Elipsoid irtisamlarında konform oluş şart Formülünün kuruluşu

Yazan :
Yüks. Müh.
Sami Aykaç

İrtisam Original üzerindeki bütün noktaların irtisam sathı veya müstevisi üzerine nakli demektir.

Original üzerinde koordineleri malûm olan bir (A) noktasının irtisam müstevisindeki mürtesemi (A') olsun. A' noktasının (x, y) koordinelerini hesaplamak için lâzım olan formülleri istihraç edilirse, hesabî olarak Originale ait bütün noktalar irtisam müstevisine nakledilmiş olur.

(A) noktasının (φ, l) koordineleri malûmken (A') noktasının (x, y) koordinelerini arayalım.

Meselenin riyazi olarak halli mümkün ise formüller :

$$x = f_1 (\varphi, l)$$

$$y = f_2 (\varphi, l)$$

şeklinde olacaktır.

Original sathı olarak arz elipsoidini ve irtisam müstevisi olarak arza her hangi bir şekilde mumas bir müsteviyi kabul edelim.

Elipsoidin bir müstevi üzerine hatasız olarak irtisamı mümkün değildir ve böyle bir irtisamda meydana gelen hatalar iki çeşittir.

1 — Satıh değişiklikleri

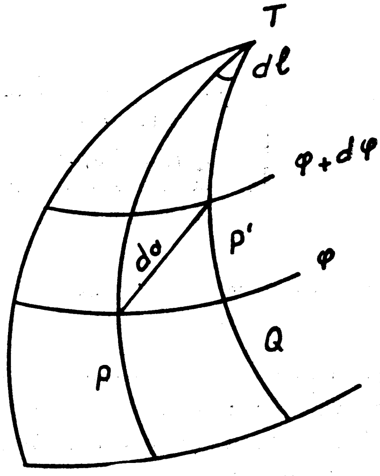
2 — Açı değişiklikleri

bu hataların her hangi birinden fedakârlık etmemiz lâzımdır.

Biz açı değişikliklerinin olmamasını temine çalışalım. Yani irtisam müstevisi üzerinde ölçülen her hangi bir açı arz elipsoidi üzerinde ölçülen açının aynı olsun. Böyle irtisamlara (Konform) irtisam usulleri denilir.

Konform irtisam usulü ile yapılmış haritalarda açı değişiklikleri yoktur yani haritada gösterilen istikametler tabiata uyar.

Bu yazımızda irtisamın konform olabilmesi için ne gibi şartların tahakkuk etmesi lâzım geldiğini tesbit edeceğiz.



Yandaki şekilde PT ve QT birbirine yakın Tûl daireleri (φ), ve ($\varphi + d\varphi$) Arz daireleri.

P ve P' tabiatte alınan iki nokta olsun.

P Q = Arz dairesi üzerinde bir kavis,

P' Q = Tûl dairesi üzerinde bir kavis.

$d\sigma = \overline{PP'}$ arz elipsoidi üzerinde P ve P' noktalarını birleştiren hat olsun noktalar bir birine çok yakın olduklarından :

$$d\overline{\sigma}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QP'}^2$$

Tûl ve Arz dairesi üzerinde alınan küçük kavislerin Elipsoid formülleri :

$$PQ = N \cos \varphi \, \Delta l$$

$$P'Q = M \, d\varphi \quad \text{dır.}$$

Bu formüllerde N ve M Arzın fonksiyonları olup her arz için hesaplanmaları mümkündür.

P Q ve P' Q değerlerini d σ formülünde gösterelim.

$$d\sigma^2 = N^2 \cos^2 \varphi \, d\overline{l}^2 + M^2 \, d\varphi^2$$

Arz Elipsoidi üzerinde alınan d σ hattının mürtesemi d s olsun.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{dır.}$$

Büyültme faktörünü (m) ile gösterelim.

$$m = \frac{d\,s}{d\,\sigma}$$ büyültme faktörünün tarif formülüdür.

buradan :

$$m^2 = \frac{d\,s^2}{d\,\sigma^2} = \frac{d\,x^2 + d\,y^2}{N^2 \cos^2 \varphi \; d\,l^2 + M^2\, d\,\varphi^2}$$

$$m^2 = \frac{d\,x^2 + d\,y^2}{N^2 \cos^2 \varphi \left(\dfrac{M^2\, d\,\varphi^2}{N^2 \cos^2 \varphi} + d\,l^2 \right)}$$

$$\frac{M}{N \cos \varphi}\, d\,\varphi = d\,q$$ olsun.

$$m^2 = \frac{d\,x^2 + d\,y^2}{N^2 \cos^2 \varphi \; (d\,q^2 + d\,l^2)}$$ olur.

Yukarıdaki formülde gösterilen (q) ya **İzometrik arz** denilir. $d\,\varphi$ yerine $d\,q$ yu kullanmakla lüzumlu formüllerin istihracında bir çok kolaylık mevcuttur. Bunun için (φ) malûm iken (q) yu hesaplamak lâzımdır.

φ malûm iken (q) nun halli :

$$d\,q = \frac{M}{N \cos \varphi}\, d\,\varphi$$

$$M = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)\;3/2}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)\;1/2}$$

M ve N yalnız (φ) nun fonksiyonu olduklarından :

$$q = f\,(\varphi)$$ dır.

$$d\,q = \frac{\dfrac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)\;3/2}}{\dfrac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin \varphi^2)\;1/2}}\, d\,\varphi = \frac{(1 - e^2)\, d\,\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi}$$

$$d\,q = \frac{[1 - e^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)]}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) . \cos \varphi}\, d\,\varphi = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)\, d\,\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi}$$

$$\frac{e^2 \cos^2 \varphi \; d\,\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi}$$

$$d\,q = \frac{d\,\varphi}{\cos \varphi} - \frac{e^2\, d\,\varphi \,\cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}$$

$$q = \int_0^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{\cos \varphi} - \int_0^{\varphi} \frac{e^2\, d\,\varphi\, \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}$$

bu iki integralı teker teker halledilir.

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{\cos \varphi} = \int_0^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{\sin 2 (45 + \varphi/2)} = \int_0^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{2 \sin (45 + \varphi/2) \cos (45 + \varphi/2)}$$

$$= \int_0^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{2\, \mathrm{tg}\,(45 + \varphi/2).\ \cos^2 (45 + \varphi/2)} = \log\,\mathrm{tg}\,(45^0 + \varphi/2)$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{\cos \varphi} = \underline{\underline{\log\,\mathrm{tg}\,(45^0 + \varphi/2)}}$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{e^2 \cos \varphi \; d\,\varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$X = \sin \varphi$$

$$d\,x = \cos \varphi ,\ d\,\varphi .$$

$$\int_0^{x} \frac{e^2\, d\,x}{1 - e^2 x^2}$$

$$\frac{e^2\, d\,x}{1 - e^2 x^2} = \frac{A\, d\,x}{(1 + e\,x)} + \frac{B\, d\,x}{(1 - e\,x)}$$

$$e^2 = A\,(1 - e\,x) + B\,(1 - e\,x)$$

$$e^2 = A - A\,e\,x + B + B\,e\,x$$

$$e^2 = A + B + X\,e\,(B - A)$$

her iki tarafın mukayesesinden.

$$A + B = e^2$$

$$A - B = 0$$

$$A = B = e^2/2 \qquad \text{olur.}$$

$$\frac{e^2\,dx}{1 - e^2 x^2} = \frac{1/2\, e^2\, dx}{1 + e x} + \frac{1/2\, e^2\, dx}{1 - e x}$$

$$\int_0^x \frac{e^2\,dx}{1 - e^2 x^2} = \int_0^x \frac{1/2\, e^2\, dx}{1 + e x} + \int_0^x \frac{1/2\, e^2\, dx}{1 - e x}$$

$$\int_0^x \frac{e^2\,dx}{1 - e^2 x^2} = -\, e/2 \log (1 - e x) + e/2 \log (1 + e x)$$

$$= e/2 \log \frac{1 + e x}{1 - e x} = \log \left(\frac{1 + e x}{(1 - e x)} \right)^{e/2}$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{e^2 \cos \varphi \, d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} = \log \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{e/2}$$

$$q = \log \operatorname{tg} (45^0 + \varphi/2) - \log \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{e/2}$$

$$q = \log \operatorname{tg} (45^0 + \varphi/2) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2}$$

bu formüle göre verilen her (φ) için (q) değeri hesaplanabilir. φ yerine q verilmiş olarak kabul edelim.

A (q, l) Arz üzerinde koordineleri malûm nokta ve A' (x, y) noktası (A) noktasının konform mürtesemi olsun.

$x = f_1 (q, l)$ ve $y = f_2 (q, l)$ olduğundan umumî türev kaidelerine göre

$$dx = \frac{dx}{dq}\, dq + \frac{dx}{dl}\,.\, dl$$

$$dy = \frac{dy}{dq}\, dq + \frac{dy}{dl}\,.\, dl. \qquad \text{dır.}$$

bu müsavatları $(d s^2)$ formülünde yerine yazalım.

$$d s^2 = \left(\frac{dx}{dq} \right)^2 dq^2 + \left(\frac{dx}{dl} \right)^2 dl^2 + 2 \frac{dx}{dq} \frac{dx}{dl}\, dq.\, dl$$

$$+\left(\frac{d\,y}{d\,q}\right)^2 d\,q^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,l}\right)^2 d\,l^2 + 2\,\frac{d\,y}{d\,q}\,\frac{d\,y}{d\,l}\,.\,d\,q\,d\,l.$$

$$d\,s^2 = \left[\left(\frac{d\,x}{d\,q}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,q}\right)^2\right] d\,q^2 + \left[\left(\frac{d\,x}{d\,l}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,l}\right)^2\right] d\,l^2$$

$$+\,2\left[\frac{d\,x}{d\,q}\,.\,\frac{d\,x}{d\,l} + \frac{d\,y}{d\,q}\,.\,\frac{d\,y}{d\,l}\right] d\,q.\,d\,l.$$

$$\left.\begin{aligned} E &= \left(\frac{d\,x}{d\,q}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,q}\right)^2 \\ F &= \frac{d\,x}{d\,q}\,.\,\frac{d\,x}{d\,l} + \frac{d\,y}{d\,q}\,.\,\frac{d\,y}{d\,l} \\ G &= \left(\frac{d\,x}{d\,l}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,l}\right)^2 \end{aligned}\right\} \text{ ile gösterelim.}$$

$$d\,s^2 = E\ d\,q^2 + 2\,F\,d\,q\,d\,l + G\,d\,l^2 \qquad \text{olur.}$$

Buradaki E, F, G ye Gaussun birinci dereceden esas kıymetleri denilir.

$$m^2 = \frac{d\,s^2}{d\,\sigma^2} = \frac{E\,d\,q^2 + 2\,F\,d\,q.\,d\,l + G.\,d\,l^2}{N^2\cos^2\varphi\,(d\,q^2 + d\,l^2)}$$

Şekilden :

$$\operatorname{tg}(90 - \alpha) = \frac{Q\,P'}{P\,Q} = \frac{M\,d\,\varphi}{N\cos\varphi\,d\,l}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{N\cos\varphi\,d\,l}{M\,d\,\varphi} \qquad \text{olur.}$$

$$d\,q = \frac{M}{N\cos\varphi}\,d\,\varphi \qquad \text{idi}$$

$$\frac{N\cos\varphi}{M.\,d\,\varphi} = \frac{1}{d\,q} \qquad \text{olur.}$$

bu değer tg α formülünde yerine konursa.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\,l}{d\,q} \qquad \text{olur.}$$

$d\,l = d\,q \; tg\,\alpha$. bu değer (m^2) formülünde yerine konursa :

$$m^2 = \frac{E\,d\,q^2 + 2\,F\,d\,q^2\,tg\,\alpha + G\,d\,q^2\,tg^2\,\alpha}{N^2\cos^2\varphi\,(d\,q^2 + d\,q^2\,tg^2\,\alpha)}$$

$$m^2 = \frac{E + 2\,F\,tg\,\alpha + G\,.\,lg^2\,\alpha}{N^2\cos^2\varphi\,(1 + lg^2\,\alpha)}$$

$1 + tg^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ olduğundan.

$$m^2 = \frac{E\cos^2\alpha + 2\,F\sin\alpha\cos\alpha + G\sin^2\alpha}{N^2\cos^2\varphi}$$

bulunur.

Konform irtisamın tarifi mucibince şekillerin müşabih olması yani büyültme faktörünün her istikamette aynı olması lâzımdır. Bunun temini için (m) büyültme faktörü formülünün semtte tabi olmaması lâzımdır.

$$m^2 = \frac{E\cos^2\alpha + 2\,F\sin\alpha\cos\alpha + G\sin^2\alpha}{N^2\cos^2\varphi}$$

formülünün semte tabi olmaması için yegâne çare.

$\underline{F = 0}$ $\underline{E = G}$ Şeklidir.

$$m^2 = \frac{E\cos^2\alpha + G\sin^2\alpha}{N^2\cos^2\varphi} \quad \frac{E}{N^2\cos^2\varphi}\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

$m^2 = \dfrac{E}{N^2\cos^2\varphi} = \dfrac{G}{N^2\cos^2\varphi}$ semte tabi değildir. Şu halde konform bir irtisam elde edebilmek için :

$$x = f_1\,(q, l)$$
$$y = f_2\,(q, l)$$

fonksiyonları o şekilde intihap edilmelidirki $F = 0$, $E = G$ olsun. Yani

$$F = \frac{d\,x}{d\,q} \cdot \frac{d\,x}{d\,l} + \frac{d\,y}{d\,q} \cdot \frac{d\,y}{d\,l} = 0$$

$$\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 = E = G = \left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2$$

$$\frac{dx}{dq} \cdot \frac{dx}{dl} + \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dy}{dl} = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 \qquad (2)$$

$F = 0$ ve $E = G$ şartından meydana gelen bu iki tefazulu muadelesini tetkik edelim.

(1) No. lu muadeleden :

$$\frac{dy}{dl} = - \frac{\dfrac{dx}{dq} \cdot \dfrac{dx}{dl}}{\dfrac{dy}{dq}}$$ elde edilir.

bu musavatı (2) No. lu muadeleye tatbik edelim.

$$\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \frac{\left(\dfrac{dx}{dq}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{dx}{dl}\right)^2}{\left(\dfrac{dy}{dq}\right)^2}$$

$$\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 = \frac{\left(\dfrac{dx}{dl}\right)^2}{\left(\dfrac{dy}{dq}\right)^2} \left[\left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dq}\right)^2 \right]$$

yukarıdaki müsavatın tahakkuk edebilmesi için :

ya $$\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 = 0$$

veya $$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dq}\right)^2$$

olması lâzımdır.

İkinci muadelenin halli daha kolay olduğundan bu yoldan yürüyelim.

$$\left(\frac{d\,x}{d\,l}\right)^2 = \left(\frac{d\,y}{d\,q}\right)^2$$

$$\frac{d\,x}{d\,l} = \pm \frac{d\,y}{d\,q}$$

çift işaretlerden (+) olanı kabul edelim.

$$\frac{d\,x}{d\,l} = + \frac{d\,y}{d\,q}$$

bu müsavatını (1) No. lu muadeleye tatbik edelim.

$$\frac{d\,x}{d\,q} \cdot \frac{d\,y}{d\,q} = - \frac{d\,y}{d\,q} \cdot \frac{d\,y}{d\,l}$$

buradan.

$$\frac{d\,x}{d\,q} = - \frac{d\,y}{d\,l}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,x}{d\,l} &= \frac{d\,y}{d\,q} \\ \frac{d\,x}{d\,q} &= - \frac{d\,y}{d\,l} \end{aligned}\right\} \quad \text{Tefazulu muadele sistemini buluruz.}$$

$$\frac{d\,x}{d\,l} = \pm \frac{d\,y}{d\,q} \quad \text{muadelesinde (—) işareti kabul edelim.}$$

$$\frac{d\,x}{d\,l} = - \frac{d\,y}{d\,q}$$

$$- \frac{d\,x}{d\,q} \cdot \frac{d\,y}{d\,q} = - \frac{d\,y}{d\,q} \cdot \frac{d\,y}{d\,l}$$

$$\frac{d\,x}{d\,q} = + \frac{d\,y}{d\,l} \quad \text{bulunur.}$$

$$\text{Ve.} \quad \left.\begin{aligned} \frac{d\,x}{d\,l} &= - \frac{d\,y}{d\,q} \\ \frac{d\,x}{d\,q} &= + \frac{d\,y}{d\,l} \end{aligned}\right\} \quad \text{tefazulu muadele sistemi bulunur.}$$

İrtisanın konform olabilmesi için

$$x = f_1 (q, l)$$
$$y = f_2 (q, l)$$

fonksiyonlarının yukarıdaki iki çift tefazulu muadele sistemini tahkik etmesi lâzım ve kâfidir

Adı geçen bu iki çift tevazulu muadele sistemine (Cauchi Riemann) tefazulu muadeleleri denilir.

Şu halde.

İrtisamın konform olabilmesi için irtisam fonksiyonlarının Cauchi-Riemann tefazulu muadelelerini tahkik etmesi lazım ve kâfidir.

$$\left.\begin{array}{l} W = f_1 (q, l) \\ Z = f (\omega) \end{array}\right\} \text{ olsun.}$$

$$\left.\begin{array}{l} W = q + i\,l \\ Z = + i\,y \end{array}\right\} \text{ olarak kabul edelim ve Cauchi - Risman}$$

muadelelerini tahkik edip etmediğini tetkik edelim.

Umumî olarak.

$$Z = f (w)$$
$$w = f (q, l) \quad \text{ise}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\,z}{d\,q} = \dfrac{d\,z}{d\,w} \quad \dfrac{d\,w}{d\,q} \\ \dfrac{d\,z}{d\,l} = \dfrac{d\,z}{d\,w} \cdot \dfrac{d\,w}{d\,l} \end{array}\right\} \text{ olur}$$

$$w = q + il$$

$$\frac{d\,w}{d\,q} = 1 \qquad \frac{d\,w}{d\,l} = i \quad \text{olduğundan}$$

$$\frac{d\,z}{d\,q} = \frac{d\,z}{d\,w}$$

$$\frac{d\,z}{d\,l} = i\,\frac{d\,z}{d\,w} \quad \text{olur}$$

Şu halde.

$$\frac{dz}{dl} = i\,\frac{dz}{dq}$$ elde edilir

bu musavatı $Z = x + iy$ formülüne tatbik edelim

$$\frac{dz}{dl} = \frac{dx}{dl} + i\,\frac{dy}{dl}$$

$$\frac{dz}{dq} = \frac{dx}{dq} + i\,\frac{dy}{dq}$$

$$i\,\frac{dz}{dq} = i\,\frac{dx}{dq} - \frac{dy}{dq}$$

$$\frac{dz}{dl} = \frac{dx}{dl} + i\,\frac{dy}{dl} = +\,i\,\frac{dz}{dq} = i\,\frac{dx}{dq} - \frac{dy}{dq}$$

buradan

$$\frac{dx}{dl} + i\,\frac{dy}{dl} = i\,\frac{dx}{dq} - \frac{dy}{dq}$$ bulunur

bu musavatın reel ve imaginer kısımlarını ayıralım.

$$\frac{dx}{dl} = -\,\frac{dy}{dq}$$

$$\frac{dx}{dq} = +\,\frac{dy}{dl}$$

bu formüller Cauchi — Rıeman Deffrential muadeleleridir.

$$\left.\begin{aligned} W &= q - il \\ Z &= x + iy \end{aligned}\right\}$$ olsun.

$$\frac{dz}{dq} = \frac{dz}{dw}\cdot\frac{dw}{dq} \quad \text{ve} \quad \frac{dz}{dl} = \frac{dz}{dw}\cdot\frac{dw}{dl}$$ dir.

$$w = q - il$$

$$\frac{dw}{dq} = +\,1 \quad \text{ve} \quad \frac{dw}{dl} = -\,i$$

buradan.

$$\frac{dz}{dq} = \frac{dz}{dw}$$

$$\frac{dz}{dl} = -i \frac{dz}{dw}$$

$$\frac{dz}{dq} = i \frac{dz}{dl} \quad \text{bulunur.}$$

$$Z = X + i y$$

$$\frac{dz}{dq} = \frac{dx}{dq} + i \frac{dy}{dq}$$

$$i \frac{dz}{dl} = i \frac{dz}{dl} - \frac{dy}{dl}$$

Soltarafları birbirine müsavi olduklarından.

$$\frac{dx}{dq} + i \frac{dq}{dy} = i \frac{dx}{dl} - \frac{dy}{dl}$$

reel ve imaginer kısımlar ayrılırsa

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dq} &= - \frac{dy}{dl} \\ \frac{dy}{dq} &= + \frac{dx}{dl} \end{aligned}\right\} \quad \text{Cauehi — Riemann tefazulu muadelelerinin ikinci kısmı elde edilir.}$$

Şu halde

İrtisamın konform olabilmesi için irtisam funktionlarının

$$\underline{x + i y = F (q \pm i l)}$$

şeklinde olması lâzım ve kafidir.