ELEKTRONİK UZAKLIK ÖLÇERLERDE MATEMATİK İSTATİSTİK YÖNTEMLERLE ÖLÇEK İRDELEMESİ

Coşkun DEMİR
Denizhan YALIN

ÖZET

EDM aletleriyle ölçülen uzunlukların sistematik hatalardan arındırılması gerekir. Ölçek farklılığı önemli sistematik etkenlerden birisidir. EDM aletlerinin ölçekleri laboratuar testleri ile kontrol edilebilir. Buna ilave olarak, ölçeği belirli bir ağın ölçülerek dengelenmesi ile kullanılan aletin ölçeğinin, koordinatlarla verilen ölçekle uyuşumu incelenebilir. Bu inceleme için ya ağ dengelemesinde fonksiyonel modele ölçek katsayısı bilinmiyen olarak sokulur, ya da ağın serbest dengelenmesiyle elde edilen koordinatlarla verilen koordinatlar arasında Helmert transformasyonu yapılarak bir ölçek katsayısı bulunur.

Aynı test yöntemleri farklı iki EDM aleti arasında ölçek farklılığı olup olmadığının açığa çıkarılması için de uygulanabilir. Bu çalışmada farklı iki EDM aleti ile ölçülen bir test ağında, aletler arasındaki ölçek uyuşumu irdelenmiştir.

ABSTRACT

Distances measured by EDMI's (Electromagnetic Distance Measurement Instruments) must be cleared from the systematic errors. Scale Inconsistency is one of these important errors. The scales of the instruments can be checked by lab tests.In addition to this, the consistency between the scale of the instrument used and the network scale known by the given coordinates can be detected by adjusting the measurements which were carried out in the network. In order to investigate this inconsistency either scale coefficient is inserted to the functional model as a unknown in network adjustment or it is determined by means of Helmert transformation between the given coordinates and the coordinates obtained from the free network adjustment.

The same test methods can be applied as well to detect whether or not, the scale difference exists between two different kinds of instruments. In this study, in a test network which was observed with two different types of instruments, the scale consistency between them is discussed.

1. GİRİŞ

Gelişen teknoloji ile birlikte, nirengi ağlarında EDM aletlerinin kullanılması,bu aletlerle ölçülen uzunlukların ölçeklerine ilişkin sorunları gündeme getirmiştir. Bu aletlerin belirli zamanlarda kontrolü yapılarak herhangi bir ölçek hatası olup olmadığı belli bir istatistik güvenle açığa çıkarılmalıdır. Bu amaçla frekans ölçerlerle laboratuar testleri yapılmakta ya da incelenecek EDM aleti ile ölçeği belli bir test ağı ölçülüp değerlendirilerek ölçek karşılaştırması yapılmaktadır. Test ağının ölçeği, örneğin bazı noktalarının koordinatları veya bazı kenarların hatasız sayılabilecek doğrulukta belirlenebilmesi ile verilmektedir.

Ölçeği belli bir kontrol ağının ölçülmesi ile bu ağla, kullanılan EDM aletinin verdiği ölçek arasında bir farklılık olup olmadığını açığa çıkarmak için iki yöntemden söz edilebilir. Bunlar;

1. Ağın bu ölçülere dayalı olarak Gauss-Markoff Modelinde en küçük kareler yöntemi ile dengelenmesinde fonksiyonel model koordinat bilinmeyenlerine ek olarak, bir ölçek katsayısı da bilinmeyen parametre alınıp genişletilerek, bu parametre için dengeleme sonucu bulunan değerin anlamlı olup olmadığı (1 den farkının 0 sayılıp sayılmayacağı)irdelenir ya da,

2. EDM aleti ile yapılan ölçülerin serbest dengelenmesi sonucu elde edilen koordinatlarla, verilen koordinatlar arasında Helmert (benzerlik) dönüşümü yapılarak bulunacak ölçek katsayısı irdelenir.

Test ağının ölçeği belirli değilse ve ağda farklı iki alet kullanılmış ise yukarıda bahsedilen iki yöntemden biri kullanılarak bu iki alet arasında herhangi bir ölçek farklılığı olup olmadığı da araştırılabilir.

2. LİNEER HİPOTEZ TESTİ

Aletler arasında, ya da bir EDM aleti ile bir test ağının verilen ölçeği arasında ölçek farklılığı olup olmadığının irdelenmesi, teorik olarak, Gauss-Markoff modelinde en küçük kareler yöntemi ile dengelemede model hatası olup olmadığının matematik istatistik testlerle irdelenmesine dayanır. Bilindiği gibi, doğrusallaştırılmış Gauss-Markoff modeli,

$$E(\underline{\ell}) = \underline{\ell} + \underline{\varepsilon} = \underline{A}\,\underline{x}\,, \quad D(\underline{\ell}) = D(\underline{\varepsilon}) = \sigma_o^2 \underline{P}^{-1}$$

olarak tanımlanır. Burada

$\underline{\ell}$: (nxl) Boyutlu gözlem vektörü,

E $(\underline{\ell})$: $\underline{\ell}$ vektörünün ümit değeri,

$\underline{x}$: (uxl) boyutlu parametre vektörü,

$\underline{A}$: (nxu) boyutlu dizayn matrisi,

$\underline{P}$: (nxn) boyutlu ağırlık matrisi

σ_o^2 : Dengeleme öncesi (apriori) varyans

ve $\underline{\varepsilon}$ ise, gözlemlerin (nxl) boyutlu hata vektörü olup $\underline{0}$ ümit değeri ve $\sigma_o^2\underline{P}^{-1}$ varyans-kovaryans matrisi ile normal dağılımda olduğu varsayılmakta ve

$$\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0} \ , \ \sigma_o^2\underline{P}^{-1})$$

gösterimi ile ifade edilmektedir. $\underline{x}$ parametrelerinin en küçük kareler yöntemiyle en iyi tahmin değerleri,

$$\underline{N} = \underline{A}^T\underline{P}\underline{A} \quad ; \quad \underline{n} = \underline{A}^T\underline{P}\underline{\ell}$$

olmak üzere,

$$\underline{N}\,\underline{\hat{x}} = \underline{n}$$

normal denklemlerin çözümünden elde edilir ve bu çözüm,

$$\underline{v} = \underline{A}\,\underline{\hat{x}} - \underline{\ell}$$

eşitliği ile verilen düzeltmelerin

$$\Omega = \underline{v}^T\,\underline{P}\,\underline{v}$$

karesel formunu minumum yapmaktadır ve ayrıca σ_o^2 varyansı için ümit değere sadık en iyi tahmin değeri,

$$\hat{\sigma}^2 = (n-u)^{-1}\Omega$$

ve bilinmeyenlerin varyans kovaryans matrisi (disperziyonu),

$$D\,(\underline{\hat{x}}) = \sigma_o^2\underline{N}^{-1} = \sigma_o^2(\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}$$

ile bulunur. $\underline{v}$ düzeltmeleri

$$\underline{v} \sim N(\underline{0} \ , \ \sigma_o^2(\underline{P}^{-1} - \underline{A}\underline{N}^{-1}\underline{A}^T))$$

olmak üzere normal dağılımdadır ve Ω karesel formu

$$\Omega = \underline{\ell}^T\,(\underline{P} - \underline{P}\underline{A}\underline{N}^{-1}\underline{A}^T\underline{P})\,\underline{\ell}$$

eşitliği ile de ifade edilebilir. Ayrıca E (Ω/σ_o^2) = n-u ile

$$\frac{\Omega}{\sigma_o^2} \sim \chi^2(n-u)$$

şeklinde (n-u) serbestlik derecesi ile şi-kare dağılımındadır. Eğer Gauss-Markoff modelinde bilinmiyen parametreler arasında

$$\underline{H}\,\underline{x} = \underline{w} \tag{1}$$

lineer şart denklemleri (şart denklemleri lineer değilse lineerleştirilir) ileri sürülürse bu modelde $\underline{x}$ parametreleri için $\underline{v}^T\underline{P}\underline{v}$ karesel formunu minimum yapacak tahmin değerleri, aynı zamanda (1) şart denklemlerini de sağlamalıdır. Burada $\underline{H}$, (rxu) boyutlu katsayılar matrisini, rank $(\underline{H})=r$ ve $r<u$ olmak üzere, $\underline{w}$, (rxl) boyutlu bir vektörü göstermektedir. Ω_H, şart denklemli modelde düzeltmelerin karesel toplamını gösterirse,

$$\Omega_H = \Omega + R, \quad R = (\underline{H}\,\hat{\underline{x}} - \underline{w})^T \; (\underline{H}\,\underline{N}^{-1}\underline{H}^T)^{-1} \; (\underline{H}\,\hat{\underline{x}} - \underline{w}) \tag{2}$$

eşitliği geçerlidir. Buradaki R karesel formu, yalın dengeleme ile elde edilen Ω karesel formunda (1)'de verilen şartların ileri sürülmesiyle oluşan artım miktarı olup, görüldüğü gibi, şart denklemli modelle dengeleme yapmaksızın yalın dengeleme sonuçlarından hesaplanabilmektedir.

Model hatalarının ortaya çıkarılmasına yönelik hipotez testi için, ölçülerin normal dağılımda oldukları varsayımı ile, yalın ve şart denklemli Gauss-Markoff Modelinde düzeltmelerden bulunacak Ω, Ω_H ve R karesel formlarının dağılımları bilinmelidir. R karesel formunun,

$$\frac{R}{\sigma_o^2} \sim \chi^2(r)$$

biçiminde gösterilmek üzere r serbestlik dereceli şi-kare dağılımında olduğu bilinmektedir ve bu da (4) ile tanımlanan H_o hipotezinin irdelenmesi olanağını verir. Ω ve R karesel formlarının birbirinden bağımsız olduğu gösterilebilir. Bu nedenle,

$$\frac{R/r}{\Omega/(n-u)}$$

oranı serbestlik dereceleri r ve n-u olan F dağılımındadır ve

$$T = \frac{\frac{R}{r}}{\frac{\Omega}{(n-u)}} = \frac{R}{r\hat{\sigma}^2} \sim F(r,n-u) \tag{3}$$

ile gösterilir /1/,/7/.

Doğrusal hipotez testi, parametreler üzerinde özel olarak seçilmiş şartların uygulanması ile ifade edilir, Böylece genel H_o hipotezi, H_1 alternatif hipotezine karşı test edilebilir,

$$H_o: \underline{H}\,\underline{x} = \underline{w} \quad , \qquad H_1: \underline{H}\,\underline{x} \neq \underline{w} \qquad (4)$$

ile verilen genel hipotezden çok çeşitli özel hipotezler türetilebilir. Örneğin yapılardaki deformasyonları veya yerkabuğu hareketlerinin araştırılması için tesis edilen jeodezik ağlarda, farklı zamanlarda yapılan periyodik gözlemlerden bulunacak koordinatlar farklılık gösteriyor ise; Hipotez testi ile koordinat farklarının gözlemlerin raslantısal özelliğinden mi yoksa noktaların hareketlerinden mi ileri geldiğine karar verilebilir. Benzer olarak uzaklık ölçerlerde ölçek hatası olup olmadığı da, benzeri hipotez testi ile irdelenebilir. Sorun (4) ile verilen varsayımların hangisinin geçerli sayılabileceğidir. Örneğin H_o hipotezi ile,(2) eşitliğinde verilen R nin sıfır alınıp alınamayacağı, başka bir deyişle (3)'le hesaplanacak T karşılaştırma sayısının tanımlanacak F dağılımında olup olmadığı açığa çıkarılacaktır. Verilen α yanılma olasılığına dayanarak F dağılımının, $F_{1-\alpha:r,n-u}$ fraktil değeri H_o hipotezinin kabul veya red edilmesine karar vermede kullanılır. Eğer,

T<F ise sıfır hipotezi (H_o) geçerli,

T>F ise sıfır hipotezi (H_o) geçersiz

sayılır.

3. EDM ALETLERİNDEKİ ÖLÇEK UYUMSUZLUĞUNUN GENİŞLETİLMİŞ MODEL İLE BELİRLENMESİ

İki farklı aletle ölçülmüş ağda, dengelemenin fonksiyonel modeli ek parametre (ölçek parametresi) ile genişletilerek, iki alet arasında ölçek uyuşumsuzluğu olup olmadığı belli bir istatistik güvenle ortaya çıkarılabilir. Genişletilmiş modelde, her iki aletle yapılan ölçüler beraber dengelenir ve aletlerden biri için yazılan düzeltme denklemlerine ek bir parametre ilave edilir. Dengeleme sonucunda bulunan ek parametre iki alet arasındaki görünen ölçek farklılığıdır. Bu farkın anlamlı olup olmadığı istatistik testle kanıtlanır. Bir açı, kenar nirengi ağında doğrultular için düzeltme vektörü $\underline{v}_r$, 1 nci alet için düzeltme vektörü $\underline{v}_1$, 2 nci alet için düzeltme vektörü $\underline{v}_2$ ve kısaltılmış ölçü vektörleri $\underline{\ell}_r$, $\underline{\ell}_1$, $\underline{\ell}_2$ olmak üzere fonksiyonel model, bilindiği gibi,

$$\underline{v}_r = \underline{A}_r\,\underline{x} - \underline{\ell}_r$$

$$\underline{v}_1 = \underline{A}_1\,\underline{x} - \underline{\ell}_1$$

$$\underline{v}_2 = \underline{A}_2\,\underline{x} - \underline{S}\,y - \underline{\ell}_2 \qquad (5)$$

şeklindedir. Burada $\underline{A}_r$, $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$ ilgili katsayılar matrisi, $\underline{x}$ koordinat bilinmeyenleri vektörü, $\underline{S}$ kenar ölçü değerlerine ilişkin yaklaşık koordinatlarla bulunan katsayılar vektörü ve y ek parametredir.

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{\ell}_r \\ \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \end{bmatrix} , \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{v}_r \\ \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} , \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_r \\ \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \end{bmatrix} , \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{S} \end{bmatrix}$$

kısaltmaları ile genel olarak fonksiyonel model ve stokastik model,

$$\underline{\ell} + \underline{v} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{C}\,y \quad , \quad \underline{\Sigma} = \sigma_o^2\,\underline{P}^{-1}$$

olur. Bu sistemin çözümü, tüm koordinatların bilinmeyen alınması ile ağın iç geometrisini bozmayan, serbest ağ dengelemesi ya da serbest ağ dengelemesinin özel bir hali olan minumum sayıda (defekt sayısı kadar) parametrenin sabit alındığı zorlamasız ağ dengelemesi ile yapılır. Örneğin, burada bir koordinat çifti ve bir açıklık açısı bilinen seçilerek düzeltme denklemleri katsayılar matrisi $\underline{A}$, sütun düzgün bir matris haline getirilir ve çözüm eşitlikleri,

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{x}} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^T\underline{P}\underline{A} & \underline{A}^T\underline{P}\underline{C} \\ \underline{C}^T\underline{P}\underline{A} & \underline{C}^T\underline{P}\underline{C} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{A}^T \\ \underline{C}^T \end{bmatrix} \underline{P}\underline{\ell}$$

olur. (5) eşitliği ile verilen düzeltme denklemlerinde $\underline{C}$ katsayılar vektörü, kenar ölçülerine yakın büyüklükler içerdiğinden, $\underline{A}$ matrisine göre büyük değerlere ulaşır. Bu nedenle oluşturulan normal denklemlerin kondisyonu kötüdür. Bu olumsuzluğu gidermek için $\underline{C}$ vektöründeki her terim belli bir sayıya bölünerek parametre değişimi yapılır. Dengeleme sonucunda bulunan ek parametre aynı katsayıya bölünerek aranan değer elde edilir. Birim ağırlıklı ölçünün varyansı,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\underline{v}^T\underline{P}\underline{v}}{n-u_x-u_y+d} = \frac{\underline{v}^T\underline{P}\underline{v}}{f}$$

ile bulunur. Burada n ölçü sayısını, u_x tüm noktaların koordinat ve yöneltme bilinmiyenleri sayısını, d rank defekti (datum parametreleri sayısı ki burada 3'tür) göstermek üzere, u_y=1'dir. İki alet arasında ölçek farklılığı olup olmadığına karar verirken y bilinmiyeninin sıfırdan farklı olup olmadığının belli bir istatistik güvenle irdelenmesi gerekir. Bunun için öne sürülen sıfır hipotezi,

$$H_o : E\{y\} = 0$$

ve alternatif hipotez,

$$H_1 : E\{y\} = 0$$

alınır. Öngörülen sıfır hipotezi ile oluşturulan test istatistiği (3)'e göre,

$$T = \frac{\hat{y}^T q_{yy}^{-1} \hat{y}}{\hat{\sigma}^2} = \frac{\hat{y}^2}{\hat{\sigma}^2 q_{yy}} \tag{6}$$

alınarak F dağılımının 1-α istatistik güven ile 1 ve f serbestlik derecelerine göre alınan $F_{1-\alpha:1,f}$ fraktil değeri ile karşılaştırılır /9/.

$$T < F_{1-\alpha:1,f}$$

gerçekleşiyorsa H_o hipotezi kabul edilir. Aksi durumda red edilir. Ağın ölçeği dış parametrelerle belirli ise ağda kullanılan EDM aletinin ağ ile ölçek uyuşumu yine aynı yöntemle belirlenir.

4. HELMERT TRANSFORMASYONU YARDIMI İLE ÖLÇEK UYUŞUMSUZLUĞUNUN İRDELENMESİ

Test ağının farklı iki aletle ölçülmesi sonucunda Helmert transformasyonu ile aletler arasındaki ölçek katsayısı bulunabilmektedir. İki ayrı aletle yapılan ölçüler ayrı ayrı dengelenerek elde edilen iki grup koordinat arasında yapılan Helmert transformasyonu ile bulunan ölçek bilinmiyeni, aletler arasındaki ölçek katsayısını verir. Bunun anlamlı olup olmadığı yine istatistik testle irdelenir. Her iki aletle yapılan ölçülerin dengelenmesinde de ağın iç geometrisini bozmayan serbest ağ dengelemesi uygulanır ve uyuşumsuz ölçüler ayıklanır.

Nirengi ağı sıklaştırmasında sabit koordinatların ağa verdiği ölçek ile EDM aletinin ölçeği arasında ölçek uyuşumu yine aynı yöntemle bulunabilir.

Dengelemeli helmert transformasyonunda birinci sistemin koordinatları x_i, y_i(i=1.....p) ve ortak noktalara ait ikinci sistemin koordinatları $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ olmak üzere fonksiyonel model

$$\begin{aligned} \bar{x}_i + v_{xi} &= k_1 + x_i k_3 - y_i k_4 \\ \bar{y}_i + v_{yi} &= k_2 + y_i k_3 + x_i k_4 \end{aligned} \tag{7}$$

şeklindedir. Matrisiyel olarak;

$\underline{v} = \underline{A}\,\underline{x} - \underline{\ell}$ ile gösterilen (7) eşitliklerinde

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 + x_s & -(\Delta y_1 + y_s) \\ 0 & 1 & \Delta y_1 + y_s & \Delta x_1 + x_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \Delta y_p + y_s & \Delta x_p + x_s \end{bmatrix} \qquad -\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta x}_1 + \bar{x}_s \\ \bar{\Delta y}_1 + \bar{y}_s \\ \vdots \\ \bar{\Delta y}_p + \bar{y}_s \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}^T$$

şeklindedir. Sırasıyla birinci ve ikinci sistemde noktaların ağırlık merkezi koordinatları (p=nokta sayısı)

$$x_s = \frac{[x_i]}{p}, \quad y_s = \frac{[y_i]}{p}, \quad \bar{x}_s = \frac{[\bar{x}_i]}{p}, \quad \bar{y}_s = \frac{[\bar{y}_i]}{p}$$

olmak üzere, ağırlık merkezine kaydırılmış koordinatlar,

$$\Delta x_i = x_i - x_s, \quad \Delta y_i = y_i - y_s, \quad \Delta\bar{x}_i = \bar{x}_i - \bar{x}_s, \quad \Delta\bar{y}_i = \bar{y}_i - \bar{y}_s$$

dir. Normal denklemler $\underline{N} = \underline{A}^T\underline{A}$ ve sabit terim vektörü $\underline{A}^T\underline{\ell}$, $\underline{P} = \underline{I}$ ve

$\left[s^2\right] = \left[\Delta x^2 + \Delta y^2\right]$ alınmasıyla

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} p & 0 & p x_s & -p y_s \\ 0 & p & p y_s & p x_s \\ p x_s & p y_s & p(x_s^2 + y_s^2) + \left[s^2\right] & 0 \\ -p y_s & p x_s & 0 & p(x_s^2 + y_s^2) + \left[s^2\right] \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^T\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \bar{x}_s p \\ \bar{y}_s p \\ \Sigma(\Delta x_i + x_s)\bar{x}_i + (\Delta y_i + y_s)\bar{y}_i \\ \Sigma(\Delta x_i + x_s)\bar{y}_i + (\Delta y_i + y_s)\bar{x}_i \end{bmatrix} \qquad (8)$$

olur. $\underline{N}$'nin inversi parçalara ayrılarak kolayca alınır ve

$$
\underline{N}^{-1}=Q_{xx}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{p}+\frac{y_s^2+x_s^2}{[s^2]} & 0 & -\frac{x_s}{[s^2]} & \frac{y_s}{[s^2]} \\
0 & \frac{1}{p}+\frac{y_s^2+x_s^2}{[s^2]} & -\frac{y_s}{[s^2]} & -\frac{x_s}{[s^2]} \\
-\frac{x_s}{[s^2]} & -\frac{y_s}{[s^2]} & \frac{1}{[s^2]} & 0 \\
\frac{y_s}{[s^2]} & -\frac{x_s}{[s^2]} & 0 & \frac{1}{[s^2]}
\end{bmatrix} \tag{9}
$$

olduğu görülür /2/. Bilinmeyenlerin çözümü,

$$
\underline{\hat{x}} = (\underline{A}^T\underline{A})^{-1}\,\underline{A}^T\underline{\ell}
$$

ile elde edilir (8) ve (9)'dan k_3 için

$$
k_3=\frac{-x_s\bar{x}_s p}{[s^2]}-\frac{y_s\bar{y}_s p}{[s^2]}+\frac{1}{[s^2]}\left(\Sigma\ (\Delta x_i+x_s)\bar{x}_i+(\Delta y_i+y_s)\bar{y}_i\right)
$$

eşitliği yazılabilir. Gerekli çarpımları yapılırsa,

$$
k_3=\frac{[\Delta x\ \Delta\bar{x}+\Delta y\ \Delta\bar{y}]}{[s^2]}
$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak,

$$
\begin{aligned}
k_4&=\frac{[\Delta x\ \Delta\bar{y}+\Delta y\ \Delta\bar{x}]}{[s^2]}\\
k_1&=\frac{[\bar{x}]-k_3\,[x]+k_4\,[y]}{p}\\
k_2&=\frac{[\bar{y}]-k_3\,[y]+k_4\,[x]}{p}
\end{aligned} \tag{10}
$$

elde edilir. Dengeleme sonucu $\hat{\sigma}^2$ tahmin değeri

$$
\hat{\sigma}^2=\frac{[v_x^2+v_y^2]}{2p-4}
$$

ile hesaplanır. Verilen nokta koordinatları arasındaki uyuşumsuz (x,y) ölçü çiftlerini tesbit etmek üzere, her nokta için ölçü çiftleri uyuşum testi yapılır /2/,/4/,/6/,/8/.

$$q_{v_x v_x} = q_{v_y v_y} = 1 - \frac{1}{p} - \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{[s^2]} , \quad q_{v_x v_y} = 0 \quad \text{den,}$$

$$T = \sqrt{\frac{v_x^2 + v_y^2}{2\hat{\sigma} q_{v_x v_x}}}$$

eşitliği ile hesaplanacak test istatistiği α yanılma olasılığına göre,

$$c = \sqrt{(p-2) \left[1 - \left(\frac{\alpha}{p}\right) \right]^{1/(p-3)}}$$

eşitliği ile bulunacak c sayısı ile karşılaştırılır. T>c oluyorsa ilgili koordinat çifti uyuşumsuzdur. Uyuşumsuz çıkan koordinat çifti atılarak transformasyon tekrar yapılır.

Diğer taraftan transformasyon yapılan iki sistem arasında dengeleme sonucu,

$$\hat{\lambda}_s = (\hat{k}_3^2 + \hat{k}_4^2)^{1/2} \tag{11}$$

formülü ile bulunan ölçek katsayısının anlamlı olup olmadığını araştırmak için (11)'deki tahmin değerleri yerine ümit değerleri konulursa,

$$\lambda_s = (k_3^2 + k_4^2)^{1/2} \tag{12}$$

olur. Böylece sıfır hipotezi,

$$H_o: \ (k_3^2 + k_4^2)^{1/2} = 1$$

olacaktır. (12) ile verilen şart denkleminin k_3^0, k_4^0 yaklaşık değerleri ile Taylor serisine açınımı yapılarak lineerleştirme sonucu,

$$\frac{k_3^o}{\lambda_o} \delta k_3 + \frac{k_4^o}{\lambda_o} \delta k_4 + \lambda_o = 1 \tag{13}$$

olur. Burada

$$\lambda_o = ((k_3^o)^2 + (k_4^o)^2)^{1/2} \quad \text{olup,}$$

$$\underline{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_3^0}{\lambda_0} & \frac{k_4^0}{\lambda_0} \end{bmatrix}^T$$

ve

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \delta k_1 & \delta k_2 & \delta k_3 & \delta k_4 \end{bmatrix}^T$$

şeklinde tanımlanarak (13) eşitliği matris gösterimiyle

$$\underline{h}^T \underline{x} + \lambda_o = 1, \quad \text{ve} \quad w = 1 - \lambda_o$$

dır. Böylece

$$H_o : \underline{h}^T \underline{x} = w \tag{14}$$

olur. (7)'deki düzeltme denklemlerinde $k_1 = k_1^o + \delta k_1$, $k_2 = k_2^o + \delta k_2$, $k_3 = k_3^o + \delta k_3$, $k_4 = k_4^o + \delta k_4$ konularak k parametreleri en küçük kareler yöntemine göre tahmin edildiğinde k_1^o, k_2^o, k_3^o, k_4^o yaklaşık değerleri (10) eşitliği ile hesaplanırsa;

$$\delta k_1 = \delta k_2 = \delta k_3 = \delta k_4 = 0$$

olacağı görülmektedir. Buna karşılık küçültülmüş bilinmiyenlerin ağırlık katsayılar matrisi $\underline{Q}_{xx}$, (9)'da verilen matristir. Bu durumda (14) şart denklemi dikkate alınarak (2)'den,

$$R = (\underline{h}^T \underline{x} - w)^T \cdot (\underline{h}^T \underline{Q}_{xx} \underline{h})^{-1} \cdot (\underline{h}^T \underline{x} - w) \tag{15}$$

ve

$$(\underline{h}^T \underline{Q}_{xx} \underline{h})^{-1} = [s^2]$$

bulunur. Buradan R karesel formu,

$$R = (\lambda_o - 1)^2 \, [s^2]$$

olmaktadır.

$$\hat{\lambda}_s = \lambda_o$$

denilirse, (3) test istatistiğinin,

$$T = \frac{\frac{R}{r}}{\frac{\Omega}{(2p-4)}} = \frac{(\hat{\lambda}_s - 1)^2 \; s^2}{\hat{\sigma}^2} \sim F_{1-\alpha;\, 1,2p-4} \tag{16}$$

olduğu görülür /3/. Burada r=1 şart denklemi sayısıdır. (16) ile hesaplanan test istatistiğinin 1 ve 2p-4 serbestlik dereceli F dağılımının 1-α güvenle belirlenecek fraktil değeri ile karşılaştırılır.

$$T > F_{1-\alpha, 1, 2p-4}$$

ise iki sistem arasında ölçek farklılığı vardır sonucuna varılır. Aksi durumda ölçek parametresi rastlantısal olarak 1'den farklıdır.

5. SAYISAL UYGULAMA

Sayısal uygulamada kullanılan Gerede Mikro Jeodezik Ağı 8 noktadan oluşmakta olup, Kuzey Anadolu Fay Kuşağı'nın bu kesimindeki güncel yer kabuğu hareketlerini belirleyip izlemek amacı ile kurulmuştur. Bu ağda 1983 yılında iki farklı aletle (Geodimeter 710, Mekometer ME 3000) kenar ölçmeleri yapılmış ve ayrıca tüm doğrultular da gözlenmiştir.

Doğrultularla kenarların birlikte dengelendiği ağlarda stokastik modelin isabetli oluşturulması özellikle yüksek doğruluk isteyen çalışmalarda önem taşımaktadır. Kenar ölçmeleri için ağırlıklar genelde,

$$m_s = \mp(a \mp b \; S_{km}) \text{ mm alınarak } p_s = C/m_s^2 \qquad (17)$$

eşitliği ile belirlenir. Burada C, tüm ölçüler için değişmez olmak üzere, keyfi seçilen bir sayıdır. Kenarlar için, alet yapımcı firma tarafından verilen a ve b katsayıları ile hesaplanan m_s değerleri çok tutarlı olmayabilir. Bu nedenle, sözü edilen katsayılar test ağında deneysel olarak tahmin edilmiştir. Test ağında gözlenebilen tüm kenarlar ölçüldüğü için sadece kenar ölçüleri kullanılarak uygun bir geometrik şekilde noktaların koordinatları dengelemeli olarak belirlenebilmektedir.

Sadece kenar ölçüleri kullanılarak yapılan serbest dengelemede birim ölçünün a priori varyansı C=1 alınmıştır. Kenar ölçülerinin dengeleme öncesi (a priori) varyansları, a ve b katsayılarına deneysel değerler verilerek (17) eşitliğinden hesaplanmıştır. Bu biçimde bulunan p_s değerleri ile yapılan dengeleme sonucunda bulunan a posteriori varyans $\hat{\sigma}^2$, başlangıçtaki C değeri ile karşılaştırılarak en iyi yaklaşıklığı sağlayan katsayılar, ilişkin yılda yapılan kenar ölçmelerinde kullanılan alet için kabul edilmiştir.

Doğrultuların karesel ortalama hatası m_r için ilk yaklaşık değer, W:üçgen kapanması olmak üzere

$$m_r^2 = \frac{[WW]}{6n}$$

formülü ile verilen Ferraro eşitliğinden bulunmuştur. Kenarlar için yapılan işlemler doğrultular içinde yapılmış ve bu işlemler sonucunda 1983 yılına ilişkin olarak doğrultular için $m_r = 1.52^{cc}$, Mekometer ME 3000 için a = 2.5 ve b = 1, Geodimeter 710 için a = 5 ve b = 1 bulunmuştur.

Daha sonra ölçülen doğrultularla birlikte iki farklı aletle yapılan kenar ölçmeleri birlikte serbest dengelenmiştir. Bu dengelemede aletlerden biri (Ge dimeter 710) için yazılan düzeltme denklemlerine bir y ölçek katsayısı ilave edilmiştir. Bu dengelemede,

Toplam ölçü sayısı=48(doğrultu)+23(kenar-Geodimetre)+23(kenar-mekometre)=94

Bilinmiyen sayısı = 8(nokta)*3(2 koordinat+1 yön.bil.) +1(Ölçek bil.) =25

Serbestlik derecesi=94-25+3 =72

dir. Dengeleme sonucunda Pope yöntemine göre uyuşumsuz ölçü testi yapılmış ve uyuşumsuz ölçü olmadığı sonucuna varılmıştır. Ayrıca ölçek parametresi,

$$\Delta\lambda_s = 9.198 * 10^{-6}$$

bulunmuştur. Bunun anlamlı olup olmadığını irdelemek üzere,(6)'dan

$$T = \frac{\Delta\lambda_s^2 . q_{\Delta\lambda}^{-1}}{\hat{\sigma}^2} = 165.675$$

ile bulunan test değeri α=0,05 için, $F_{1-\alpha;1,72}$=3.974 fraktil değeri ile karşılaştırılır.

$$T > F_{1-0.05;1.72}$$

olduğu için ölçek parametresinin anlamlı olduğu kabul edilmektedir. Diğer bir ifadeyle Geodimetre 710 aleti, Mekometer ME 3000'e göre anlamlı bir ölçek farklılığına sahiptir sonucuna varılır.

İki EDM aleti ile yapılan ölçmelerin değerlendirilmesiyle, aletler arasında herhangi bir ölçek farklılığının olup olmadığı Helmert transformasyonu ile de belirlenmiştir. Burada aletlerden herbiri için yapılan ölçü grupları, doğrultularla birlikte ayrı ayrı serbest dengelenmiş, elde edilen iki grup koordinatlar arasında yapılan Helmert transformasyonu ile bulunan ölçek parametresinin anlamlılığı irdelenmiştir.

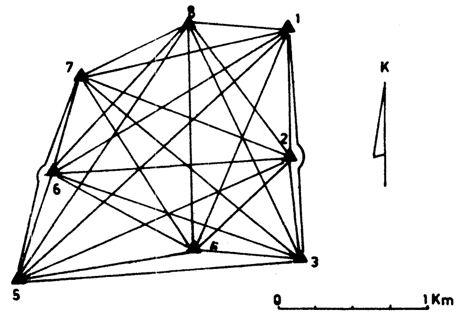
Transformasyon sonunda uyuşumsuz koordinat çiftlerini ayıklamak için testler uygulanmış ve uyuşumsuz koordinat çifti olmadığı sonucuna varılmıştır.

Dengeleme sonucunda transformasyon yapılan iki sistem arasında ölçek parametresi,

$$\lambda_s = (k_3^2 + k_4^2)^{1/2} = 1.000009136$$

bulunmuştur. Bu değerin anlamlı olup olmadığını irdelemek üzere,

$$T = \frac{(\lambda_s-1)^2 \; [s^2]}{\hat{\sigma}^2} = 225.139$$



Şekil-1 : Gerede mikro jeodezik ağı

ile hesaplanan test değeri $F_{1-\alpha,1,2p-4}$ fraktil değeri ile karşılaştırılır.

$$T > F_{1-0.05;1,12} = 4.747$$

olduğu için iki sistem arasında ölçek parametresi anlamlı kabul edilerek,"ölçek farklılığı yoktur" şeklindeki sıfır hipotezi rededilecektir.

Helmert transformasyonu ile bulunan ölçek katsayısı,

$$\Delta\lambda_s = \lambda_s - 1 = 9.136 * 10^{-6}$$

dır. Bu değerin genişletilmiş model ile bulunan ölçek parametresi ile karşılaştırıldığında, bulunan değerlerin birbirlerine çok yakın oldukları görülür /5/.

6. SONUÇ

Gauss-Markoff modelinde en küçük karelerle dengelemede çeşitli sebeblerle ortaya çıkan model hataları, dengelemeye ek parametreler eklenerek açığa çıkarılabilir. EDM aletlerinde herhangi bir ölçek hatasının olup olmadığı fonksiyonel modele ek parametre (ölçek parametresi) ilave edilerek araştırılır.

Genellikle ağ dengelemelerinde kullanılan hazır programlarda böylesi seçenekler olmayabilir. Pratikte kullanıcı için dengeleme modelini genişletmek çeşitli güçlükler doğurabilir ve her zaman mümkün olmayabilir. Ancak Helmert transformasyonu yardımı ile bu sorun kolayca çözülebilir. Özellikle nirengi ağı sıklaştırılmasında verilen koordinatların ağa verdiği ölçek ile EDM aletinin ölçeği arasında herhangi bir uyuşumsuzluk olup olmadığı ve EDM aletlerinin birbirlerine göre kıyaslanmasında bu aletler arasında bir ölçek farklılığı olup olmadığı Helmert transformasyonu ile ortaya çıkarılabilir.

K A Y N A K L A R

/1/ Aksoy,A. : Jeodezik Değerlerin Matematik İstatistik Testlerle İrdelenmesi, Türkiye I Hrt.Bil.ve Tek. Kurultayı.1987

/2/ Aksoy,A. : Ülke Nirengi Ağı Sıklaştırmasında Günümüz Yaklaşımları, Türkiye I.hrt.Bil.ve Tek.Kurultayı.1987

/3/ Aksoy,A. : Benzerlik Dönüşümü Notları (Basılmadı)

/4/ Benning,W. : Test Von Ausreissern bei der Helmert Transformasyon ZFV Heft 5, 110. 1985

/5/ Demir,C. : EDM Aletlerindeki ölçek uyuşumsuzluğunun Değişik lineer hipotez testlerle irdelenmesi(İ.T.Ü.Yüksek Lisans Tezi 1990)

/6/ Hahn,M.,Bill,R. : Ein Vergleich Der L1 und L2 Norm am Beispiel Helmert transformation, AVN Heft 11-12, 91 Jahrgang 1984

/7/ Koch,K.R. : Parameter Estimation and Hypothesis Testing in linear Models, 1980

/8/ Koch,K.R. : Test Von Ausreissern in Beobachtungspaaren ZFV, Heft 1,110 Jahrgang 1985

/9/ Mierlo,J.V. : A Review Model Checks and Reliabilty Sym. on Geodetic Networks and comp. Munich 1981