\sin\phi \sin\phi_a + \cos\phi \cos\phi_a \cos\lambda)}$$

Diğer taraftan $d=0$ alınarak,

$$X' = \frac{-r (\sin\phi \cos\phi_a - \cos\phi \sin\phi_a \cos\lambda)}{\sin\phi \sin\phi_a + \cos\phi \cos\phi_a \cos\lambda} \quad (10)$$

$$Y' = \frac{-r \cos\phi \sin\lambda}{\sin\phi \sin\phi_a + \cos\phi \cos\phi_a \cos\lambda}$$

biçimindeki, tüm küre paralellerinin izdüşüm düzlemine birer doğru olarak

izdüşürüldüğü gnomonik izdüşüm denklemleri elde edilir.

Ayrıca (8) denklemlerinde pay ve payda d ile bölünüp $d = \infty$ alınırsa

$$X' = (r \sin\phi \cos\phi_0 - \cos\phi \sin\phi_0 \cos\lambda) \quad (11)$$

$$Y' = r \cos\phi \sin\lambda$$

biçimindeki, izdüşüm ışınları, ana ışına paralel olan küre yüzeyinin izdüşüm düzlemine ortografik izdüşüm denklemleri bulunur.

5. GENEL PERSPEKTİF İZDÜŞÜMDE DEFORMASYONLAR

Uzunluk Deformasyonu

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = rID', \quad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} \cos\phi \cos\lambda \\ \cos\phi \sin\lambda \\ \sin\phi \end{vmatrix} \quad (12a)$$

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = rID'', \quad D'' = \begin{vmatrix} \sin & \cos \\ \sin & \sin \\ \cos \end{vmatrix} \quad (12b)$$

şeklinde verilen küre denklemlerinden yararlanarak, küre ve bunun izdüşüm düzlemi üzerindeki yay elemanlarının kareleri arasındaki oran ds'/ds uzunluk deformasyonu olmak üzere

$$k^2 = \frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{dX'^2 + dY'^2}{dX^2 + dY^2 + dZ^2} \quad (13)$$

şeklinde yazılır. Daha sonra birleşik fonksiyonların tam diferansiyelleri hesaplanarak ve zincir kuralı uygulanarak /3/

$$k^2 = \frac{E'd\delta^2 + 2F'd\delta d\alpha + G'd\alpha^2}{E d\delta^2 + 2F d\delta d\alpha + G d\alpha^2} \quad (14)$$

bulunur. Birleşik fonksiyonların kısmi türevleri tek tek hesaplandığında

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \sin^2\delta$$

bulunur. Aynı işlemlerle E' , F' ve G' de hesaplanır ve bunlar da polar koordinatlar cinsinden bulunur /1/.

Diğer taraftan (13) denkleminde

$$k^2 = k_\alpha^2 \cos^2 w + \frac{Z_0^2 r \sin \delta \sin \delta_0 \sin (\alpha_0 - \alpha) \sin 2w}{(Z_0 - r \cos \delta)^3} + k_\delta^2 \sin^2 w \quad (15)$$

bulunur, burada

$k_\delta = (E'/E)^{1/2}$ ve $k_\alpha = (G'/G)^{1/2}$, parametre eğrileri doğrultularındaki uzunluk deformasyonlarıdır. (15) denklemleri genel olarak kürenin bir düzleme genel perspektif izdüşümünde herhangi bir $P(\delta, \alpha)$ noktası ve bir w doğrultusu için uzunluk deformasyonunu vermektedir.

Maksimum uzunluk deformasyonu ise birbirinden 100^{B} farklı iki doğrultudadır ve bu doğrultulara ana deformasyon doğrultuları denir (16).

$$k_1^2 = \frac{1}{\cos 2w_0} (k_\delta^2 \cos^2 w_0 - k_\alpha^2 \sin^2 w_0) \quad (16)$$

$$k_2^2 = \frac{1}{\cos 2w_0} (k_\alpha^2 \cos^2 w_0 - k_\delta^2 \sin^2 w_0)$$

Alan Deformasyonu

$$\frac{dF'}{dF} = \frac{(E'G' - F'^2)^{1/2}}{(EG)^{1/2}} \quad (17)$$

Maksimum Açık Deformasyonu

$$\sin \beta = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad (18)$$

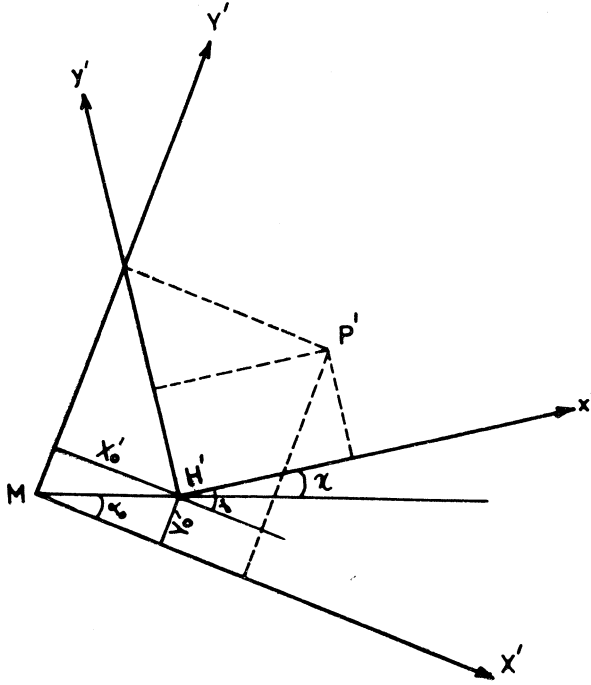
6. PERSPEKTİF İZDÜŞÜM DENKLEMLERİNİN FOTOGRAMETRİK DURUMU

Fotogrametride izdüşüm merkezinden, resim düzlemine olan uzaklık f ile gösterilir ve x' , y' resim koordinat sistemi ana nokta bulucuları ile ifade edilir.

Şekil-3'de resim düzlemi (x_0, y_0) kadar ötelenmiş ve α_0 kadar dönmüştür. İki sistem arasında yapılacak bir dönüşümün matrislerle ifadesi

$$\begin{vmatrix} X' \\ Y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} \quad (19)$$

biçimindedir.



- H : Ana nokta
 x', y' : Fotogrametrik resim düzlemi
 X', Y' : İzdüşüm düzlemi
 MH' : Resim çekim doğr.izdüşümü
 α_0 : Resim çekim doğr.izdüşümün resim düzlemindeki yöneltmesi
 κ : Resim çekim doğr.göre kameranın dönüklüğü

Şekil-3 : Kartografik ve fotogrametrik sistemler arasındaki dönüşüm

(3) denklemlerinden X', Y' hesaplanıp (19) da yerine konarak ve $\gamma = \alpha_0 + \kappa$ alınarak x' ve y' resim koordinatları hesaplanır (20). Bu denklemler, uydulardan elde edilen görüntülerde kullanılan izdüşüm denklemlerinin genel ifadesidir.

$$\begin{aligned} x' &= f \frac{(X - X_0) \cos \gamma + (Y - Y_0) \sin \gamma}{Z_0 - Z} \\ y' &= f \frac{(Y - Y_0) \cos \gamma + (X - X_0) \sin \gamma}{Z_0 - Z} \end{aligned} \quad (20)$$

Bunun dışında, bu formülleri, polar ve coğrafi koordinatlar cinsinden de yazmak mümkündür/4/,/5/.

7. SONUÇ

(20) denklemleri veya bunların coğrafi veya polar koordinatlar ile ifadesi, kartografik izdüşüm denklemleri ile fotogrametrik izdüşüm denklemleri arasındaki analitik bağıntıyı teorik olarak ortaya koymaktadır, ancak uygulamada bu dönüşümlerin hesabında hataların da gözönüne alınması gereklidir.

KAYNAKLAR

- /1/ JEK : Handbuch der Vermessungskunde, Band IV, Stuttgart 1959
- /2/ KONECNY, G. , LEHMANN, G.: Photogrammetrie, 4.Auflage, Walter de Gruyter Co., Berlin 1984
- /3/ HOSCHEK, J. : Mathematische Grundlagen der Kartographie, 2. Auflage, Hain-Druck GmbH Verlag, 1984 Zürich.
- /4/ MERKEL, H. : Grundzüge der Kartenprojektionslehre, Teil II, Abbildungsverfahren, Verlag der Bay.Ak.der Wiss. in Komm. bei der C.H.Beck, München 1958
- /5/ BAEHR, P. : Analyse der Geometrie auf Photodetektoren abgetasteter Aufnahmen von Erderkundungssatelliten, Dissertation, Nr. 71, Hannover 1976